



Les intégrales et fonctions elliptiques

Marc Renaud

► **To cite this version:**

| Marc Renaud. Les intégrales et fonctions elliptiques. Rapport LAAS n° 14264. 2014. <hal-01523332>

HAL Id: hal-01523332

<https://hal.laas.fr/hal-01523332>

Submitted on 16 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les intégrales et fonctions elliptiques.

Marc RENAUD

Professeur émérite INSA-Toulouse
LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse, France

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

10 juin 2014

Chapitre 1

Introduction

Une fonction elliptique – ou fonction elliptique de première espee – est une fonction complexe, à valeurs complexes, méromorphe sur le plan complexe et doublement périodique. Il suffit donc de la définir sur un parallélogramme fondamental ayant pour cotés les deux périodes fondamentales.

L'ordre d'une telle fonction est le nombre commun de zéros et de pôles dans ce parallélogramme fondamental. Une fonction elliptique entière, donc d'ordre zéro, est constante, d'après un théorème de Liouville.

Une fonction elliptique de deuxième ou troisième espee est une fonction complexe, à valeurs complexes, méromorphe sur le plan complexe mais qui ne possède que deux quasi-périodes (définies ci-après) ; elle n'est donc pas elliptique au sens strict.

Nous avons choisi de présenter les fonctions thêta avec des quasi-périodes 1 et τ [avec $\Im(\tau) > 0$], comme [10], [11] et [12] et non des quasi-périodes π et $\pi\tau$, comme [1], [3], [13] et [20].

Nous avons pris soin de distinguer la notation des fonctions dites inverses [1]¹, [4]², [15]³ et [19]⁴ ou réciproques [5]⁵ et [21]⁶ de celle des inverses multiplicatifs des images.

1. par ex. tableau p. 596
2. p. 409
3. p. 25
4. p. 918 Inverse Function
5. pp. 108-115 Fonctions circulaires réciproques et pp. 199-202 Fonctions hyperboliques réciproques
6. par ex. pour Fonction de Gudermann

Ainsi, par exemple, nous notons $\cos^{-1} = \arccos$ l'inverse ou la réciproque de la fonction \cos et $[\cos(x)]^{-1}$ l'inverse multiplicatif de l'image $\cos(x)$. Toutefois certains auteurs tels [20]⁷ font une différence entre fonctions inverses et réciproques ; nous n'avons donc pas retenu ce point de vue.

Les fonctions directes et inverses utilisées sont indiquées ci-après. Nous retenons les symboles anglais de ces fonctions, ne serait-ce que parcequ'ils figurent sur les calculettes.

L'auteur remercie par avance les lecteurs qui lui signaleraient des erreurs dans ce rapport.

Remarque : il existe de nombreuses éditions du "CRC Concise Encyclopedia of Mathematics" [19] et les pages et numéros d'équations que nous citons ne correspondent qu'à l'édition de 1999. Pour plus de robustesse nous avons toujours indiqué les titres anglais des diverses rubriques.

1.1 Fonctions logarithme et exponentielle directes et inverses

fonction	symbole en français	symbole en anglais
logarithme ou exponentielle inv.	$\text{Log} = \exp^{-1}$	$\ln = \exp^{-1}$
exponentielle ou logarithme inv.	$\exp = \text{Log}^{-1}$	$\exp = \ln^{-1}$

1.2 Fonctions circulaires (ou trigonométriques) directes et inverses

7. p. 494

fonction	symbole en français	symbole en anglais
cosinus	cos	cos
sinus	sin	sin
tangente	tg	tan
cotangente	cotg	cot
secante	sec	sec
cosecante	cosec	csc
cosinus inv. ou arc cosinus	$\cos^{-1} = \arccos$	$\cos^{-1} = \arccos$
sinus inv. ou arc sinus	$\sin^{-1} = \arcsin$	$\sin^{-1} = \arcsin$
tangente inv. ou arc tangente	$\text{tg}^{-1} = \text{arctg}$	$\tan^{-1} = \text{arctan}$
cotangente inv. ou arc cotangente	$\text{cotg}^{-1} = \text{arccotg}$	$\cot^{-1} = \text{arccot}$
secante inv. ou arc secante	$\text{sec}^{-1} = \text{arcsec}$	$\text{sec}^{-1} = \text{arcsec}$
cosecante inv. ou arc cosecante	$\text{cosec}^{-1} = \text{arccosec}$	$\text{csc}^{-1} = \text{arccsc}$

On a :

$$\begin{aligned} \cot(x) &\triangleq [\tan(x)]^{-1} \text{ et donc } \tan(x) \triangleq [\cot(x)]^{-1}, \\ \sec(x) &\triangleq [\cos(x)]^{-1} \text{ et donc } \cos(x) \triangleq [\sec(x)]^{-1}, \\ \text{csc}(x) &\triangleq [\sin(x)]^{-1} \text{ et donc } \sin(x) \triangleq [\text{csc}(x)]^{-1}, \end{aligned}$$

1.3 Fonctions hyperboliques directes et inverses

fonction	symbole en français	symbole en anglais
cosinus hyperbolique	ch	cosh
sinus hyperbolique	sh	sinh
tangente hyperbolique	th	tanh
cotangente hyperbolique	coth	coth
secante hyperbolique	sech	sech
cosecante hyperbolique	cosech	csch
cosinus hyp. inv. ou arg. cosinus hyp.	$\text{ch}^{-1} = \text{argch}$	$\text{cosh}^{-1} = \text{arccosh}$
sinus hyp. inv. ou arg. sinus hyp.	$\text{sh}^{-1} = \text{argsh}$	$\text{sinh}^{-1} = \text{arcsinh}$
tangente hyp. inv. ou arg. tangente hyp.	$\text{th}^{-1} = \text{argth}$	$\text{tanh}^{-1} = \text{arctanh}$
cotangente hyp. inv. ou arg. cotangente hyp.	$\text{coth}^{-1} = \text{argcoth}$	$\text{coth}^{-1} = \text{arccoth}$
secante hyp. inv. ou arg. secante hyp.	$\text{sech}^{-1} = \text{argsech}$	$\text{sech}^{-1} = \text{arcsech}$
cosecante hyp. inv. ou arg. cosecante hyp.	$\text{cosech}^{-1} = \text{argcosech}$	$\text{csch}^{-1} = \text{arccsch}$

On a :

$$\text{coth}(x) \triangleq [\tanh(x)]^{-1} \text{ et donc } \tanh(x) \triangleq [\text{coth}(x)]^{-1},$$

$\operatorname{sech}(x) \triangleq [\cosh(x)]^{-1}$ et donc $\cosh(x) \triangleq [\operatorname{sech}(x)]^{-1}$,
 $\operatorname{csch}(x) \triangleq [\sinh(x)]^{-1}$ et donc $\sinh(x) \triangleq [\operatorname{csch}(x)]^{-1}$, Et :
 $\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$,
 $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
 $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1.4 Fonctions elliptiques directes et inverses

fonction	symb. en français et en anglais	fonction inverse
cosinus elliptique	cn	cn^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
sinus elliptique	sn	sn^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
delta elliptique	dn	dn^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	cd	cd^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	sd	sd^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	nd	nd^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	dc	dc^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	nc	nc^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	sc	sc^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	ns	ns^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	ds	ds^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
?	cs	cs^{-1} fonct. ellipt. 1 ^{ère} esp.
amplitude	am	am^{-1}
amplitude inverse	am^{-1}	am

On a :

$\operatorname{nc}(x) \triangleq [\operatorname{cn}(x)]^{-1}$, $\operatorname{ns}(x) \triangleq [\operatorname{sn}(x)]^{-1}$, $\operatorname{nd}(x) \triangleq [\operatorname{dn}(x)]^{-1}$.
 $\operatorname{dc}(x) \triangleq [\operatorname{cd}(x)]^{-1}$, $\operatorname{ds}(x) \triangleq [\operatorname{sd}(x)]^{-1}$, $\operatorname{dn}(x) \triangleq [\operatorname{nd}(x)]^{-1}$.
 $\operatorname{cd}(x) \triangleq [\operatorname{dc}(x)]^{-1}$, $\operatorname{cn}(x) \triangleq [\operatorname{nc}(x)]^{-1}$, $\operatorname{cs}(x) \triangleq [\operatorname{sc}(x)]^{-1}$.
 $\operatorname{sn}(x) \triangleq [\operatorname{ns}(x)]^{-1}$, $\operatorname{sd}(x) \triangleq [\operatorname{ds}(x)]^{-1}$, $\operatorname{sc}(x) \triangleq [\operatorname{cs}(x)]^{-1}$.

1.5 Fonctions de Gudermann directe et inverse

fonction	symb. en français et en anglais	fonction inverse
Gudermann	gd	gd
Gudermann inverse	$\operatorname{gd}^{-1} = \operatorname{arctgd}$	gd^{-1}

Remarque : les fonctions inverses ont plusieurs déterminations (et on ne devrait donc pas parler de fonctions !). Les déterminations principales – qui elles sont effectivement des fonctions – se notent avec un A majuscule : Arc ou Arg en français et Arc en anglais.

Chapitre 2

Les intégrales elliptiques

2.0.1 Quelques constantes réelles

k module ($0 \leq k \leq 1$), $k' \triangleq (1 - k^2)^{\frac{1}{2}}$ module complémentaire ($0 \leq k' \leq 1$), $m \triangleq k^2$ paramètre ($0 \leq m \leq 1$), $m_1 \triangleq k'^2 = 1 - m$ paramètre complémentaire ($0 \leq m_1 \leq 1$). α l'angle modulaire tel que $m = [\sin(\alpha)]^2$ et $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ l'angle modulaire complémentaire tel que $m_1 = [\cos(\alpha)]^2$.

2.1 Intégrales elliptiques incomplètes

2.1.1 De première espèce

De la forme :

$$\int \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}}, \text{ avec } T = a_0 t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \text{ (voir la liste Annexe A).}$$

2.1.2 De la forme :

$$\int \frac{dt}{R^{\frac{1}{2}}}, \text{ avec } T = a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

Si T a 3 zéros réels, voir la liste Annexe B. Si T a 1 zéro réel, voir la liste Annexe C.

On peut ramener ces intégrales elliptiques incomplètes de première espèce à la forme canonique¹ :

1. D'autres auteurs ont une définition différente de la forme canonique

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta [13]^2 \text{ et } [19]^3 \text{ ou}$$

$$F(\varphi | m) = \int_0^\varphi \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta \text{ ou}$$

$$F(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi \{1 - [\sin(\alpha)]^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta [1]^4,$$

Ou :

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\sin(\varphi)} [(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt [19]^5 \text{ ou}$$

$$F(\varphi, m) = \int_0^{\sin(\varphi)} [(1 - m t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt \text{ ou}$$

$$F(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^{\sin(\varphi)} [(1 - [\sin(\alpha)]^2 t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt [1]^6.$$

2.1.3 De deuxième espèce

De la forme :

$$\int \frac{t^2 dt}{[(A_1 t^2 + B_1)(A_2 t^2 + B_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

On peut ramener ces intégrales elliptiques incomplètes de deuxième espèce à la forme canonique⁷ :

$$D(\varphi, k) = \int_0^\varphi \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\theta [13]^8 \text{ et } [19]^9 \text{ ou}$$

$$D(\varphi | m) = \int_0^\varphi \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\theta \text{ ou}$$

$$D(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi \{1 - [\sin(\alpha)]^2 [\sin(\theta)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Ou :

$$D(\varphi, k) = \int_0^{\sin(\varphi)} (1 - k^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt [19]^{10} \text{ ou}$$

$$D(\varphi | m) = \int_0^{\sin(\varphi)} (1 - m t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt [1]^{11} \text{ ou}$$

$$D(\varphi \setminus \alpha) = \int_0^{\sin(\varphi)} \{(1 - [\sin(\alpha)]^2 t^2)\}^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt [1]^{12}.$$

Remarque : nous avons noté cette intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce avec la lettre D , comme [13], et non comme il est d'usage

-
2. p. 51 éq. (3.1.8)
 3. pp. 537-539 Elliptic Integral of the First Kind éq. (1)
 4. p. 589 éq. (17.2.6)
 5. pp. 537-539 Elliptic Integral of the First Kind éq. (4)
 6. p. 589 éq. (17.2.6)
 7. D'autres auteurs ont une définition différente de la forme canonique
 8. p. 63 éq. (3.4.26)
 9. pp. 539-540 Elliptic Integral of the Second Kind éq. (1)
 10. pp. 539-540 Elliptic Integral of the Second Kind éq. (5)
 11. pp. 589-590 éq. (17.2.8)
 12. pp. 589-590 éq. (17.2.9)

avec la lettre E pour éviter toute confusion avec l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce (cf. ci-après) qui est notée avec la lettre E .

2.1.4 De Troisième espèce

De la forme :

$$\int \frac{t^2 dt}{(1+Ct^2)[(A_1 t^2+B_1)(A_2 t^2+B_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

On peut ramener ces intégrales elliptiques incomplètes de troisième espèce à la forme canonique¹³ :

$$\Pi(n, \varphi, k) = \int_0^\varphi \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta [19]^{14} \text{ ou}$$

$$\Pi(n, \varphi | m) = \int_0^\varphi \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta \text{ ou}$$

$$\Pi(n, \varphi \setminus \alpha) = \int_0^\varphi \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - [\sin(\alpha)]^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta [1]^{15}.$$

Ou :

$$\Pi(n, \varphi, k) = \int_0^{\sin(\varphi)} (1 - n t^2)^{-1} [(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt [19]^{16} \text{ ou}$$

$$\Pi(n, \varphi | m) = \int_0^{\sin(\varphi)} (1 - n t^2)^{-1} [(1 - m t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt [1]^{17} \text{ ou}$$

$$\Pi(n, \varphi \setminus \alpha) = \int_0^{\sin(\varphi)} (1 - n t^2)^{-1} (\{1 - [\sin(\alpha)]^2 t^2\} (1 - t^2))^{-\frac{1}{2}} dt.$$

2.2 Intégrales elliptiques complètes

2.2.1 De première espèce

Soit \mathcal{F} est la fonction hypergéométrique (de Gauss) :

$\mathcal{F}(a, b; c; u) \triangleq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+l)\Gamma(b+l)}{\Gamma(c+l)} \frac{u^l}{l!}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ (Γ est la fonction d'Euler) [1]¹⁸, [19]¹⁹.

13. D'autres auteurs ont une définition différente de la forme canonique

14. p. 540 Elliptic Integral of the Third Kind éq. (1)

15. p. 590 éqs. (17.2.14) et (17.7.1)

16. p. 540 Elliptic Integral of the Third Kind éq. (2)

17. p. 590 éqs. (17.2.15)

18. pp. 555-566 Ch. 15

19. pp. 873-875 Hypergeometric Function

$$K(k) \triangleq F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 [(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt$$

[13]²⁰ et [19]²¹.

On a :

$$K(k) \triangleq F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots\right]$$

ou

$$\tilde{K}(m) \triangleq F\left(\frac{\pi}{2} | m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 [(1 - m t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt$$

[1]²².

On a :

$$\tilde{K}(m) \triangleq F\left(\frac{\pi}{2} | m\right) = \frac{\pi}{2} \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 m^3 + \dots\right]$$

$K \triangleq K(k) \triangleq \tilde{K}(m)$ est, par définition, l'intégrale elliptique complète de première espèce et $K' \triangleq K(k') \triangleq \tilde{K}(m_1)$ est, par définition, l'intégrale elliptique complète complémentaire de première espèce

Remarque : nous avons noté l'intégrale elliptique complète de première espèce K comme [20], $K(k)$ comme [3], [13] et [19]²³ et $\tilde{K}(m)$ alors qu'elle est notée $K(m)$ par [1] et [15]. Idem pour K' .

2.2.2 De deuxième espèce

$$E(k) \triangleq D\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 (1 - k^2 t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

[13]²⁴ ou [19]²⁵.

$$\tilde{E}(m) \triangleq D\left(\frac{\pi}{2} | m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 (1 - m t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$E \triangleq E(k) \triangleq \tilde{E}(m)$ est, par définition, l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce et $E' \triangleq E(k') \triangleq \tilde{E}(m_1)$ est, par définition, l'intégrale elliptique complète complémentaire de deuxième espèce.

20. p. 73 éq. (3.8.1)

21. pp. 537-539 Elliptic Integral of the First Kind éq. (22)

22. p. 590 éq. (17.3.1)

23. pp. 537-542 Elliptic Integral of the First Kind, of the second Kind, of the third Kind et Elliptic Integral Singular Value

24. p. 73 éq. (3.8.3)

25. pp. 539-540 Elliptic Integral of the Second Kind éq. (6)

Remarque : nous avons noté l'intégrale elliptique complète de deuxième espèce E comme [20], $E(k)$ comme [3], [13] et [19]²⁶ et $\tilde{E}(m)$ alors qu'elle est notée $E(m)$ par [1] et [15]. Idem pour E' .

2.2.3 De troisième espèce

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(n, k) &\triangleq \Pi(n, \frac{\pi}{2}, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - k^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - n t^2)^{-1} [(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt \text{ ou :} \\ \tilde{\Pi}(n | m) &\triangleq \Pi(n, \frac{\pi}{2} | m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - m [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - n t^2)^{-1} [(1 - m t^2)(1 - t^2)]^{-\frac{1}{2}} dt [19]^{27} \text{ ou :} \\ \tilde{\Pi}(n \setminus \alpha) &\triangleq \Pi(n, \frac{\pi}{2} \setminus \alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{1 - n [\sin(\theta)]^2\}^{-1} \{1 - [\sin(\alpha)]^2 [\sin(\theta)]^2\}^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \int_0^1 (1 - n t^2)^{-1} (\{1 - [\sin(\alpha)]^2 t^2\} (1 - t^2))^{-\frac{1}{2}} dt [1]^{28}.\end{aligned}$$

2.2.4 Relation de Legendre

$$\begin{aligned}KE' + K'E - KK' &= K(k)E(k') + K(k')E(k) - K(k)K(k') \\ &= \tilde{K}(m)\tilde{E}(m_1) + \tilde{K}(m_1)\tilde{E}(m) - \tilde{K}(m)\tilde{K}(m_1) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

26. pp. 537-542 Elliptic Integral of the First Kind, of the second Kind, of the third Kind et Elliptic Integral Singular Value

27. p. 540 Elliptic Integral of the Third Kind éq. (3)

28. p. 599 éq. (17.7.2) pour la première expression

Chapitre 3

Les quatre fonctions thêta de Jacobi et leurs dérivées. La fonctions dzéta de Jacobi

Soit $\mathcal{H} \triangleq \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Et soit $\tau \in \mathcal{H}$. Posons :

• $q \triangleq e^{\pi i \tau}$; alors $|q| < 1$. q est dénommé "nome".

• $\theta_1 \triangleq 0$, $\theta_2 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2}$, $\theta_3 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2}$ et $\theta_4 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2}$.

Alors on démontre la célèbre relation de Jacobi $\theta_3^4 = \theta_2^4 + \theta_4^4$ [1]¹.

• $k \triangleq \frac{\theta_2}{\theta_3}$, $k' \triangleq \frac{\theta_4}{\theta_3}$, $m \triangleq k^2$ et $m_1 \triangleq k'^2$. Alors $m + m_1 = 1$.

• $K \triangleq \frac{\pi}{2} \theta_3^2$ [11]² et [13]³. Alors on démontre que $K = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x^2)(1-k^2 x^2)]^{\frac{1}{2}}}$ [3]⁴ et [20]⁵ et il s'agit bien de l'intégrale elliptique complète de première espèce définie dans le chapitre précédent.

• $K' \triangleq -i \tau K$. Alors on démontre que $K' = \int_0^1 \frac{dx}{[(1-x^2)(1-k'^2 x^2)]^{\frac{1}{2}}}$ et il s'agit bien de l'intégrale elliptique complète de première espèce définie dans le chapitre précédent. On constate alors que $q \triangleq e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ [1]⁶.

1. p. 576 éq. (16.28.5)

2. p. 1785

3. p. 27 éq. (2.2.3)

4. pp. 57-58

5. pp. 499-500

6. p. 591 éq. (17.3.17)

• $q_1 \triangleq e^{-\frac{\pi K}{k'}} [1]^7$. Alors on constate que $\ln(\frac{1}{q}) \ln(\frac{1}{q_1}) = \pi^2 [1]^8$.

• Rappel $E \triangleq \int_0^1 (\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2})^{\frac{1}{2}} dx$ et $E' \triangleq \int_0^1 (\frac{1-k'^2 x^2}{1-x^2})^{\frac{1}{2}} dx$.

3.1 Préliminaire : les quantités $Q_i; i = 1, 2, 3, 4$

On pourra consulter [3]⁹, [10]¹⁰, [11]¹¹ et [19]¹².

$$Q_1 \triangleq Q_1(q) \triangleq \prod_{l=1}^{\infty} (1 + q^{2l}) = \left(\frac{m}{2^4 m_1^{\frac{1}{2}} q} \right)^{\frac{1}{12}},$$

$$Q_2 \triangleq Q_2(q) \triangleq \prod_{l=1}^{\infty} (1 + q^{2l-1}) = \left(\frac{2^4 q}{m m_1} \right)^{\frac{1}{24}},$$

$$Q_3 \triangleq Q_3(q) \triangleq \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2l-1}) = \left(\frac{2^4 m_1^2 q}{m} \right)^{\frac{1}{24}},$$

$Q_4 \triangleq Q_4(q) \triangleq \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2l}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l(3l+1)} = \left(\frac{2^2 m m_1 K^6}{\pi^6 q} \right)^{\frac{1}{12}}$ (pour certains auteurs Q_4 est noté Q_0).

Alors $Q_1 Q_2 Q_3 = 1$ (identité d'Euler) (car $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \equiv Q_4$ de manière assez triviale) [3]¹³, [10]¹⁴, [12]¹⁵ et [19]¹⁶ et

$$Q_2^8 = 16q Q_1^8 + Q_3^8 [3]^17 \text{ et } [19]^18.$$

De plus :

$$Q_1 Q_2 = \prod_{l=1}^{\infty} (1 + q^l) = Q_1(q^{\frac{1}{2}}) [3]^19 \text{ et } [10]^20,$$

$$Q_1 Q_4 = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{4l}) = Q_4(q^2) [3]^21 \text{ et } [10]^22,$$

-
7. p. 591 éq (17.3.18)
8. p. 591 éq (17.3.19)
9. p. 63 éq. (3.1.3)
10. p. 328 Exercice 5.9
11. p. 1760 et p. 1785
12. p. 1473 Q-Function éqs. (2), (3), (4) et (5)
13. p. 64
14. p. 328 Exercice 5.9 a
15. p. 251
16. p. 945 Jacobi Identities éq. (2)
17. p. 65 (3.1.16)
18. p. 945 Jacobi Identities éq. (3)
19. p. 64 éq (3.1.5. iv)
20. p. 328 Exercice 5.9
21. p. 64 éq (3.1.5. i)
22. p. 328 Exercice 5.9

$$Q_2 Q_3 = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2(2l-1)}) = Q_3(q^2) [3]^{23} \text{ et } [10]^{24},$$

$$Q_3 Q_4 = \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l) = Q_4(q^{\frac{1}{2}}) [3]^{25} \text{ et } [10]^{26}.$$

$$\text{Alors } \theta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2 Q_4 [3]^{27}, \theta_3 = Q_2^2 Q_4 [3]^{28} \text{ et } \theta_4 = Q_3^2 Q_4 [3]^{29}.$$

3.1.1 Formule du triple produit de Jacobi

On pourra consulter [3]³⁰, [10]³¹ et [19]³².

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2l}) (1 + z^2 q^{2l-1}) (1 + z^{-2} q^{2l-1}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^{2l} q^{l^2}; z \in \mathbb{C} [19]^{33} \text{ ou}$$

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2l}) (1 + z q^{2l-1}) (1 + z^{-1} q^{2l-1}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} z^l q^{l^2}; z \in \mathbb{C} [3]^{34} \text{ et } [10]^{35}.$$

3.1.2 Identité du quintuple produit

$$\prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^l) (1 - z q^l) (1 - z^{-1} q^{l-1}) (1 - z^2 q^{2l-1}) (1 - z^{-2} q^{2l-1})$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} (z^{3l} - z^{-3l-1}) q^{\frac{l(2l+1)}{2}}; z \in \mathbb{C} [19]^{36}.$$

3.1.3 Formules de Ramanujan (1913-1914)

$$(1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \dots = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} (kk')^{-\frac{1}{12}} [19]^{37},$$

$$(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \dots = 2^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{24}} k^{-\frac{1}{12}} k'^{\frac{1}{6}} [19]^{38}.$$

-
- 23. p. 64 éq (3.1.5. iii)
 - 24. p. 328 Exercice 5.9
 - 25. p. 64 éq (3.1.5. ii)
 - 26. p. 328 Exercice 5.9
 - 27. p. 64 éq (3.1.8)
 - 28. p. 64 éq (3.1.6)
 - 29. p. 64 éq (3.1.7)
 - 30. pp. 62-63
 - 31. p. 323 Exercice 5.1
 - 32. pp. 948-949 Jacobi Triple Product
 - 33. pp. 948-949 Jacobi Triple Product éqs. (1) et (25)
 - 34. p. 62 éq. (3.1.1)
 - 35. p. 323 Exercice 5.1
 - 36. p. 1500 Quintuple Product Identity
 - 37. p. 1184 Modular Equation éq. (22)
 - 38. p. 1184 Modular Equation éq. (23)

3.2 Les quatre fonctions thêta de Jacobi

On pourra consulter [1]³⁹, [10]⁴⁰, [11]⁴¹, [13]⁴², [19]⁴³ et [20]⁴⁴.

Il y a quatre fonctions thêta de Jacobi, notées⁴⁵ $\theta_i(\cdot)$; $i = 1, 2, 3, 4$ qui dépendent de la variable complexe u et des quantités τ, q ou m . On pose :

$\theta_i(u) \triangleq \theta_i(u; \tau) \triangleq \theta_i(u, q) \triangleq \theta_i(u | m)$ et
 $\theta_i \triangleq \theta_i(0) \triangleq \theta_i(0, q)$; $i = 1, 2, 3, 4$ (les valeurs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 sont données ci-devant).

De plus on pose :

$$\lambda(u) \triangleq \lambda(u; \tau) \triangleq e^{\pi i \tau} e^{2\pi i u} \triangleq \lambda(u, q) \triangleq q e^{2\pi i u} \text{ et :}$$

$$\mu(u) \triangleq \mu(u; \tau) \triangleq e^{\frac{\pi i \tau}{4}} e^{\pi i u} \triangleq \mu(u, q) \triangleq q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i u}. \text{ Soit :}$$

$$\lambda \triangleq \lambda(0) = q \text{ et } \mu \triangleq \mu(0) = q^{\frac{1}{4}}.$$

3.2.1 Fonction $\theta_3(\cdot)$

$\theta_3(u) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2} e^{2l\pi i u} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} q^{l^2} \cos(2l\pi u)$. Alors on montre que :

$\theta_3(u) = Q_4 \prod_{l=1}^{\infty} [1 + 2q^{2l-1} \cos(2\pi u) + q^{4l-2}]$ [10]⁴⁶, [11]⁴⁷, [13]⁴⁸, [19]⁴⁹ et [20]⁵⁰.

Propriétés

La fonction $\theta_3(\cdot)$ est *paire* : $\theta_3(-u) = \theta_3(u)$.

$$\theta_3(u + 1) = \theta_3(u) \text{ et } \theta_3(u + \tau) = [\lambda(u)]^{-1} \theta_3(u) \text{ [13]}^{51}.$$

$$\theta_3 \triangleq \theta_3(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2} = Q_2^2 Q_4 = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

39. pp. 576-579 § 16.27 à 16.38

40. pp. 270-283 Ch. 5 § 2

41. pp. 529-530 134(XIV.3) partie I et pp. 1784-1785 App. A, Table 16.II

42. pp. 1-23

43. pp. 1802-1804 Theta Function

44. pp. 462-490 Ch. XXI

45. Cette notation $\theta_i(\cdot)$ des fonctions thêta évite de les confondre avec les scalaires θ_i

46. p. 279 éq. (15)

47. p. 1785

48. p. 15 éq. (1.6.25)

49. p. 1803 Theta Function éq. (32)

50. p. 469

51. p. 6 éq. (1.3.4)

$$\theta_3\left(\frac{1}{2}\right) = Q_3^2 Q_4.$$

$$\theta_3\left(\frac{\tau}{2}\right) = 2 Q_1^2 Q_4.$$

$$\theta_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0.$$

Expressions de θ_3^2

$$\theta_3^2 = \frac{2K}{\pi}.$$

$\theta_3^2 = 1 + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^l}{1+q^{2l}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction dn en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $\text{dn}(0) = 1$ (cf. ci-après)] [1] ⁵².

$\theta_3^2 = 1 + 4 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{q^{2l+1}}{1-q^{2l+1}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction dc en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $\text{dc}(0) = 1$ (cf. ci-après)] [19] ⁵³.

$\theta_3^2 = \sum_{l=0}^{\infty} r_l q^l$; avec r_l nombre de manières différentes d'écrire l sous forme de deux carrés [10] ⁵⁴.

Expressions de θ_3^4

$\theta_3^4 = -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{\theta_4(0,q)}{\theta_4(0,q)}$ [10] ⁵⁵. On en déduit :

$$\theta_3^4 = -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{Q_3^2(q)}{2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2(q)} = 1 + 8q \left[\frac{Q_1'(q)}{Q_1(q)} - \frac{Q_3'(q)}{Q_3(q)} \right] = 1 + 8 \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{2lq^{2l}}{1+q^{2l}} + \frac{(2l-1)q^{2l-1}}{1-q^{2l-1}} \right].$$

Et, on en déduit :

$$\theta_3^4 = 1 + 8 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lq^l}{1+(-1)^l q^l} [19] ⁵⁶, ou :$$

$$\theta_3^4 = 4q \left(\frac{1}{4q} - 8 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lq^{4l-1}}{1-q^{4l}} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{lq^{l-1}}{1-q^l} \right) [10] ⁵⁷.$$

On a aussi, d'après [10] :

$$\theta_3^4 = 1 + 8 \sum_{l \geq 1} \sum_{l \not\equiv 0 \pmod{4}} \frac{lq^l}{1-q^l} [10] ⁵⁸.$$

$$\theta_3^4 = 1 + 8 \sum_{l \geq 1} \sum_{l \not\equiv 0 \pmod{4}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} lq^{kl} \right) [10] ⁵⁹.$$

52. p. 591 éq. (17.3.22)

53. p. 1803 Theta Function éq. (22)

54. p. 327 Exercice 5.6 b

55. p. 281 éq. (20')

56. p. 1803 Theta Function éq. (23)

57. p. 281 et p. 327 Exercice 5.8

58. p. 327 Exercice 5.8 a

59. p. 327 Exercice 5.8 b

$\theta_3^4 = 1 + 8 \sum_{l=1}^{\infty} (\sum_{d|l} 4d) q^l$ [10]⁶⁰. Il s'agit d'une formule que Jacobi a découverte le 24 avril 1828.

Équation de la chaleur

La fonction $\theta_3(\cdot)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \theta_3(u; \tau)}{\partial u^2} = 4 \pi i \frac{\partial \theta_3(u; \tau)}{\partial \tau} \quad [11]^{61}.$$

3.2.2 Fonction $\theta_4(\cdot)$

$\theta_4(u) \triangleq \theta_3(u + \frac{1}{2})$. Soit :

$\theta_4(u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} e^{2l\pi i u} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} \cos(2l\pi u)$. Alors on montre que :

$\theta_4(u) = Q_4 \prod_{l=1}^{\infty} [1 - 2q^{2l-1} \cos(2\pi u) + q^{4l-2}]$ [10]⁶², [11]⁶³, [13]⁶⁴, [19]⁶⁵ et [20]⁶⁶.

Propriétés

La fonction $\theta_4(\cdot)$ est *paire* : $\theta_4(-u) = \theta_4(u)$.

$\theta_4(u + 1) = \theta_4(u)$ et $\theta_4(u + \tau) = -[\lambda(u)]^{-1} \theta_4(u)$ [13]⁶⁷.

$$\theta_4 \triangleq \theta_4(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} = Q_3^2 Q_4 = \left(\frac{2m_1^{\frac{1}{2}} K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\theta_4\left(\frac{1}{2}\right) = Q_2^2 Q_4.$$

$$\theta_4\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0.$$

$$\theta_4\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 2 Q_1^2 Q_4.$$

Expressions de θ_4^2

$$\theta_4^2 = \frac{2k'K}{\pi}.$$

60. p. 269 éq. (5) et p. 328 Exercice 5.8 c

61. p. 530 éq. (19) et p. 1784

62. p. 279 éq. (15)

63. p. 1785

64. p. 15 éq. (1.6.26)

65. p. 1803 Theta Function éq. (33)

66. p. 469

67. p. 6 éq. (1.3.5)

$\theta_4^2 = 1 + 4 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{q^l}{1+q^{2l}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction nd en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $nd(0) = 1$ (cf. ci-après)].

$\theta_4^2 = 1 + 4 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{q^{2l+1}}{1+q^{2l+1}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction nc en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $nc(0) = 1$ (cf. ci-après)].

$$\theta_4^2 = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l r_l q^l \text{ [10]}^{68} \text{ (voir la définition de } r_l \text{ ci-devant).}$$

Expressions de θ_4^4

$$\theta_4^4 = -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{\theta_3(0,q)}{\theta_2(0,q)} \text{ [10]}^{69}. \text{ On en déduit :}$$

$$\theta_4^4 = -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{Q_2^2(q)}{2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2(q)} = 1 + 8q \left[\frac{Q_1'(q)}{Q_1(q)} - \frac{Q_2'(q)}{Q_2(q)} \right] = 1 + 8 \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{2lq^{2l}}{1+q^{2l}} - \frac{(2l-1)q^{2l-1}}{1+q^{2l-1}} \right].$$

Équation de la chaleur

La fonction $\theta_4(\cdot)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \theta_4(u; \tau)}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta_4(u; \tau)}{\partial \tau} \text{ [11]}^{70}.$$

3.2.3 Fonction $\theta_1(\cdot)$

$\theta_1(u) \triangleq -i \mu(u) \theta_3(u + \frac{1+\tau}{2})$. Soit :

$$\begin{aligned} \theta_1(u) &= -i \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{(l+\frac{1}{2})^2} e^{(2l+1)\pi i u} \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l q^{(l+\frac{1}{2})^2} \sin[(2l+1)\pi u]. \text{ Alors on montre que :} \end{aligned}$$

$$\theta_1(u) = 2q^{\frac{1}{4}} Q_4 \sin(\pi u) \prod_{l=1}^{\infty} [1 - 2q^{2l} \cos(2\pi u) + q^{4l}] \text{ [10]}^{71}, \text{ [11]}^{72}, \text{ [13]}^{73}, \text{ [19]}^{74} \text{ et [20]}^{75}.$$

68. p. 327 Exercice 5.6 b

69. p. 281 éq. (20')

70. p. 530 éq. (19) et p. 1784

71. p. 279 éq. (15)

72. p. 1785

73. p. 15 éq. (1.6.23)

74. p. 1803 Theta Function éq. (30)

75. p. 470

Propriétés

La fonction $\theta_1(\cdot)$ est *impaire* : $\theta_1(-u) = -\theta_1(u)$.

$\theta_1(u+1) = -\theta_1(u)$ et $\theta_1(u+\tau) = -[\lambda(u)]^{-1} \theta_1(u)$ [13]⁷⁶.

$\theta_1 \triangleq \theta_1(0) = 0$.

$\theta_1(\frac{1}{2}) = 2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2 Q_4$.

$\theta_1(\frac{\tau}{2}) = iq^{-\frac{1}{4}} Q_3^2 Q_4$.

$\theta_1(\frac{1+\tau}{2}) = q^{-\frac{1}{4}} Q_2^2 Q_4$.

$\theta_1^2 = 0$.

$\theta_1^4 = 0$.

Équation de la chaleur

La fonction $\theta_1(\cdot)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \theta_1(u; \tau)}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta_1(u; \tau)}{\partial \tau} \quad [11]^{77}.$$

3.2.4 Fonction $\theta_2(\cdot)$

$\theta_2(u) \triangleq \mu(u) \theta_3(u + \frac{\tau}{2})$. Soit :

$$\begin{aligned} \theta_2(u) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} e^{(2l+1)\pi i u} \\ &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} \cos[(2l+1)\pi u]. \end{aligned}$$

Alors on montre que :

$$\theta_2(u) = 2q^{\frac{1}{4}} Q_4 \cos(\pi u) \prod_{l=1}^{\infty} [1 + 2q^{2l} \cos(2\pi u) + q^{4l}] \quad [10]^{78}, [11]^{79}, [13]^{80}, [19]^{81} \text{ et } [20]^{82}.$$

Propriétés

La fonction $\theta_2(\cdot)$ est *paire* : $\theta_2(-u) = \theta_2(u)$.

76. p. 6 éq. (1.3.2)

77. p. 530 éq. (19) et p. 1784

78. p. 279 éq. (15) mais avec une erreur

79. p. 1785

80. p. 15 éq. (1.6.24)

81. p. 1803 Theta Function éq. (31)

82. p. 470

$$\theta_2(u+1) = -\theta_2(u) \text{ et } \theta_2(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} \theta_2(u) \text{ [13] }^{83}.$$

$$\theta_2 \triangleq \theta_2(0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} = 2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2 Q_4 = \left(\frac{2m^{\frac{1}{2}}K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\theta_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\theta_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}} Q_2^2 Q_4.$$

$$\theta_2\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -iq^{-\frac{1}{4}} Q_3^2 Q_4.$$

Expressions de θ_2^2

$$\theta_2^2 = \frac{2kK}{\pi}.$$

$\theta_2^2 = 4 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l+\frac{1}{2}}}{1+q^{2l+1}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction cn en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $\text{cn}(0) = 1$ (cf. ci-après)].

$\theta_2^2 = 4 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{q^{l+\frac{1}{2}}}{1-q^{2l+1}}$ [cette propriété peut être obtenue grâce à l'expression de la fonction cd en série de cosinus (cf. ci-après) en utilisant la relation $\text{cd}(0) = 1$ (cf. ci-après)].

$\theta_2^2 = ;$ avec r_l nombre de manières différentes d'écrire l sous forme de deux carrés.

Expressions de θ_2^4

$$\theta_2^4 = -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{\theta_4(0,q)}{\theta_3(0,q)} \text{ [10] }^{84}. \text{ On en déduit :}$$

$$\begin{aligned} \theta_2^4 &= -4q \frac{\partial}{\partial q} \ln \frac{Q_3^2(q)}{Q_2^2(q)} = 8q \left[\frac{Q_2'(q)}{Q_2(q)} - \frac{Q_3'(q)}{Q_3(q)} \right] = 8 \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{(2l-1)q^{2l-1}}{1-q^{2l-1}} + \frac{(2l-1)q^{2l-1}}{1+q^{2l-1}} \right] \\ &= 16 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l-1)q^{2l-1}}{1-q^{4l-2}}. \end{aligned}$$

Équation de la chaleur

La fonction $\theta_2(\cdot)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \theta_2(u;\tau)}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta_2(u;\tau)}{\partial \tau} \text{ [11] }^{85}.$$

83. p. 6 éq. (1.3.3)

84. p. 281 éq. (20')

85. p. 530 éq. (19) et p. 1784

3.2.5 Liens entre les fonctions $\theta_i(\cdot)$; $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}\theta_1(u) &= -\theta_2(u + \frac{1}{2}) = -i \mu(u) \theta_3(u + \frac{1+\tau}{2}) = -i \mu(u) \theta_4(u + \frac{\tau}{2}) [13]^{86}, \\ \theta_2(u) &= \mu(u) \theta_3(u + \frac{\tau}{2}) = \mu(u) \theta_4(u + \frac{1+\tau}{2}) = \theta_1(u + \frac{1}{2}) [13]^{87}, \\ \theta_3(u) &= \theta_4(u + \frac{1}{2}) = \mu(u) \theta_1(u + \frac{1+\tau}{2}) = \mu(u) \theta_2(u + \frac{\tau}{2}) [13]^{88}, \\ \theta_4(u) &= -i \mu(u) \theta_1(u + \frac{\tau}{2}) = i \mu(u) \theta_2(u + \frac{1+\tau}{2}) = \theta_3(u + \frac{1}{2}) [13]^{89}.\end{aligned}$$

$$\theta_4^2 [\theta_1(u)]^2 = \theta_2^2 [\theta_3(u)]^2 - \theta_3^2 [\theta_2(u)]^2 [1]^{90}, [10]^{91} \text{ et } [13]^{92}.$$

$$\theta_4^2 [\theta_2(u)]^2 = \theta_2^2 [\theta_4(u)]^2 - \theta_3^2 [\theta_1(u)]^2 [1]^{93}, [10]^{94} \text{ et } [13]^{95}.$$

$$\theta_4^2 [\theta_3(u)]^2 = \theta_3^2 [\theta_4(u)]^2 - \theta_2^2 [\theta_1(u)]^2 [1]^{96}, [10]^{97} \text{ et } [13]^{98}.$$

$$\theta_4^2 [\theta_4(u)]^2 = \theta_3^2 [\theta_3(u)]^2 - \theta_2^2 [\theta_2(u)]^2 [1]^{99}, [10]^{100} \text{ et } [13]^{101}.$$

$$[\theta_1(u)]^4 + [\theta_3(u)]^4 = [\theta_2(u)]^4 + [\theta_4(u)]^4 [11]^{102} \text{ et } [13]^{103}.$$

3.2.6 Relations faisant intervenir l'argument double

$$\theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_1(2u) = 2 \theta_1(u) \theta_2(u) \theta_3(u) \theta_4(u) [13]^{104},$$

$$\theta_2 \theta_3^2 \theta_2(2u) = [\theta_2(u)]^2 [\theta_3(u)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_4(u)]^2,$$

$$\theta_2 \theta_4^2 \theta_2(2u) = [\theta_2(u)]^2 [\theta_4(u)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_3(u)]^2 [13]^{105},$$

$$\theta_3 \theta_4^2 \theta_3(2u) = [\theta_3(u)]^2 [\theta_4(u)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_2(u)]^2 [13]^{106},$$

86. p. 6 éq. (1.3.6)

87. p. 6 éq. (1.3.7)

88. p. 6 éq. (1.3.8)

89. p. 6 éq. (1.3.9)

90. p. 576 éq. (16.28.1)

91. p. 275 éq. (8'')

92. p. 11 éq. (1.4.52)

93. p. 576 éq. (16.28.2)

94. p. 275 éq. (8'')

95. p. 11 éq. (1.4.51)

96. p. 576 éq. (16.28.3)

97. p. 275 éq. (8'')

98. p. 11 éq. (1.4.50)

99. p. 576 éq. (16.28.4)

100. p. 275 éq. (8'')

101. p. 11 éq. (1.4.49)

102. p. 1784

103. p. 21 Exercice 6

104. p. 21 exemple 10

105. p. 21 exemple 10

106. p. 21 exemple 10

$$\begin{aligned}\theta_4^3 \theta_4(2u) &= [\theta_3(u)]^4 - [\theta_2(u)]^4 = [\theta_4(u)]^4 - [\theta_1(u)]^4 \quad [13]^{107}, \\ 2[\theta_1(u)]^2 [\theta_2(u)]^2 &= \theta_3 \theta_4 [\theta_3 \theta_4(2u) - \theta_4 \theta_3(2u)], \\ 2[\theta_3(u)]^2 [\theta_4(u)]^2 &= \theta_3 \theta_4 [\theta_4 \theta_3(2u) + \theta_3 \theta_4(2u)].\end{aligned}$$

3.2.7 Relations faisant intervenir la somme et la différence de deux arguments

$$\begin{aligned}\theta_2^2 \theta_1(u+v) \theta_1(u-v) &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_2(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_4(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_3(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{108}, \\ \theta_2^2 \theta_2(u+v) \theta_2(u-v) &= [\theta_2(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_3(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_4(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{109}, \\ \theta_2^2 \theta_3(u+v) \theta_3(u-v) &= [\theta_3(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 + [\theta_4(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_2(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 + [\theta_1(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{110}, \\ \theta_2^2 \theta_4(u+v) \theta_4(u-v) &= [\theta_4(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 + [\theta_3(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 + [\theta_2(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{111}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_3^2 \theta_1(u+v) \theta_1(u-v) &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_3(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_4(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_2(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{112}, \\ \theta_3^2 \theta_2(u+v) \theta_2(u-v) &= [\theta_2(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_4(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \\ &= [\theta_3(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{113}, \\ \theta_3^2 \theta_3(u+v) \theta_3(u-v) &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 + [\theta_3(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 \\ &= [\theta_2(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 + [\theta_4(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \quad [13]^{114}, \\ \theta_3^2 \theta_4(u+v) \theta_4(u-v) &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 + [\theta_3(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 \\ &= [\theta_2(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 + [\theta_4(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 \quad [13]^{115}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_4^2 \theta_1(u+v) \theta_1(u-v) &= [\theta_3(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_2(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 \\ &= [\theta_1(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 - [\theta_4(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \quad [13]^{116} \text{ et } [10]^{117}, \\ \theta_4^2 \theta_2(u+v) \theta_2(u-v) &= [\theta_4(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_3(v)]^2\end{aligned}$$

107. p. 21 exemple 10

108. p. 9 éq. (1.4.30)

109. p. 10 éq. (1.4.31)

110. p. 10 éq. (1.4.32)

111. p. 10 éq. (1.4.33)

112. p. 9 éq. (1.4.23)

113. p. 9 éq. (1.4.24)

114. p. 9 éq. (1.4.25)

115. p. 9 éq. (1.4.26)

116. p. 8 éq. (1.4.16)

117. p. 274 éq. (8')

$$\begin{aligned}
&= [\theta_2(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 - [\theta_3(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \quad [13]^{118} \text{ et } [10]^{119}, \\
&\quad \theta_4^2 \theta_3(u+v) \theta_3(u-v) = [\theta_4(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 \\
&= [\theta_3(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 - [\theta_2(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \quad [13]^{120} \text{ et } [10]^{121}, \\
&\quad \theta_4^2 \theta_4(u+v) \theta_4(u-v) = [\theta_3(u)]^2 [\theta_3(v)]^2 - [\theta_2(u)]^2 [\theta_2(v)]^2 \\
&= [\theta_4(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_1(v)]^2 \quad [13]^{122} \text{ et } [10]^{123}. \\
&\quad \theta_2 \theta_3 \theta_1(u+v) \theta_4(u-v) = \theta_1(u) \theta_4(u) \theta_2(v) \theta_3(v) + \theta_2(u) \theta_3(u) \theta_1(v) \theta_4(v) \\
&[13]^{124}, \\
&\quad \theta_2 \theta_3 \theta_2(u+v) \theta_3(u-v) = \theta_2(u) \theta_3(u) \theta_2(v) \theta_3(v) - \theta_1(u) \theta_4(u) \theta_1(v) \theta_4(v) \\
&[13]^{125}, \\
&\quad \theta_2 \theta_4 \theta_1(u+v) \theta_3(u-v) = \theta_1(u) \theta_3(u) \theta_2(v) \theta_4(v) + \theta_2(u) \theta_4(u) \theta_1(v) \theta_3(v) \\
&[13]^{126}, \\
&\quad \theta_2 \theta_4 \theta_2(u+v) \theta_4(u-v) = \theta_2(u) \theta_4(u) \theta_2(v) \theta_4(v) - \theta_1(u) \theta_3(u) \theta_1(v) \theta_3(v) \\
&[13]^{127}. \\
&\quad 2 \theta_3(u) \theta_3(v) \theta_4(u) \theta_4(v) = \theta_3 \theta_4 [\theta_3(u+v) \theta_4(u-v) + \theta_4(u+v) \theta_3(u-v)] \\
&[13]^{128}, \\
&\quad 2 \theta_2(u) \theta_2(v) \theta_1(u) \theta_1(v) = \theta_3 \theta_4 [\theta_4(u+v) \theta_3(u-v) - \theta_3(u+v) \theta_4(u-v)] \\
&[13]^{129}. \\
&\quad \theta_3 \theta_4 \theta_3(u+v) \theta_4(u-v) = \theta_3(u) \theta_4(u) \theta_3(v) \theta_4(v) - \theta_1(u) \theta_2(u) \theta_1(v) \theta_2(v) \\
&[13]^{130}, \\
&\quad \theta_3 \theta_4 \theta_1(u+v) \theta_2(u-v) = \theta_1(u) \theta_2(u) \theta_3(v) \theta_4(v) + \theta_3(u) \theta_4(u) \theta_1(v) \theta_2(v) \\
&[13]^{131}.
\end{aligned}$$

3.2.8 Relations faisant intervenir les “nombres” q et q^2 et les transformations de Landen

On pourra consulter [13]¹³².

-
- 118. p. 8 éq. (1.4.17)
 - 119. p. 274 éq. (8')
 - 120. p. 8 éq. (1.4.18)
 - 121. p. 274 éq. (8')
 - 122. p. 9 éq. (1.4.19)
 - 123. p. 274 éq. (8')
 - 124. p. 10 éq. (1.4.38)
 - 125. p. 10 éq. (1.4.39)
 - 126. p. 10 éq. (1.4.40)
 - 127. p. 10 éq. (1.4.41)
 - 128. p. 11 éq. (1.4.45)
 - 129. p. 11 éq. (1.4.46)
 - 130. p. 11 éq. (1.4.47)
 - 131. p. 11 éq. (1.4.48)
 - 132. pp. 17-18 § 1.8

$$\begin{aligned}
& \theta_1(u, q) \theta_2(v, q) = \theta_1(u + v, q^2) \theta_4(u - v, q^2) + \theta_4(u + v, q^2) \theta_1(u - v, q^2) \\
[13]^{133}, \\
& \theta_2(u, q) \theta_2(v, q) = \theta_2(u + v, q^2) \theta_3(u - v, q^2) + \theta_3(u + v, q^2) \theta_2(u - v, q^2) \\
[13]^{134}, \\
& \theta_3(u, q) \theta_3(v, q) = \theta_3(u + v, q^2) \theta_3(u - v, q^2) + \theta_2(u + v, q^2) \theta_2(u - v, q^2) \\
[13]^{135}, \\
& \theta_3(u, q) \theta_4(v, q) = \theta_4(u + v, q^2) \theta_4(u - v, q^2) - \theta_1(u + v, q^2) \theta_1(u - v, q^2) \\
[13]^{136}, \\
& \theta_4(u, q) \theta_4(v, q) = \theta_3(u + v, q^2) \theta_3(u - v, q^2) - \theta_2(u + v, q^2) \theta_2(u - v, q^2) \\
[13]^{137}.
\end{aligned}$$

Et donc en faisant $v = u$:

$$\begin{aligned}
& \theta_1(u, q) \theta_2(u, q) = \theta_1(2u, q^2) \theta_4(0, q^2) [13]^{138}, \\
& [\theta_2(u, q)]^2 = \theta_2(2u, q^2) \theta_3(0, q^2) + \theta_3(2u, q^2) \theta_2(0, q^2), \\
& [\theta_3(u, q)]^2 = \theta_3(2u, q^2) \theta_3(0, q^2) + \theta_2(2u, q^2) \theta_2(0, q^2) [13]^{139}, \\
& \theta_3(u, q) \theta_4(u, q) = \theta_4(2u, q^2) \theta_4(0, q^2) [13]^{140}, \\
& [\theta_4(u, q)]^2 = \theta_3(2u, q^2) \theta_3(0, q^2) - \theta_2(2u, q^2) \theta_2(0, q^2) [13]^{141}.
\end{aligned}$$

On en déduit les transformations de Landen pour les fonctions thêta :

$$\begin{aligned}
\theta_1(2u, q^2) &= \frac{\theta_1(u, q) \theta_2(u, q)}{\sqrt{\theta_3(0, q) \theta_4(0, q)}} [13]^{142}, \\
\theta_2(2u, q^2) &= \frac{[\theta_3(u, q)]^2 - [\theta_4(u, q)]^2}{\sqrt{2\{[\theta_3(0, q)]^2 - [\theta_4(0, q)]^2\}}} [13]^{143}, \\
\theta_3(2u, q^2) &= \frac{[\theta_3(u, q)]^2 + [\theta_4(u, q)]^2}{\sqrt{2\{[\theta_3(0, q)]^2 + [\theta_4(0, q)]^2\}}} [13]^{144}, \\
\theta_4(2u, q^2) &= \frac{\theta_3(u, q) \theta_4(u, q)}{\sqrt{\theta_3(0, q) \theta_4(0, q)}} [13]^{145},
\end{aligned}$$

Ces transformations sont souvent écrites avec les fonctions $\theta_i(u; \tau)$; c'est ce que fait [13]¹⁴⁶.

133. p. 8 éq. (1.4.8)
134. p. 8 éq. (1.4.9)
135. p. 8 éq. (1.4.10)
136. p. 8 éq. (1.4.11)
137. p. 8 éq. (1.4.12)
138. p. 17 éq. (1.8.1)
139. p. 17 éq. (1.8.2)
140. p. 17 éq. (1.8.3)
141. p. 17 éq. (1.8.4)
142. p. 18 éq. (1.8.8)
143. p. 18 éq. (1.8.9)
144. p. 18 éq. (1.8.10)
145. p. 18 éq. (1.8.11)
146. p. 18

3.2.9 Les transformations (imaginaires) de Jacobi

On pourra consulter [10]¹⁴⁷, [11]¹⁴⁸ et [13]¹⁴⁹.

$$\theta_1(u; \tau) = i \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi u^2}{\tau}} \theta_1\left(\frac{u}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) [10]^{150}, [11]^{151} \text{ et } [13]^{152},$$

$$\theta_2(u; \tau) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi u^2}{\tau}} \theta_4\left(\frac{u}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) [10]^{153}, [11]^{154} \text{ et } [13]^{155},$$

$$\theta_3(u; \tau) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi u^2}{\tau}} \theta_3\left(\frac{u}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) [10]^{156}, [11]^{157} \text{ et } [13]^{158},$$

$$\theta_4(u; \tau) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\pi u^2}{\tau}} \theta_2\left(\frac{u}{\tau}; -\frac{1}{\tau}\right) [10]^{159}, [11]^{160} \text{ et } [13]^{161}.$$

3.3 Les quatre fonctions $\theta'_i(\cdot); i = 1, 2, 3, 4$

3.3.1 Fonction $\theta'_1(\cdot)$

$$\theta'_1(u) = -i \mu(u) [\pi i \theta_3(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta'_3(u + \frac{1+\tau}{2})].$$

$$\theta'_1(u) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) q^{(l+\frac{1}{2})^2} \cos[(2l+1)\pi u].$$

$$\frac{\theta'_1(u)}{\theta_1(u)} = \pi [\cot(\pi u) + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l} \sin(2l\pi u)}{1-q^{2l}}] [19]^{162} \text{ et } [20]^{163}. \text{ Et aussi :}$$

$$\frac{\theta'_1(u)}{\theta_1(u)} = \pi [\cot(\pi u) + 4 \sin(2\pi u) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l}}{1-2q^{2l} \cos(2\pi u) + q^{4l}}] [20]^{164}.$$

Propriétés

La fonction $\theta'_1(\cdot)$ est *paire* : $\theta'_1(-u) = \theta'_1(u)$.

147. p. 283 éqs (24)

148. p. 530 éqs. (18)

149. pp. 15-18 § 1.7

150. p. 283 première des éqs (24)

151. p. 530 première des éqs. (18)

152. p. 17 éq. (1.7.14)

153. p. 283 quatrième des éqs (24)

154. p. 530 deuxième des éqs. (18)

155. p. 17 éqs. (1.7.13) et (1.7.15)

156. p. 283 troisième des éqs (24)

157. p. 530 troisième des éqs. (18)

158. p. 17 éqs. (1.7.10) et (1.7.12)

159. p. 283 deuxième des éqs (24)

160. p. 530 quatrième des éqs. (18)

161. p. 17 éqs. (1.7.13) et (1.7.15)

162. p. 1803 Theta Function éq. (22)

163. p. 489 Exercice 12

164. p. 489 Exercice 15

$$\theta'_1(u+1) = -\theta'_1(u) \text{ et } \theta'_1(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [2\pi i \theta_1(u) - \theta'_1(u)].$$

$$\theta'_1 \triangleq \theta'_1(0) = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) q^{(l+\frac{1}{2})^2} = 2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_4^3$$

$$= \left(\frac{2^3 m^{\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}} K^3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \text{ Et on constate que :}$$

$\theta'_1 = \pi \theta_2 \theta_3 \theta_4 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_4^3$. Il s'agit d'une relation de Poisson (1827) [1]¹⁶⁵, [11]¹⁶⁶ et [19]¹⁶⁷.

$$\theta'_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\theta'_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = \pi q^{-\frac{1}{4}} Q_3^2 Q_4.$$

$$\theta'_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -\pi i q^{-\frac{1}{4}} Q_2^2 Q_4.$$

3.3.2 Fonction $\theta'_2(\cdot)$

$$\theta'_2(u) = \mu(u) [\pi i \theta_3(u + \frac{\tau}{2}) + \theta'_3(u + \frac{\tau}{2})].$$

$$\theta'_2(u) = -2\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) q^{(l+\frac{1}{2})^2} \sin[(2l+1)\pi u].$$

$$\frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)} = \pi [-\tan(\pi u) + 4 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{2l} \sin(2l\pi u)}{1-q^{2l}}] \text{ [19]}^{168} \text{ et [20]}^{169}. \text{ Et aussi :}$$

$$\frac{\theta'_2(u)}{\theta_2(u)} = -\pi [\tan(\pi u) + 4 \sin(2\pi u) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l}}{1+2q^{2l} \cos(2\pi u) + q^{4l}}] \text{ [20]}^{170}.$$

Propriétés

La fonction $\theta'_2(\cdot)$ est *impair* : $\theta'_2(-u) = -\theta'_2(u)$.

$$\theta'_2(u+1) = -\theta'_2(u) \text{ et } \theta'_2(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [-2\pi i \theta_2(u) + \theta'_2(u)].$$

$$\theta'_2 \triangleq \theta'_2(0) = 0.$$

$$\theta'_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_4^3.$$

$$\theta'_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = -\pi i q^{-\frac{1}{4}} Q_2^2 Q_4.$$

$$\theta'_2\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -\pi q^{-\frac{1}{4}} Q_3^2 Q_4.$$

165. p. 576 16.28.6

166. p. 1784

167. p. 1803 Theta Function éq. (39)

168. p. 1803 Theta Function éq. (27)

169. p. 489 Exercice 12

170. p. 489 Exercice 15

3.3.3 Fonction $\theta'_3(\cdot)$

$$\theta'_3(u) = -4\pi \sum_{l=1}^{\infty} l q^{l^2} \sin(2l\pi u).$$

$$\frac{\theta'_3(u)}{\theta_3(u)} = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l q^l \sin(2l\pi u)}{1-q^{2l}} \quad [19]^{171} \text{ et } [20]^{172}. \text{ Et aussi :}$$

$$\frac{\theta'_3(u)}{\theta_3(u)} = -4\pi \sin(2\pi u) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l-1}}{1+2q^{2l-1} \cos(2\pi u) + q^{4l-2}} \quad [20]^{173}.$$

Propriétés

La fonction $\theta'_3(\cdot)$ est *impaire* : $\theta'_3(-u) = -\theta'_3(u)$.

$$\theta'_3(u+1) = \theta'_3(u) \text{ et } \theta'_3(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [-2\pi i \theta_3(u) + \theta'_3(u)].$$

$$\theta'_3 \triangleq \theta'_3(0) = 0.$$

$$\theta'_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\theta'_3\left(\frac{\tau}{2}\right) = -2\pi i Q_1^2 Q_4.$$

$$\theta'_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 2\pi i Q_4^3.$$

3.3.4 Fonction $\theta'_4(\cdot)$

$$\theta'_4(u) = \theta'_3\left(u + \frac{1}{2}\right).$$

$$\theta'_4(u) = -4\pi \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l q^{l^2} \sin(2l\pi u).$$

$$\frac{\theta'_4(u)}{\theta_4(u)} = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^l \sin(2l\pi u)}{1-q^{2l}} \quad [19]^{174} \text{ et } [20]^{175}. \text{ Et aussi :}$$

$$\frac{\theta'_4(u)}{\theta_4(u)} = 4\pi \sin(2\pi u) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l-1}}{1-2q^{2l-1} \cos(2\pi u) + q^{4l-2}} \quad [20]^{176}.$$

Propriétés

La fonction $\theta'_4(\cdot)$ est *impaire* : $\theta'_4(-u) = -\theta'_4(u)$.

$$\theta'_4(u+1) = \theta'_4(u) \text{ et } \theta'_4(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [2\pi i \theta_4(u) - \theta'_4(u)].$$

$$\theta'_4 \triangleq \theta'_4(0) = 0.$$

$$\theta'_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

171. p. 1803 Theta Function éq. (28)

172. p. 489 Exercice 12

173. p. 489 Exercice 15

174. p. 1803 Theta Function éq. (29)

175. p. 489 Exercice 11

176. p. 489 Exercice 15

$$\theta_4'(\frac{\tau}{2}) = 2 \pi i Q_4^3.$$

$$\theta_4'(\frac{1+\tau}{2}) = -2 \pi i Q_1^2 Q_4.$$

3.3.5 Autres relations

$$\left[\frac{\theta_2(u)}{\theta_1(u)} \right]' = -\pi \theta_2^2 \frac{\theta_3(u) \theta_4(u)}{[\theta_1(u)]^2} \quad [13]^{177}.$$

$$\left[\frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)} \right]' = -\pi \theta_3^2 \frac{\theta_2(u) \theta_4(u)}{[\theta_1(u)]^2} \quad [13]^{178}.$$

$$\left[\frac{\theta_4(u)}{\theta_1(u)} \right]' = -\pi \theta_4^2 \frac{\theta_2(u) \theta_3(u)}{[\theta_1(u)]^2} \quad [13]^{179}.$$

$$\left[\frac{\theta_1(u)}{\theta_2(u)} \right]' = \pi \theta_2^2 \frac{\theta_3(u) \theta_4(u)}{[\theta_2(u)]^2} \quad [13]^{180}.$$

$$\left[\frac{\theta_3(u)}{\theta_2(u)} \right]' = \pi \theta_4^2 \frac{\theta_1(u) \theta_4(u)}{[\theta_2(u)]^2} \quad [13]^{181}.$$

$$\left[\frac{\theta_4(u)}{\theta_2(u)} \right]' = \pi \theta_3^2 \frac{\theta_1(u) \theta_3(u)}{[\theta_2(u)]^2} \quad [13]^{182}.$$

$$\left[\frac{\theta_1(u)}{\theta_3(u)} \right]' = \pi \theta_3^2 \frac{\theta_2(u) \theta_4(u)}{[\theta_3(u)]^2} \quad [13]^{183}.$$

$$\left[\frac{\theta_2(u)}{\theta_3(u)} \right]' = -\pi \theta_4^2 \frac{\theta_1(u) \theta_4(u)}{[\theta_3(u)]^2} \quad [13]^{184}.$$

$$\left[\frac{\theta_4(u)}{\theta_3(u)} \right]' = \pi \theta_2^2 \frac{\theta_1(u) \theta_2(u)}{[\theta_3(u)]^2} \quad [13]^{185}.$$

$$\left[\frac{\theta_1(u)}{\theta_4(u)} \right]' = \pi \theta_4^2 \frac{\theta_2(u) \theta_3(u)}{[\theta_4(u)]^2} \quad [13]^{186}.$$

$$\left[\frac{\theta_2(u)}{\theta_4(u)} \right]' = -\pi \theta_3^2 \frac{\theta_1(u) \theta_3(u)}{[\theta_4(u)]^2} \quad [13]^{187}.$$

$$\left[\frac{\theta_3(u)}{\theta_4(u)} \right]' = -\pi \theta_2^2 \frac{\theta_1(u) \theta_2(u)}{[\theta_4(u)]^2} \quad [13]^{188}.$$

177. p. 20 éq. (1.9.16)

178. p. 19 éq. (1.9.14)

179. p. 19 éq. (1.9.11)

180. p. 19 éq. (1.9.10)

181. p. 20 éq. (1.9.15)

182. p. 19 éq. (1.9.12)

183. p. 19 éq. (1.9.8)

184. p. 19 éq. (1.9.9)

185. p. 20 éq. (1.9.13)

186. p. 19 éq. (1.9.3)

187. p. 19 éq. (1.9.6)

188. p. 19 éq. (1.9.7)

3.3.6 Liens entre les fonctions $\theta'_i(\cdot); i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
\theta'_1(u) &= -\theta'_2(u + \frac{1}{2}) = -i \mu(u) [\pi i \theta_3(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta'_3(u + \frac{1+\tau}{2})] \\
&= -i \mu(u) [\pi i \theta_4(u + \frac{\tau}{2}) + \theta'_4(u + \frac{\tau}{2})], \\
\theta'_2(u) &= \mu(u) [\pi i \theta_3(u + \frac{\tau}{2}) + \theta'_3(u + \frac{\tau}{2})] = \mu(u) [\pi i \theta_4(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta'_4(u + \frac{1+\tau}{2})] \\
&= \theta'_1(u + \frac{1}{2}), \\
\theta'_3(u) &= \theta'_4(u + \frac{1}{2}) = \mu(u) [\pi i \theta_1(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta'_1(u + \frac{1+\tau}{2})] \\
&= \mu(u) [\pi i \theta_2(u + \frac{\tau}{2}) + \theta'_2(u + \frac{\tau}{2})], \\
\theta'_4(u) &= -i \mu(u) [\pi i \theta_1(u + \frac{\tau}{2}) + \theta'_1(u + \frac{\tau}{2})] \\
&= i \mu(u) [\pi i \theta_2(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta'_2(u + \frac{1+\tau}{2})] = \theta'_3(u + \frac{1}{2}). \\
\theta_4^2 \theta_1(u) \theta'_1(u) &= \theta_2^2 \theta_3(u) \theta'_3(u) - \theta_3^2 \theta_2(u) \theta'_2(u), \\
\theta_4^2 \theta_2(u) \theta'_2(u) &= \theta_2^2 \theta_4(u) \theta'_4(u) - \theta_3^2 \theta_1(u) \theta'_1(u), \\
\theta_4^2 \theta_3(u) \theta'_3(u) &= \theta_3^2 \theta_4(u) \theta'_4(u) - \theta_2^2 \theta_1(u) \theta'_1(u), \\
\theta_4^2 \theta_4(u) \theta'_4(u) &= \theta_3^2 \theta_3(u) \theta'_3(u) - \theta_2^2 \theta_2(u) \theta'_2(u).
\end{aligned}$$

3.4 Les quatre fonctions $\theta''_i(\cdot); i = 1, 2, 3, 4$

3.4.1 Fonction $\theta''_1(\cdot)$

$$\theta''_1(u) = -2 \pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1)^2 q^{(l+\frac{1}{2})^2} \sin[(2l+1) \pi u].$$

Propriétés

La fonction $\theta''_1(\cdot)$ est *impaire* : $\theta''_1(-u) = -\theta''_1(u)$.

$$\theta''_1(u+1) = -\theta''_1(u) \text{ et } \theta''_1(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [4 \pi^2 \theta_1(u) + 4 \pi i \theta'_1(u) - \theta''_1(u)].$$

$$\theta''_1 \triangleq \theta''_1(0) = 0.$$

$$\theta''_1(\frac{1}{2}) = \theta''_2.$$

$$\theta''_1(\frac{\tau}{2}) = i q^{-\frac{1}{4}} (\theta''_4 - \pi^2 Q_3^2 Q_4).$$

$$\theta''_1(\frac{1+\tau}{2}) = q^{-\frac{1}{4}} (\theta''_3 - \pi^2 Q_2^2 Q_4).$$

3.4.2 Fonction $\theta''_2(\cdot)$

$$\theta''_2(u) = -2 \pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 q^{(l+\frac{1}{2})^2} \cos[(2l+1) \pi u].$$

Propriétés

La fonction $\theta''_2(\cdot)$ est *paire* : $\theta''_2(-u) = \theta''_2(u)$.

$$\begin{aligned}\theta_2''(u+1) &= -\theta_2''(u) \text{ et } \theta_2''(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [-4\pi^2 \theta_2(u) - 4\pi i \theta_2'(u) + \theta_2''(u)]. \\ \theta_2'' &\triangleq \theta_2''(0) = -2\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)^2 q^{(l+\frac{1}{2})^2} = -\pi^2 [1+8 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l}}{(1+q^{2l})^2}] \theta_2 [13]^{189}. \\ \theta_2''(\frac{1}{2}) &= 0. \\ \theta_2''(\frac{\tau}{2}) &= q^{-\frac{1}{4}} (\theta_3'' - \pi^2 Q_2^2 Q_4). \\ \theta_2''(\frac{1+\tau}{2}) &= -i q^{-\frac{1}{4}} (\theta_4'' - \pi^2 Q_3^2 Q_4).\end{aligned}$$

3.4.3 Fonction $\theta_3''(\cdot)$

$$\theta_3''(u) = -8\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 q^{l^2} \cos(2l\pi u).$$

Propriétés

La fonction $\theta_3''(\cdot)$ est *paire* : $\theta_3''(-u) = \theta_3''(u)$.

$$\theta_3''(u+1) = \theta_3''(u) \text{ et } \theta_3''(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [-4\pi^2 \theta_3(u) - 4\pi i \theta_3'(u) + \theta_3''(u)].$$

$$\theta_3'' \triangleq \theta_3''(0) = -8\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 q^{l^2} = -8\pi^2 [\sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l-1}}{(1+q^{2l-1})^2}] \theta_3 [13]^{190}.$$

$$\theta_3''(\frac{1}{2}) = \theta_4''.$$

$$\theta_3''(\frac{\tau}{2}) = q^{-\frac{1}{4}} \theta_2'' - 2\pi^2 Q_1^2 Q_4.$$

$$\theta_3''(\frac{1+\tau}{2}) = 4\pi^2 Q_4^3.$$

3.4.4 Fonction $\theta_4''(\cdot)$

$$\theta_4''(u) = -8\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l^2 q^{l^2} \cos(2l\pi u).$$

Propriétés

La fonction $\theta_4''(\cdot)$ est *paire* : $\theta_4''(-u) = \theta_4''(u)$.

$$\theta_4''(u+1) = \theta_4''(u) \text{ et } \theta_4''(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [4\pi^2 \theta_4(u) + 4\pi i \theta_4'(u) - \theta_4''(u)].$$

$$\theta_4'' \triangleq \theta_4''(0) = -8\pi^2 \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l l^2 q^{l^2} = 8\pi^2 [\sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l-1}}{(1-q^{2l-1})^2}] \theta_4 [13]^{191}.$$

$$\theta_4''(\frac{1}{2}) = \theta_3''.$$

$$\theta_4''(\frac{\tau}{2}) = 4\pi^2 Q_4^3.$$

$$\theta_4''(\frac{1+\tau}{2}) = q^{-\frac{1}{4}} \theta_2'' - 2\pi^2 Q_1^2 Q_4.$$

189. p. 22 Exercice 14

190. p. 22 Exercice 14

191. p. 22 Exercice 14

3.4.5 Liens entre les fonctions $\theta_i''(\cdot); i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}\theta_1''(u) &= -\theta_2''(u + \frac{1}{2}) = \mu(u) [\pi^2 i \theta_3(u + \frac{1+\tau}{2}) + 2 \pi \theta_3'(u + \frac{1+\tau}{2}) - i \theta_3''(u + \frac{1+\tau}{2})] \\ &= \mu(u) [\pi^2 i \theta_4(u + \frac{\tau}{2}) + 2 \pi \theta_4'(u + \frac{\tau}{2}) - i \theta_4''(u + \frac{\tau}{2})], \\ \theta_2''(u) &= \mu(u) [-\pi^2 \theta_3(u + \frac{\tau}{2}) + 2 \pi i \theta_3'(u + \frac{\tau}{2}) + \theta_3''(u + \frac{\tau}{2})] \\ &= \mu(u) [-\pi^2 \theta_4(u + \frac{1+\tau}{2}) + 2 \pi i \theta_4'(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta_4''(u + \frac{1+\tau}{2})] = \theta_1''(u + \frac{1}{2}), \\ \theta_3''(u) &= \theta_4''(u + \frac{1}{2}) = \mu(u) [-\pi^2 \theta_1(u + \frac{1+\tau}{2}) + 2 \pi i \theta_1'(u + \frac{1+\tau}{2}) + \theta_1''(u + \frac{1+\tau}{2})] \\ &= \mu(u) [-\pi^2 \theta_2(u + \frac{\tau}{2}) + 2 \pi i \theta_2'(u + \frac{\tau}{2}) + \theta_2''(u + \frac{\tau}{2})], \\ \theta_4''(u) &= \mu(u) [\pi^2 i \theta_1(u + \frac{\tau}{2}) + 2 \pi \theta_1'(u + \frac{\tau}{2}) - i \theta_1''(u + \frac{\tau}{2})] \\ &= -\mu(u) [\pi^2 i \theta_2(u + \frac{1+\tau}{2}) + 2 \pi \theta_2'(u + \frac{1+\tau}{2}) - i \theta_2''(u + \frac{1+\tau}{2})] = \theta_3''(u + \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

$$\frac{\theta_4''}{\theta_4'} - \frac{\theta_3''}{\theta_3'} = \pi^2 \theta_2^4 [13]^{192}.$$

$$\frac{\theta_4''}{\theta_4'} - \frac{\theta_2''}{\theta_2'} = \pi^2 \theta_3^4 [13]^{193}.$$

$$\frac{\theta_3''}{\theta_3'} - \frac{\theta_2''}{\theta_2'} = \pi^2 \theta_4^4 [13]^{194}.$$

3.5 La fonction $\theta_1'''(\cdot)$

$$\theta_1'''(u) = -2 \pi^3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1)^3 q^{(l+\frac{1}{2})^2} \cos[(2l+1)\pi u].$$

Propriétés

La fonction $\theta_1'''(\cdot)$ est *paire* : $\theta_1'''(-u) = \theta_1'''(u)$.

$$\theta_1'''(u+1) = -\theta_1'''(u) \text{ et}$$

$$\theta_1'''(u+\tau) = [\lambda(u)]^{-1} [-8 \pi^3 i \theta_1(u) + 12 \pi^2 \theta_1'(u) + 6 \pi i \theta_1''(u) - \theta_1'''(u)].$$

$$\theta_1''' \triangleq \theta_1'''(0) = -2 \pi^3 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1)^3 q^{(l+\frac{1}{2})^2}.$$

$$\theta_1'''(\frac{1}{2}) = 0.$$

$$\theta_1'''(\frac{\tau}{2}) = \pi q^{-\frac{1}{4}} (3 \theta_4'' - \pi^2 Q_3^2 Q_4)$$

$$\theta_1'''(\frac{1+\tau}{2}) = \pi q^{-\frac{1}{4}} i (\pi^2 Q_2^2 Q_4 - 3 \theta_3'').$$

$$\frac{\theta_1'''}{\theta_1'} = \frac{\theta_2''}{\theta_2'} + \frac{\theta_3''}{\theta_3'} + \frac{\theta_4''}{\theta_4'} = \pi^2 [24 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l}}{(1-q^{2l})^2} - 1] [11]^{195} \text{ et } [13]^{196}.$$

192. p. 22 Exercice 16 (i)

193. p. 22 Exercice 16 (ii)

194. p. 22 Exercice 16 (iii)

195. p. 1784 mais avec une erreur

196. p. 22 Exercices 13, 14 et 15

3.6 Les notations originelles de Jacobi

$$\begin{aligned}\Theta_1(u) &\triangleq \theta_3\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right) \text{ et } \theta_3(u) = \Theta_1(\pi\theta_3^2 u), \\ \Theta(u) &\triangleq \theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right) \text{ et } \theta_4(u) = \Theta(\pi\theta_3^2 u) \text{ [1]}^{197}, \\ H_1(u) &\triangleq \theta_2\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right) \text{ et } \theta_2(u) = H_1(\pi\theta_3^2 u), \\ H(u) &\triangleq \theta_1\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right) \text{ et } \theta_1(u) = H(\pi\theta_3^2 u) \text{ [1]}^{198}. \text{ On a :} \\ \Theta\left(u + \frac{\pi}{2}\theta_3^2\right) &= \Theta_1(u) \text{ [1]}^{199}, \\ H\left(u + \frac{\pi}{2}\theta_3^2\right) &= H_1(u) \text{ [1]}^{200}.\end{aligned}$$

3.7 Les notations de Neville

$$\begin{aligned}\theta_s(u) &= \frac{H(u)}{H'(0)} = \pi\theta_3^2 \frac{\theta_1\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_1'} \text{ [1]}^{201}, \\ \theta_c(u) &= \frac{H_1(u)}{H\left(\frac{\pi}{2}\theta_3^2\right)} = \frac{\theta_2\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_2} \text{ [1]}^{202}, \\ \theta_d(u) &= \frac{\Theta_1(u)}{\theta\left(\frac{\pi}{2}\theta_3^2\right)} = \frac{\theta_3\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_3} \text{ [1]}^{203}, \\ \theta_n(u) &= \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_4} \text{ [1]}^{204}.\end{aligned}$$

On a :

$$H'(u) = \frac{1}{\pi\theta_3^2} \theta_1'\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right) \text{ et } H' \triangleq H'(0) = \frac{\theta_1'}{\pi\theta_3^2}.$$

3.8 Les notations de Hermite et Weber

On pourra consulter [10]²⁰⁵.

$\theta_{\mu,\nu}(u) \triangleq \theta_{\mu,\nu}(u; \tau) \triangleq \theta_{\mu,\nu}(u, q) \triangleq \theta_{\mu,\nu}(u | m)$, avec :

$\theta_{\mu,\nu}(u) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu l} q^{l(l+\frac{\mu}{2})^2} e^{(2l+\mu)\pi i u}$; $(\mu, \nu) \in \{0, 1\}^2$. Alors :

197. p. 577 éq. (16.31.1)

198. p. 577 éq. (16.31.3)

199. p. 577 éq. (16.31.2)

200. p. 577 éq. (16.31.4)

201. p. 578 éqs. (16.36.1) et (16.36.6)

202. p. 578 éqs. (16.36.1) et (16.36.6)

203. p. 578 éqs. (16.36.2) et (16.36.7)

204. p. 578 éqs. (16.36.2) et (16.36.7)

205. p. 273 avec une erreur sur l'exposant de q et p. 279 sans erreur

$$\begin{aligned}
\theta_{0,0} &= \theta_3, \\
\theta_{0,1} &= \theta_4, \\
\theta_{1,0} &= \theta_2, \\
\theta_{1,1} &= i \theta_1. \text{ Et :} \\
\theta_{\mu,\nu}(u+1) &= (-1)^\mu \theta_{\mu,\nu}(u) \\
\theta_{\mu,\nu}(u+\tau) &= (-1)^\nu [\lambda(u)]^{-1} \theta_{\mu,\nu}(u).
\end{aligned}$$

3.8.1 Équation de la chaleur

Les fonctions $\theta_{\mu,\nu}$ vérifient l'équation aux dérivées partielles de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 \theta_{\mu,\nu}(u;\tau)}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta_{\mu,\nu}(u;\tau)}{\partial \tau}; (\mu, \nu) \in \{0, 1\}^2 \text{ [10]}^{206}.$$

3.9 La fonction dzéta de Jacobi

On pourra consulter [1]²⁰⁷, [13]²⁰⁸, [19]²⁰⁹ et [20]²¹⁰.

La fonction dzéta de Jacobi, notée Z , qui dépend de la variable complexe u et des quantités τ , q ou m , est telle que :

$$Z(u) \triangleq Z(u; \tau) \triangleq Z(u, q) \triangleq Z(u | m), \text{ avec :}$$

$Z(u) \triangleq \frac{d}{du} \{\ln[\Theta(u)]\} = \frac{d}{du} \{\ln[\theta_4(\frac{u}{\pi\theta_3^2})]\} = \frac{1}{\pi\theta_3^2} \frac{\theta_4'(\frac{u}{\pi\theta_3^2})}{\theta_4(\frac{u}{\pi\theta_3^2})} [1]^{211}$. Alors on montre que :

$$Z(u) = \frac{4}{\theta_3^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^l}{1-q^{2l}} \sin(\frac{2lu}{\theta_3^2}) [1]^{212}.$$

On constate que $Z(K) = Z(\frac{\pi}{2} \theta_3^2) = 0$ [car $\theta_4'(\frac{1}{2}) = 0$].

206. p. 280 éq. (16)
207. p. 578 § 16.34
208. pp. 65-67 § 3.6
209. pp. 949-950 Zeta Function
210. pp. 518-520 § 22-731 à 22-735
211. p. 578 éq. (16.34.4)
212. p. 595 éq. (17.4.38)

Chapitre 4

Les douze fonctions elliptiques de Jacobi, la fonction amplitude et leurs inverses

On pourra consulter [11]¹, [13]², [15], [19]³ et [20]⁴.

4.1 Les douze fonctions elliptiques de Jacobi directes

4.1.1 Les trois fonctions elliptiques de Jacobi de base

Les trois fonctions elliptiques de Jacobi de base sont les trois fonctions, qui dépendent de la variable complexe u et des quantités τ , q ou m :

$\text{cn}(u) \triangleq \text{cn}(u; \tau) \triangleq \text{cn}(u, q) \triangleq \text{cn}(u | m)$, et idem pour sn et dn , telles que :

$$\text{cn}(u) \triangleq \frac{\theta_4}{\theta_2} \frac{\theta_2(\frac{-u}{\pi \theta_3^2})}{\theta_4(\frac{-u}{\pi \theta_3^2})} [3]^5, [11]^6, [19]^7 \text{ et } [20]^8,$$

-
1. pp. 1785-1787. App. A. Table 16.III (III) Jacobi's Elliptic Functions
 2. pp. 24-29. Ch. 2. Jacobi's Elliptic Functions
 3. pp. 942-944 Jacobi Elliptic Functions. Pour les trois fonctions elliptiques de Jacobi de base
 4. pp. 491-535 Ch. XXII
 5. p. 58
 6. p. 1785
 7. p. 942 Jacobi Elliptic Functions éq. (2)
 8. p. 492 éq. (B)

$$\operatorname{sn}(u) \triangleq \frac{\theta_3}{\theta_2} \frac{\theta_1\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)} [3]^9, [11]^{10}, [19]^{11} [20]^{12},$$

$$\operatorname{dn}(u) \triangleq \frac{\theta_4}{\theta_3} \frac{\theta_3\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)}{\theta_4\left(\frac{u}{\pi\theta_3^2}\right)} [3]^{13}, [11]^{14}, [19]^{15} \text{ et } [20]^{16}.$$

4.1.2 Les neuf fonctions elliptiques de Jacobi auxiliaires

Les neuf fonctions elliptiques de Jacobi auxiliaires sont les trois fonctions, qui dépendent de la variable complexe u et des quantités τ , q ou m :

$$\operatorname{nc}(u) \triangleq \operatorname{nc}(u; \tau) \triangleq \operatorname{nc}(u, q) \triangleq \operatorname{nc}(u | m), \text{ et idem pour ns et nd et :}$$

et les six fonctions, qui dépendent de la variable complexe u et des quantités τ , q ou m :

$\operatorname{cs}(u) \triangleq \operatorname{cs}(u; \tau) \triangleq \operatorname{cs}(u, q) \triangleq \operatorname{cs}(u | m)$, et idem pour sc , cd , dc , sd et ds , telles que :

$$\operatorname{nc}(u) \triangleq \frac{1}{\operatorname{cn}(u)}, \operatorname{ns}(u) \triangleq \frac{1}{\operatorname{sn}(u)} \text{ et } \operatorname{nd}(u) \triangleq \frac{1}{\operatorname{dn}(u)} \text{ et :}$$

$$\operatorname{cs}(u) \triangleq \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}, \operatorname{sc}(u) \triangleq \frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{cn}(u)}, \operatorname{cd}(u) \triangleq \frac{\operatorname{cn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \operatorname{dc}(u) \triangleq \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{cn}(u)},$$

$$\operatorname{sd}(u) \triangleq \frac{\operatorname{sn}(u)}{\operatorname{dn}(u)}, \operatorname{ds}(u) \triangleq \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)}.$$

Remarque : ces six dernières fonctions elliptiques de Jacobi suffisent à calculer les six autres (cf. ci-après).

De plus :

$$\operatorname{cd}(u) = \operatorname{sn}(K - u), \operatorname{sd}(u) = m_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cn}(K - u) \text{ et } \operatorname{nd}(u) = m_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{dn}(K - u).$$

-
- 9. p. 58
 - 10. p. 1785
 - 11. p. 942 Jacobi Elliptic Functions éq. (1)
 - 12. p. 492 éq. (A)
 - 13. p. 58
 - 14. p. 1785
 - 15. p. 942 Jacobi Elliptic Functions éq. (3)
 - 16. p. 492 éq. (C)

4.1.3 La fonction cn

$$\begin{aligned} \text{cn}(u) &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l+\frac{1}{2}}}{1+q^{2l+1}} \cos\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \\ &= 1 - \frac{u^2}{2!} + (1+4m) \frac{u^4}{4!} - (1+44m+16m^2) \frac{u^6}{6!} + \dots [1]^{17} [15]^{18} [20]^{19}. \end{aligned}$$

Expression sous forme de produit

$$\text{cn}(u) = 2q^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{2}} k'^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1+2q^{2l} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l}}{1-2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l-2}} \right] [20]^{20} [13]^{21}.$$

Propriétés

cn est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K + 2K' i$. Elle est *paire* : $\text{cn}(-u) = \text{cn}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental²² :

- ses zéros sont K et $3K$,
- ses pôles sont $2K + K' i$

(avec le résidu $-ki = -m^{-\frac{1}{2}} i$) et $4K + K' i$ (avec le résidu $ki = m^{-\frac{1}{2}} i$).

Autres valeurs de la fonction cn , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \text{cn}(0) &= 1 \\ \text{cn}\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{\frac{1}{4}} (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{cn}(2K) &= -1 \\ \text{cn}\left(\frac{K}{2} + \frac{K'}{2} i\right) &= 2^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{4}} m_1^{\frac{1}{4}} (1 - i) \\ \text{cn}(K + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}} i \\ \text{cn}(3K + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}} i \\ \text{cn}(u \pm K) &= \mp m_1^{\frac{1}{2}} \text{sd}(u) \\ \text{cn}(u \pm 2K) &= -\text{cn}(u) \\ \text{cn}(u + K + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}} [\text{nc}(u)] i \\ \text{cn}(u + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} [\text{ds}(u)] i \\ \text{cn}(u \pm 2K' i) &= -\text{cn}(u) \\ \text{cn}(u + 2K + 2K' i) &= \text{cn}(u). \end{aligned}$$

17. p. 575 éq. (16.23.2)

18. p. 13

19. p. 511

20. p. 508 § 22.5

21. p. 24 éq. (2.1.2)

22. sur le parallélogramme fondamental signifie sur les cotés bas et gauche de ce parallélogramme

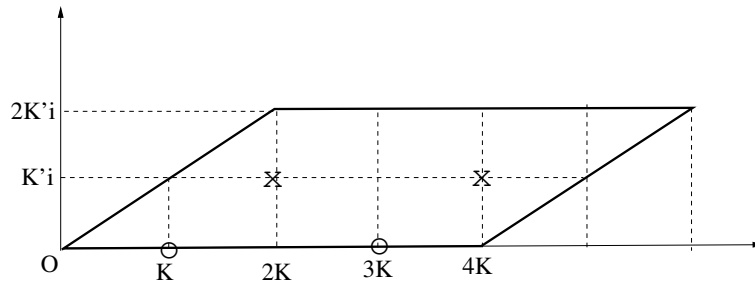


Figure 1 : fonction cn ; o =zéro et x =pôle.

$$cn(u | 0) = \cos(u) \text{ et } cn(u | 1) = \operatorname{sech}(u) [15]^{23}.$$

4.1.4 La fonction sn

$$\begin{aligned} sn(u) &= \frac{2\pi}{kK} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{l+\frac{1}{2}}}{1-q^{2l+1}} \sin\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \\ &= u - (1+m) \frac{u^3}{3!} + (1+14m+m^2) \frac{u^5}{5!} - (1+135m+135m^2+m^3) \frac{u^7}{7!} + \dots [1]^{24} \\ & [15]^{25} [20]^{26}. \end{aligned}$$

Expression sous forme de produit

$$sn(u) = 2q^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right) \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1-2q^{2l} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l}}{1-2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l-2}} \right] [20]^{27} [13]^{28}.$$

Propriétés

sn est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K'i$. Elle est *impaire* : $sn(-u) = -sn(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont 0 et $2K$,
- ses pôles sont $K'i$ (avec le résidu $k^{-1} = m^{-\frac{1}{2}}$) et $2K + K'i$ (avec le résidu $-k^{-1} = -m^{-\frac{1}{2}}$).

Autres valeurs de la fonction sn , dans ou sur le parallélogramme fondamental

-
- 23. p. 2
 - 24. p. 575 éq. (16.23.1)
 - 25. p. 13
 - 26. p. 511
 - 27. p. 508 § 22.5
 - 28. p. 24 éq. (2.1.1)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2}\right) &= (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\
\operatorname{sn}(K) &= 1 \\
\operatorname{sn}\left(\frac{K'}{2} i\right) &= m^{-\frac{1}{4}} i \\
\operatorname{sn}(K + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} \\
\operatorname{sn}(3K + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} \\
\operatorname{sn}(u \pm K) &= \pm \operatorname{cd}(u) \\
\operatorname{sn}(u \pm 2K) &= -\operatorname{sn}(u) \\
\operatorname{sn}(u + K + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} \operatorname{dc}(u) \\
\operatorname{sn}(u + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ns}(u) \\
\operatorname{sn}(u \pm 2K' i) &= \operatorname{sn}(u) \\
\operatorname{sn}(u + 2K + 2K' i) &= -\operatorname{sn}(u).
\end{aligned}$$

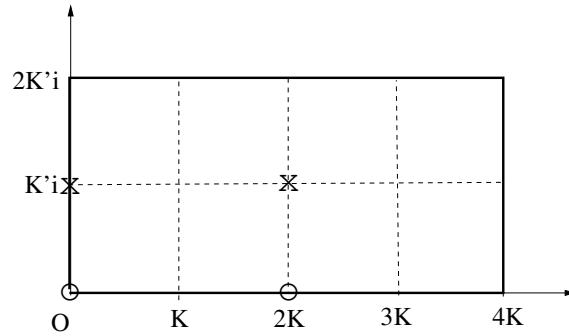


Figure 2 : fonction sn ; o=zéro et x=pôle.

$$\operatorname{sn}(u|0) = \sin(u) \text{ et } \operatorname{sn}(u|1) = \tanh(u) \text{ [15]}^{29}.$$

4.1.5 La fonction dn

$$\begin{aligned}
\operatorname{dn}(u) &= \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^l}{1+q^{2l}} \cos\left(\frac{l\pi u}{K}\right) \\
&= 1 - m \frac{u^2}{2!} + m(4+m) \frac{u^4}{4!} - m(16+44m+m^2) \frac{u^6}{6!} + \dots \text{ [1]}^{30} \text{ [13]}^{31} \text{ [15]}^{32} \text{ [20]}^{33}.
\end{aligned}$$

Expression sous forme de produit

$$\operatorname{dn}(u) = k'^{\frac{1}{2}} \prod_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1+2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l-2}}{1-2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + q^{4l-2}} \right] \text{ [20]}^{34} \text{ [13]}^{35}.$$

29. p. 2

30. p. 575 éq. (16.23.3)

31. p. 37 éq. (2.5.16)

32. p. 13

33. p. 511 exemple 1

34. p. 508 § 22.5

35. p. 24 éq. (2.1.3)

Propriétés

dn est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $2K$ et $4K'i$. Elle est *paire* : $dn(-u) = dn(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $K + K'i$ et $K + 3K'i$,
- ses pôles sont $K'i$ (avec le résidu $-i$) et $3K'i$ (avec le résidu i).

Autres valeurs de la fonction dn , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$dn(0) = 1$$

$$dn\left(\frac{K}{2}\right) = m_1^{\frac{1}{4}}$$

$$dn(K) = m_1^{\frac{1}{2}}$$

$$dn\left(\frac{K'}{2}i\right) = (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$dn(2K'i) = -1$$

$$dn(K + 2K'i) = -m_1^{\frac{1}{2}}$$

$$dn(u \pm K) = m_1^{\frac{1}{2}} nd(u)$$

$$dn(u \pm 2K) = dn(u)$$

$$dn(u + K + K'i) = m_1^{\frac{1}{2}} [sc(u)]i$$

$$dn(u + K'i) = -[cs(u)]i$$

$$dn(u \pm 2K'i) = -dn(u)$$

$$dn(u + 2K + 2K'i) = -dn(u).$$

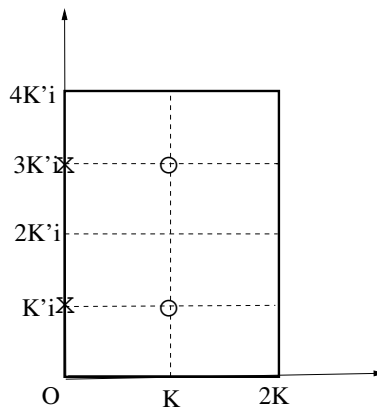


Figure 3 : fonction dn ; o=zéro et x=pôle.

$$dn(u|0) = 1 \text{ et } dn(u|1) = \operatorname{sech}(u) [15]^{36}.$$

4.1.6 La fonction cd

$$\text{cd}(u) = \frac{2\pi}{kK} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{l+\frac{1}{2}}}{1-q^{2l+1}} \cos\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{37} \text{ et } [20]^{38}.$$

cd est doublement périodique, d'ordre 2 de périodes $4K$ et $2K'i$. Elle est *paire* : $\text{cd}(-u) = \text{cd}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses *zéros* sont K et $3K$,
- ses *pôles* sont $K + K'i$ et $3K + K'i$.

Autres valeurs de la fonction cd , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \text{cd}(0) &= 1 \\ \text{cd}\left(\frac{K}{2}\right) &= (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{cd}(2K) &= -1 \\ \text{cd}\left(\frac{K'}{2}i\right) &= m^{-\frac{1}{4}} \\ \text{cd}(K'i) &= m^{-\frac{1}{2}} \\ \text{cd}(2K + K'i) &= -m^{-\frac{1}{2}} \\ \text{cd}(u \pm K) &= \mp \text{sn}(u) \\ \text{cd}(u \pm 2K) &= -\text{cd}(u) \\ \text{cd}(u + K + K'i) &= -m^{-\frac{1}{2}} \text{ns}(u) \\ \text{cd}(u + K'i) &= m^{-\frac{1}{2}} \text{dc}(u) \\ \text{cd}(u \pm 2K'i) &= \text{cd}(u) \\ \text{cd}(u + 2K + 2K'i) &= -\text{cd}(u). \end{aligned}$$

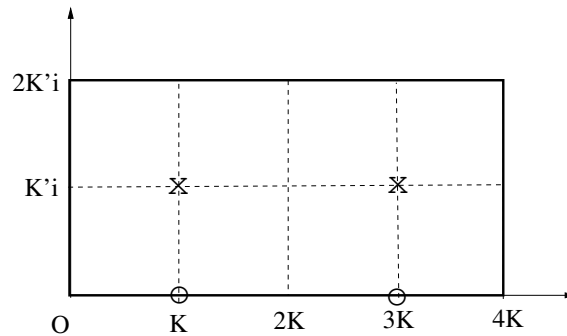


Figure 4 : fonction cd ; o=zéro et x=pôle.

37. p. 575 éq. (16.23.4)

38. p. 511

4.1.7 La fonction sd

$$\text{sd}(u) = \frac{2\pi}{kk'K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{l+\frac{1}{2}}}{1+q^{2l+1}} \sin\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{39} \text{ et } [20]^{40}.$$

sd est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K + 2K' i$. Elle est *impaire* : $\text{sd}(-u) = -\text{sd}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont 0 et $2K$,
- ses pôles sont $K + K' i$ et $3K + K' i$.

Autres valeurs de la fonction sd , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \text{sd}\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{-\frac{1}{4}} (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{sd}(K) &= m_1^{-\frac{1}{2}} \\ \text{sd}\left(\frac{K}{2} + \frac{K'}{2} i\right) &= 2^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{1}{4}} m_1^{-\frac{1}{4}} (1 + i) \\ \text{sd}(2K + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} i \\ \text{sd}(4K + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} i \\ \text{sd}(u \pm K) &= \pm m_1^{-\frac{1}{2}} \text{cn}(u) \\ \text{sd}(u \pm 2K) &= -\text{sd}(u) \\ \text{sd}(u + K + K' i) &= -m^{-\frac{1}{2}} m_1^{-\frac{1}{2}} [\text{ds}(u)] i \\ \text{sd}(u + K' i) &= m^{-\frac{1}{2}} [\text{nc}(u)] i \\ \text{sd}(u \pm 2K' i) &= -\text{sd}(u) \\ \text{sd}(u + 2K + 2K' i) &= \text{sd}(u). \end{aligned}$$

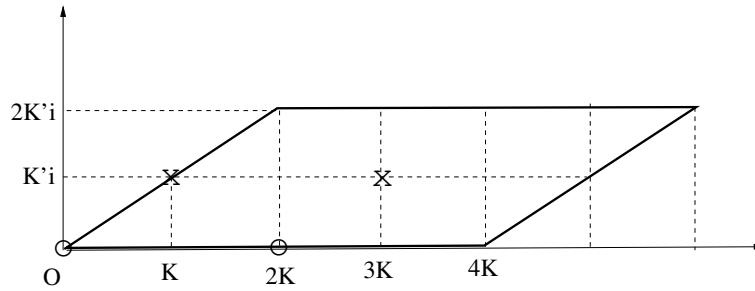


Figure 5 : fonction sd ; o =zéro et x =pôle.

39. p. 575 éq. (16.23.5)

40. p. 511

4.1.8 La fonction nd

$$\text{nd}(u) = \frac{\pi}{2k'K} + \frac{2\pi}{k'K} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l q^l}{1+q^{2l}} \cos\left(\frac{l\pi u}{K}\right) [1]^{41} \text{ et } [20]^{42}.$$

nd est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $2K$ et $4K'i$. Elle est *paire* : $\text{nd}(-u) = \text{nd}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $K'i$ et $3K'i$,
- ses pôles sont $K + K'i$ et $K + 3K'i$.

Autres valeurs de la fonction nd , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \text{nd}(0) &= 1 \\ \text{nd}\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{-\frac{1}{4}} \\ \text{nd}(K) &= m_1^{-\frac{1}{2}} \\ \text{nd}(2K) &= 1 \\ \text{nd}\left(\frac{K'}{2}i\right) &= (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \\ \text{nd}(2K'i) &= -1 \\ \text{nd}(K + 2K'i) &= -m_1^{-\frac{1}{2}} \\ \text{nd}(u \pm K) &= m_1^{-\frac{1}{2}} \text{dn}(u) \\ \text{nd}(u \pm 2K) &= \text{nd}(u) \\ \text{nd}(u + K + K'i) &= -m_1^{-\frac{1}{2}} [\text{cs}(u)]i \\ \text{nd}(u + K'i) &= [\text{sc}(u)]i \\ \text{nd}(u \pm 2K'i) &= -\text{nd}(u) \\ \text{nd}(u + 2K + 2K'i) &= -\text{nd}(u). \end{aligned}$$

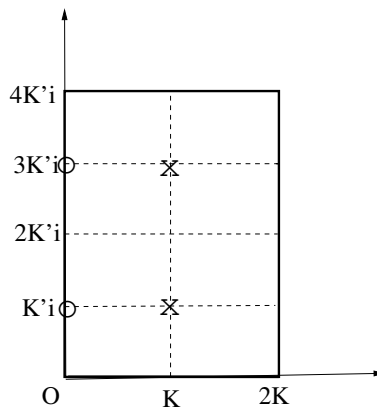


Figure 6 : fonction nd ; o=zéro et x=pôle.

41. p. 575 éq. (16.23.6)

42. p. 511

4.1.9 La fonction dc

$$dc(u) = \frac{\pi}{2K} \sec\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + \frac{2\pi}{K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{2l+1}}{1-q^{2l+1}} \cos\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{43} \text{ et } [20]^{44}.$$

dc est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K'i$. Elle est *paire* : $dc(-u) = dc(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $K + K'i$ et $3K + K'i$,
- ses pôles sont K et $3K$.

Autres valeurs de la fonction dc , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} dc(0) &= 1 \\ dc\left(\frac{K}{2}\right) &= \left(1 + m_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ dc(2K) &= -1 \\ dc\left(\frac{K'}{2}i\right) &= m^{\frac{1}{4}} \\ dc(K'i) &= m^{\frac{1}{2}} \\ dc(2K + K'i) &= -m^{\frac{1}{2}} \\ dc(u \pm K) &= \mp ns(u) \\ dc(u \pm 2K) &= -dc(u) \\ dc(u + K + K'i) &= -m^{\frac{1}{2}} sn(u) \\ dc(u + K'i) &= m^{\frac{1}{2}} cd(u) \\ dc(u \pm 2K'i) &= dc(u) \\ dc(u + 2K + 2K'i) &= -dc(u). \end{aligned}$$

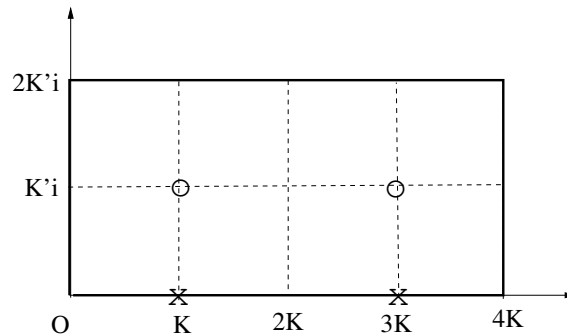


Figure 7 : fonction dc ; o=zéro et x=pôle.

43. p. 575 éq. (16.23.7)

44. p. 512

4.1.10 La fonction nc

$$\operatorname{nc}(u) = \frac{\pi}{2K'K} \sec\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K'K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{2l+1}}{1+q^{2l+1}} \cos\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{45} \text{ et } [20]^{46}.$$

nc est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K + 2K'i$. Elle est *paire* : $\operatorname{nc}(-u) = \operatorname{nc}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $2K + K'i$ et $4K + K'i$,
- ses pôles sont K et $3K$.

Autres valeurs de la fonction nc , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\operatorname{nc}(0) = 1$$

$$\operatorname{nc}\left(\frac{K}{2}\right) = m_1^{-\frac{1}{4}} \left(1 + m_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\operatorname{nc}(2K) = -1$$

$$\operatorname{nc}\left(\frac{K}{2} + \frac{K'}{2}i\right) = 2^{-\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{4}} m_1^{-\frac{1}{4}} (1 + i)$$

$$\operatorname{nc}(K + K'i) = m_1^{\frac{1}{2}} m_1^{-\frac{1}{2}} i$$

$$\operatorname{nc}(3K + K'i) = -m_1^{\frac{1}{2}} m_1^{-\frac{1}{2}} i$$

$$\operatorname{nc}(u \pm K) = \mp m_1^{-\frac{1}{2}} \operatorname{ds}(u)$$

$$\operatorname{nc}(u \pm 2K) = -\operatorname{nc}(u)$$

$$\operatorname{nc}(u + K + K'i) = m_1^{\frac{1}{2}} m_1^{-\frac{1}{2}} [\operatorname{cn}(u)] i$$

$$\operatorname{nc}(u + K'i) = m_1^{\frac{1}{2}} [\operatorname{sd}(u)] i$$

$$\operatorname{nc}(u \pm 2K'i) = -\operatorname{nc}(u)$$

$$\operatorname{nc}(u + 2K + 2K'i) = \operatorname{nc}(u).$$

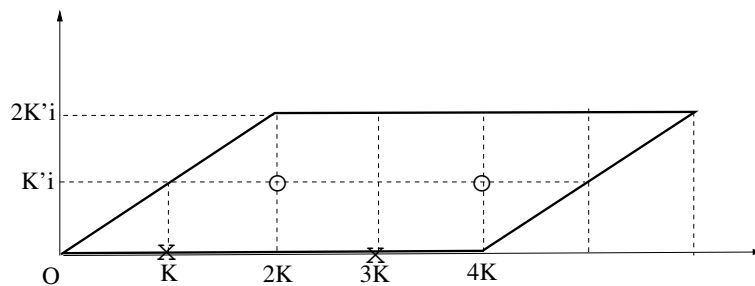


Figure 8 : fonction nc ; o=zéro et x=pôle.

45. p. 575 éq. (16.23.8)

46. p. 512

4.1.11 La fonction sc

$$sc(u) = \frac{\pi}{2k'K} \tan\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + \frac{2\pi}{k'K} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l q^{2l}}{1+q^{2l}} \sin\left(\frac{l\pi u}{K}\right) [1]^{47} \text{ et } [20]^{48}.$$

sc est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $2K$ et $4K'i$. Elle est *impaire* : $sc(-u) = -sc(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont 0 et $2K'i$,
- ses pôles sont K et $K + 2K'i$.

Autres valeurs de la fonction sc , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} sc\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{-\frac{1}{4}} \\ sc\left(\frac{K'}{2}i\right) &= (1 + m_1^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} i \\ sc(K'i) &= i \\ sc(K + K'i) &= m_1^{-\frac{1}{2}} i \\ sc(K + 3K'i) &= -m_1^{-\frac{1}{2}} i \\ sc(u \pm K) &= \mp m_1^{-\frac{1}{2}} cs(u) \\ sc(u \pm 2K) &= sc(u) \\ sc(u + K + K'i) &= m_1^{-\frac{1}{2}} [dn(u)] i \\ sc(u + K'i) &= [nd(u)] i \\ sc(u \pm 2K'i) &= -sc(u) \\ sc(u + 2K + 2K'i) &= -sc(u). \end{aligned}$$

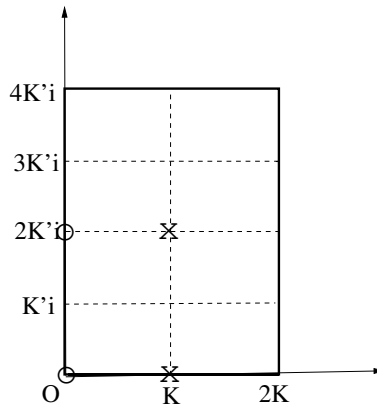


Figure 9 : fonction sc ; o=zéro et x=pôle.

47. p. 575 éq. (16.23.9)

48. p. 512

4.1.12 La fonction ns

$$\operatorname{ns}(u) = \frac{\pi}{2K} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) + \frac{2\pi}{K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{2l+1}}{1-q^{2l+1}} \sin\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{49} \text{ et } [20]^{50}.$$

ns est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K'i$. Elle est *impaire* : $\operatorname{ns}(-u) = -\operatorname{ns}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $K'i$ et $2K + K'i$,
- ses pôles sont 0 et $2K$.

Autres valeurs de la fonction ns , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \operatorname{ns}\left(\frac{K}{2}\right) &= \left(1 + m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{ns}(K) &= 1 \\ \operatorname{ns}\left(\frac{K'}{2}i\right) &= -m^{\frac{1}{4}}i \\ \operatorname{ns}(K + K'i) &= m^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{ns}(3K + K'i) &= -m^{\frac{1}{2}} \\ \operatorname{ns}(u \pm K) &= \pm \operatorname{dc}(u) \\ \operatorname{ns}(u \pm 2K) &= -\operatorname{ns}(u) \\ \operatorname{ns}(u + K + K'i) &= m^{\frac{1}{2}} \operatorname{cd}(u) \\ \operatorname{ns}(u + K'i) &= m^{\frac{1}{2}} \operatorname{sn}(u) \\ \operatorname{ns}(u \pm 2K'i) &= \operatorname{ns}(u) \\ \operatorname{ns}(u + 2K + 2K'i) &= -\operatorname{ns}(u). \end{aligned}$$

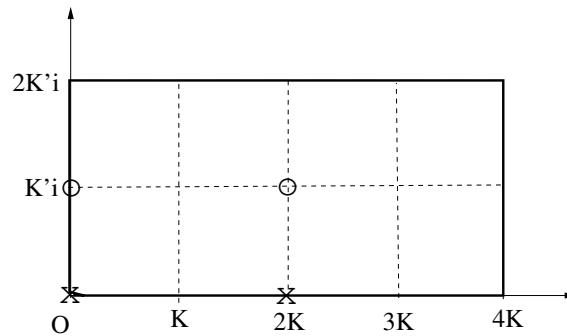


Figure 10 : fonction ns ; o=zéro et x=pôle.

49. p. 575 éq. (16.23.10) avec une erreur de signe

50. p. 512

4.1.13 La fonction ds

$$ds(u) = \frac{\pi}{2K} \operatorname{csc}\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q^{2l+1}}{1+q^{2l+1}} \sin\left[\frac{(2l+1)\pi u}{2K}\right] \quad [1]^{51} \text{ et } [20]^{52}.$$

ds est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $4K$ et $2K + 2K' i$. Elle est *impaire* : $ds(-u) = -ds(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont $K + K' i$ et $3K + K' i$,
- ses pôles sont 0 et $2K$.

Autres valeurs de la fonction ds , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} ds\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{\frac{1}{4}} \left(1 + m_1^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ ds(K) &= m_1^{\frac{1}{2}} \\ ds\left(\frac{K}{2} + \frac{K'}{2} i\right) &= 2^{-\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{4}} m_1^{\frac{1}{4}} (1 - i) \\ ds(2K + K' i) &= m_1^{\frac{1}{2}} i \\ ds(4K + K' i) &= -m_1^{\frac{1}{2}} i \\ ds(u \pm K) &= \pm m_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{nc}(u) \\ ds(u \pm 2K) &= -ds(u) \\ ds(u + K + K' i) &= m_1^{\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{4}} [\operatorname{sd}(u)] i \\ ds(u + K' i) &= -m_1^{\frac{1}{2}} [\operatorname{cn}(u)] i \\ ds(u \pm 2K' i) &= -ds(u) \\ ds(u + 2K + 2K' i) &= ds(u). \end{aligned}$$

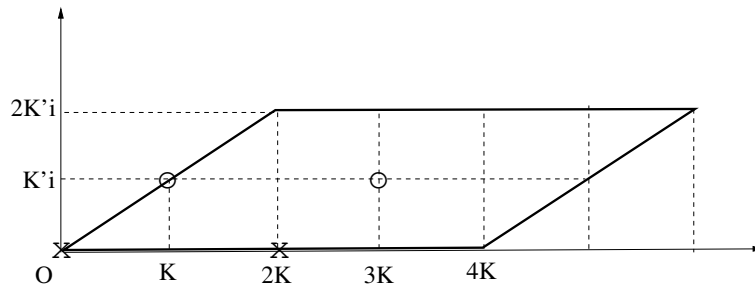


Figure 11 : fonction ds ; o=zéro et x=pôle.

51. p. 575 éq. (16.23.11)

52. p. 512

4.1.14 La fonction cs

$$\operatorname{cs}(u) = \frac{\pi}{2K} \cot\left(\frac{\pi u}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{q^{2l}}{1+q^{2l}} \sin\left(\frac{l\pi u}{K}\right) [1]^{53} \text{ et } [20]^{54}.$$

cs est doublement périodique, d'ordre 2, de périodes $2K$ et $4K'i$. Elle est *impaire* : $\operatorname{cs}(-u) = -\operatorname{cs}(u)$. Dans ou sur le parallélogramme fondamental :

- ses zéros sont K et $K + 2K'i$,
- ses pôles sont 0 et $2K'i$.

Autres valeurs de la fonction cs , dans ou sur le parallélogramme fondamental

$$\begin{aligned} \operatorname{cs}\left(\frac{K}{2}\right) &= m_1^{\frac{1}{4}} \\ \operatorname{cs}\left(\frac{K'}{2}i\right) &= -(1+m_1^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}i \\ \operatorname{cs}(K'i) &= -i \\ \operatorname{cs}(K+K'i) &= -m_1^{\frac{1}{2}}i \\ \operatorname{cs}(K+3K'i) &= m_1^{\frac{1}{2}}i \\ \operatorname{cs}(u \pm K) &= \mp m_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{sc}(u) \\ \operatorname{cs}(u \pm 2K) &= \operatorname{cs}(u) \\ \operatorname{cs}(u + K + K'i) &= -m_1^{\frac{1}{2}} [\operatorname{nd}(u)]i \\ \operatorname{cs}(u + K'i) &= -[\operatorname{dn}(u)]i \\ \operatorname{cs}(u \pm 2K'i) &= -\operatorname{cs}(u) \\ \operatorname{cs}(u + 2K + 2K'i) &= -\operatorname{cs}(u). \end{aligned}$$

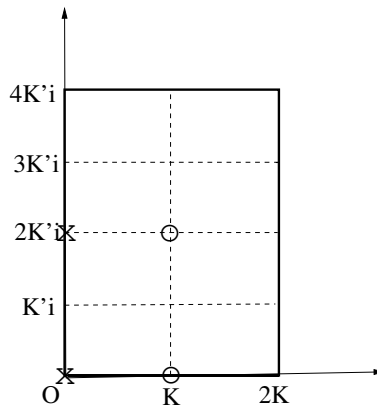


Figure 12 : fonction cs ; o=zéro et x=pôle.

53. p. 575 éq. (16.23.12)

54. p. 512

4.1.15 Relations entre les carrés des fonctions jacobiennes

On pourra consulter [15]⁵⁵.

$$\begin{aligned}
 [\operatorname{cn}(u)]^2 + [\operatorname{sn}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{dn}(u)]^2 - m [\operatorname{cn}(u)]^2 &= m_1 \\
 [\operatorname{dn}(u)]^2 + m [\operatorname{sn}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{ns}(u)]^2 - [\operatorname{cs}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{ds}(u)]^2 - [\operatorname{cs}(u)]^2 &= m_1 \\
 [\operatorname{ns}(u)]^2 - [\operatorname{ds}(u)]^2 &= m \\
 [\operatorname{cd}(u)]^2 + m_1 [\operatorname{sd}(u)]^2 &= 1 \\
 m [\operatorname{cd}(u)]^2 + m_1 [\operatorname{nd}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{nd}(u)]^2 - m [\operatorname{sd}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{nc}(u)]^2 - [\operatorname{sc}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{dc}(u)]^2 - m_1 [\operatorname{nc}(u)]^2 &= m \\
 [\operatorname{dc}(u)]^2 - m_1 [\operatorname{sc}(u)]^2 &= 1 \\
 [\operatorname{cn}(u)]^2 &= \frac{1}{1+[\operatorname{sc}(u)]^2} = \frac{m_1}{[\operatorname{dc}(u)]^2 - m} \\
 [\operatorname{sn}(u)]^2 &= \frac{1}{1+[\operatorname{cs}(u)]^2} = \frac{1}{m+[\operatorname{ds}(u)]^2} \\
 [\operatorname{dn}(u)]^2 &= \frac{1}{m+[\operatorname{sd}(u)]^2} = \frac{m_1}{1-m[\operatorname{cd}(u)]^2}
 \end{aligned}$$

4.1.16 Arguments doubles et moitiés

On pourra consulter [15]⁵⁶.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cn}(2u) &= \frac{[\operatorname{cn}(u)]^2 - [\operatorname{sn}(u)]^2 [\operatorname{dn}(u)]^2}{1 - m \operatorname{sn}^4(u)} = \frac{[\operatorname{cn}(u)]^2 - [\operatorname{sn}(u)]^2 [\operatorname{dn}(u)]^2}{[\operatorname{cn}(u)]^2 + [\operatorname{sn}(u)]^2 [\operatorname{dn}(u)]^2} \\
 \operatorname{sn}(2u) &= \frac{2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u)}{1 - m \operatorname{sn}^4(u)} = \frac{2 \operatorname{cn}(u) \operatorname{sn}(u) \operatorname{dn}(u)}{[\operatorname{cn}(u)]^2 + [\operatorname{sn}(u)]^2 [\operatorname{dn}(u)]^2} \\
 \operatorname{dn}(2u) &= \frac{[\operatorname{dn}(u)]^2 - m [\operatorname{cn}(u)]^2 [\operatorname{sn}(u)]^2}{1 - m \operatorname{sn}^4(u)} = \frac{[\operatorname{dn}(u)]^2 + [\operatorname{cn}(u)]^2 [[\operatorname{dn}(u)]^2 - 1]}{[\operatorname{dn}(u)]^2 - [\operatorname{cn}(u)]^2 [[\operatorname{dn}(u)]^2 - 1]} \\
 \frac{1 - \operatorname{cn}(2u)}{1 + \operatorname{cn}(2u)} &= \frac{[\operatorname{sn}(u)]^2 [\operatorname{dn}(u)]^2}{[\operatorname{cn}(u)]^2} \\
 \frac{1 - \operatorname{dn}(2u)}{1 + \operatorname{dn}(2u)} &= \frac{m [\operatorname{cn}(u)]^2 [\operatorname{sn}(u)]^2}{[\operatorname{dn}(u)]^2} \\
 \left[\operatorname{cn}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 &= \frac{\operatorname{cn}(u) + \operatorname{dn}(u)}{1 + \operatorname{dn}(u)} \\
 \left[\operatorname{sn}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 &= \frac{1 - \operatorname{cn}(u)}{1 + \operatorname{dn}(u)} \\
 \left[\operatorname{dn}\left(\frac{u}{2}\right)\right]^2 &= \frac{m_1 + m \operatorname{cn}(u) + \operatorname{dn}(u)}{1 + \operatorname{dn}(u)}
 \end{aligned}$$

55. pp. 16-17

56. pp. 17-18

4.1.17 Théorèmes d'addition

On pourra consulter [15]⁵⁷.

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{cn}(v)-\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(v)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v)+\operatorname{sn}(v)\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn}(u)\operatorname{dn}(v)-m\operatorname{cn}(u)\operatorname{sn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{sn}(v)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) &= \frac{[\operatorname{cn}(u)]^2-[\operatorname{sn}(v)]^2[\operatorname{dn}(u)]^2}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{cn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) &= \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u)\operatorname{cn}(v)\operatorname{dn}(v)-m_1\operatorname{sn}(u)\operatorname{sn}(v)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) &= \frac{\operatorname{cn}(u)\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(v)+\operatorname{cn}(v)\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(u)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) &= \frac{[\operatorname{sn}(u)]^2-[\operatorname{sn}(v)]^2}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) &= \frac{\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u)\operatorname{cn}(v)+\operatorname{sn}(v)\operatorname{dn}(v)\operatorname{cn}(u)}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \\ \operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) &= \frac{[\operatorname{dn}(u)]^2-m[\operatorname{cn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2}{1-m[\operatorname{sn}(u)]^2[\operatorname{sn}(v)]^2} \end{aligned}$$

4.1.18 Dérivées

On pourra consulter [1]⁵⁸ et [15]⁵⁹.

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \operatorname{cn}(u) &= -\operatorname{sn}(u)\operatorname{dn}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u) &= \operatorname{cn}(u)\operatorname{dn}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{dn}(u) &= -m\operatorname{cn}(u)\operatorname{sn}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{cd}(u) &= -m_1\operatorname{sd}(u)\operatorname{nd}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{sd}(u) &= \operatorname{cd}(u)\operatorname{nd}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{nd}(u) &= m\operatorname{cd}(u)\operatorname{sd}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{dc}(u) &= m_1\operatorname{nc}(u)\operatorname{sc}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{nc}(u) &= \operatorname{dc}(u)\operatorname{sc}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{sc}(u) &= \operatorname{dc}(u)\operatorname{nc}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{ns}(u) &= -\operatorname{ds}(u)\operatorname{cs}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{ds}(u) &= -\operatorname{ns}(u)\operatorname{cs}(u), \\ \frac{d}{du} \operatorname{cs}(u) &= -\operatorname{ns}(u)\operatorname{ds}(u). \end{aligned}$$

57. p. 18

58. p. 574 § 16.16

59. p. 22

4.1.19 Intégrales

On pourra consulter [1]⁶⁰ et [15]⁶¹.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cn}(u) du &= m^{-\frac{1}{2}} \cos^{-1}[\operatorname{dn}(u)], \\ \int \operatorname{sn}(u) du &= m^{-\frac{1}{2}} \ln[\operatorname{dn}(u) - m^{\frac{1}{2}} \operatorname{cn}(u)], \\ \int \operatorname{dn}(u) du &= \sin^{-1}[\operatorname{sn}(u)], \\ \int \operatorname{cd}(u) du &= m^{-\frac{1}{2}} \ln[\operatorname{nd}(u) + m^{\frac{1}{2}} \operatorname{sd}(u)], \\ \int \operatorname{sd}(u) du &= (m m_1)^{-\frac{1}{2}} \sin^{-1}[-m^{\frac{1}{2}} \operatorname{cd}(u)], \\ \int \operatorname{nd}(u) du &= m_1^{-\frac{1}{2}} \cos^{-1}[\operatorname{cd}(u)], \\ \int \operatorname{dc}(u) du &= \ln[\operatorname{nc}(u) + \operatorname{sc}(u)], \\ \int \operatorname{nc}(u) du &= m_1^{-\frac{1}{2}} \ln[\operatorname{dc}(u) + m_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{sc}(u)], \\ \int \operatorname{sc}(u) du &= m_1^{-\frac{1}{2}} \ln[\operatorname{dc}(u) + m_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{nc}(u)], \\ \int \operatorname{ns}(u) du &= \ln[\operatorname{ds}(u) - \operatorname{cs}(u)], \\ \int \operatorname{ds}(u) du &= \ln[\operatorname{ns}(u) - \operatorname{cs}(u)], \\ \int \operatorname{cs}(u) du &= \ln[\operatorname{ns}(u) - \operatorname{ds}(u)]. \end{aligned}$$

4.1.20 Arguments complexes

On pourra consulter [15]⁶²

$$\operatorname{cn}(i y | m) = \operatorname{nc}(y | m_1), \operatorname{sn}(i y | m) = \operatorname{sc}(y | m_1) i \text{ et } \operatorname{dn}(i y | m) = \operatorname{dc}(y | m_1).$$

Si $u = x + i y$, en posant :

$$c = \operatorname{cn}(x | m), s = \operatorname{sn}(x | m) \text{ et } d = \operatorname{dn}(x | m) \text{ et :}$$

$$c_1 = \operatorname{cn}(y | m), s_1 = \operatorname{sn}(y | m) \text{ et } d_1 = \operatorname{dn}(y | m) \text{ on a :}$$

$$\operatorname{cn}(u | m) = \frac{c c_1 - i s d s_1 d_1}{c_1^2 + m s^2 s_1^2},$$

$$\operatorname{sn}(u | m) = \frac{s d_1 + i c d s_1 c_1}{c_1^2 + m s^2 s_1^2},$$

$$\operatorname{dn}(u | m) = \frac{d c_1 d_1 - i m s c s_1}{c_1^2 + m s^2 s_1^2}.$$

60. p. 575 éqs. (16.24.1) à (16.24.12)

61. p. 25

62. p. 21

4.2 La fonction amplitude de Jacobi et son inverse

On pourra consulter [1]⁶³, [11]⁶⁴, [13]⁶⁵ et [19]⁶⁶.

4.2.1 La fonction amplitude directe

$\text{am}(u) \triangleq \text{am}(u; \tau) \triangleq \text{am}(u, q) \triangleq \text{am}(u | m)$ est telle que :

$$\text{am}(u) = \int_0^u \text{dn}(t) dt \quad [13]^{67} \text{ soit :}$$

$$\frac{d}{du} \text{am}(u) = \text{dn}(u) \quad [13]^{68}. \text{ On a :}$$

$$\text{am}(u) = \frac{\pi u}{2K} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2q^l \sin(\frac{l\pi u}{K})}{l(1+q^{2l})} \quad [1]^{69} \text{ et } [11]^{70}.$$

En particulier $\text{am}(K) = \frac{\pi}{2}$, $\text{am}(2K) = \pi$, ... [13]⁷¹.

L'angle φ , donné par la fonction amplitude de Jacobi am :

$\varphi \triangleq \text{am}(u)$, est appelé amplitude de Jacobi [1]⁷². On a :

$$\varphi = \arcsin[\text{sn}(u)] \quad [1]^{73}.$$

4.2.2 La fonction amplitude inverse

On a $u = \text{am}^{-1}(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m[\sin(\theta)]^2}} \quad [1]^{74}$, et :

$$\text{cn}(u) = \cos(\varphi) = \cos[\text{am}(u)] \quad [1]^{75} \text{ et } [13]^{76},$$

$$\text{sn}(u) = \sin(\varphi) = \sin[\text{am}(u)] \quad [1]^{77} \text{ et } [13]^{78} \text{ et :}$$

63. p. 569 éqs. (16.1.3) et (16.1.4), p. 589 éq. (17.2.5) et p. 590 éq. (17.2.17)

64. pp. 1786-1787 (5) Amplitude

65. p. 41

66. p. 41 Amplitude

67. p. 41 éq. (2. 7. 14)

68. p. 41 éq. (2. 7. 15)

69. p. 591 éq. (17.3.24)

70. p. 1787

71. p. 41

72. p. 569 éq. (16.1.4) et p. 590 éq. (17.2.17)

73. p. 590 éq. (17.2.17)

74. p. 569 éq. (16.1.3)

75. p. 569 éq. (16.1.5)

76. p. 41 éq. (2. 7. 17)

77. p. 569 éq. (16.1.5)

78. p. 41 éq. (2. 7. 16)

$$\operatorname{dn}(u) = \{1 - m [\sin(\varphi)]^2\}^{\frac{1}{2}} [1]^{79}.$$

4.2.3 La fonction de Gudermann et son inverse

On pourra consulter [1]⁸⁰, [11]⁸¹, [19]⁸² et [21]⁸³.

La fonction de Gudermann directe

La fonction de Gudermannn directe, notée gd , ou parfois γ est telle que :

$\operatorname{gd}(u) \triangleq \operatorname{am}(u | 1)$ [11]⁸⁴. On a donc :

$$\operatorname{gd}(u) = \int_0^u \operatorname{sech}(t) dt ; \text{ donc } \operatorname{gd}(0) = 0 \text{ et } \operatorname{gd}(\infty) = \frac{\pi}{2}. \text{ Soit}$$

$$\frac{d}{du} \operatorname{gd}(u) = \operatorname{sech}(u) [19]^{85}. \text{ De plus on a :}$$

$\operatorname{gd}(u) = \arcsin[\tanh(u)]$ ou $\operatorname{gd}(u) = \arctan[\sinh(u)]$, de même que les identités [21]⁸⁶

$$\begin{aligned} \sin[\operatorname{gd}(u)] &= \tanh(u), \quad \csc[\operatorname{gd}(u)] = \coth(u), \\ \cos[\operatorname{gd}(u)] &= \operatorname{sech}(u), \quad \sec[\operatorname{gd}(u)] = \cosh(u), \\ \tan[\operatorname{gd}(u)] &= \sinh(u), \quad \cot[\operatorname{gd}(u)] = \operatorname{csch}(u) \text{ et} \\ \tan\left[\frac{1}{2} \operatorname{gd}(u)\right] &= \tanh\left(\frac{1}{2} u\right). \end{aligned}$$

La fonction de Gudermann inverse

On a :

$\operatorname{gd}^{-1}(\varphi) = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$ [19]⁸⁷ ou $\operatorname{gd}^{-1}(\varphi) = \ln[\sec(\varphi) + \tan(\varphi)]$ [19]⁸⁸.
Soit :

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{gd}^{-1}(\varphi) = \sec(\varphi) [19]^{89}.$$

79. p. 569 éq. (16.1.5)

80. p. 574 mais où est-elle définie ?

81. p. 1787

82. p. 778 Gudermannian Function

83. Fonction de Gudermann et Gudermannian Function

84. p. 1787

85. p. 778 Gudermannian Function éq. (3)

86. Gudermannian Function

87. p. 778 Gudermannian Function éq. (1)

88. p. 778 Gudermannian Function éq. (2)

89. p. 778 Gudermannian Function éq. (4)

4.3 Liens entre les douze fonctions elliptiques de Jacobi et les quatre fonctions thêta de Jacobi, leurs dérivées et la fonction dzêta de Jacobi

$$\frac{\text{cn}(u) \text{dn}(u)}{\text{sn}(u)} = \frac{1}{\pi \theta_3^2} \frac{\theta_1'(\frac{u}{2K})}{\theta_1(\frac{-u}{\pi \theta_3^2})} - Z(u) [1]^{90},$$

$$\frac{\text{dn}(u) \text{sn}(u)}{\text{cn}(u)} = Z(u) - \frac{1}{\pi \theta_3^2} \frac{\theta_2'(\frac{u}{2K})}{\theta_2(\frac{-u}{\pi \theta_3^2})} [1]^{91},$$

$$\frac{\text{sn}(u) \text{cn}(u)}{\text{dn}(u)} = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\pi \theta_3^2} \frac{\theta_3'(\frac{u}{2K})}{\theta_3(\frac{-u}{\pi \theta_3^2})} - Z(u) \right] [1]^{92}.$$

4.4 La fonction epsilon de Jacobi

On pourra consulter [1], [13]⁹³.

La fonction epsilon de Jacobi, notée \mathcal{E} , qui dépend de la variable complexe u et des quantités τ, q ou m est telle que :

$$\mathcal{E}(u) \triangleq \mathcal{E}(u; \tau) \triangleq \mathcal{E}(u, q) \triangleq \mathcal{E}(u | m), \text{ avec } \mathcal{E}(u) \triangleq \int_0^u [\text{dn}(v)]^2 dv [13]^{94}.$$

Soient $x = \text{sn}(v)$; $v \in (0, u)$ et $y = \text{sn}(u)$; $x \in (0, y)$. On a :

$$dx = \text{cn}(v) \text{dn}(v) dv, \text{ cn}(v) = (1 - [\text{sn}(v)]^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \\ [\text{dn}(v)]^2 = 1 - k^2 [\text{sn}(v)]^2 = 1 - k^2 x^2 \text{ et donc :}$$

$$\mathcal{E}(u) = \int_0^{\text{sn}(u)} \left(\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx [13]^{95}. \text{ Et comme } \text{sn}(K) = 1 \text{ on a } \mathcal{E}(K) = E.$$

En dérivant deux fois, par rapport à v , la relation :

$$\theta_4^2 \theta_4(u+v) \theta_4(u-v) = [\theta_4(u)]^2 [\theta_4(v)]^2 - [\theta_1(u)]^2 [\theta_1(v)]^2, \text{ puis en faisant } v = 0 \text{ on obtient :}$$

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\theta_4'(u)}{\theta_4(u)} \right] = \frac{\theta_4''}{\theta_4} - \frac{\theta_1'^2}{\theta_4^2} \left[\frac{\theta_1(u)}{\theta_4(u)} \right]^2 = \frac{\theta_4''}{\theta_4} - \pi^2 \theta_2^4 [\text{sn}(\pi \theta_3^2 u)]^2 [13]^{96}.$$

Comme $[\text{dn}(u)]^2 + m [\text{sn}(u)]^2 = 1$, avec $m = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}$ on en déduit :

90. p. 578 éq. (16.34.1)
 91. p. 578 éq. (16.34.2)
 92. p. 578 éq. (16.34.3)
 93. pp. 60-67 § 3.4, 3.5 et 3.6
 94. p. 62 éq. (3.4.25)
 95. p. 62 éq. (3.4.25)
 96. p. 63 éq. (3.5.1)

$[\operatorname{dn}(u)]^2 = 1 - \frac{\theta_4''}{\pi^2 \theta_3^4 \theta_4} + \frac{1}{\pi \theta_3^2} \frac{d}{du} \left[\frac{\theta_4'(\frac{u}{\pi \theta_3^2})}{\theta_4(\frac{u}{\pi \theta_3^2})} \right]$ [13]⁹⁷. Et par conséquent :

$\mathcal{E}(u) \triangleq \int_0^u [\operatorname{dn}(v)]^2 dv = \left(1 - \frac{\theta_4''}{\pi^2 \theta_3^4 \theta_4}\right) u + \frac{1}{\pi \theta_3^2} \frac{\theta_4'(\frac{u}{\pi \theta_3^2})}{\theta_4(\frac{u}{\pi \theta_3^2})}$. Soit :

$\mathcal{E}(u) = \left(1 - \frac{\theta_4''}{\pi^2 \theta_3^4 \theta_4}\right) u + Z(u)$. Mais :

$Z(K) = 0$ et $\mathcal{E}(K) = E$ et par conséquent :

$1 - \frac{\theta_4''}{\pi^2 \theta_3^4 \theta_4} = \frac{E}{K}$ [13]⁹⁸ et :

$\mathcal{E}(u) = \frac{E}{K} u + Z(u)$ [13]⁹⁹.

4.5 Les douze fonctions inverses des douze fonctions elliptiques de Jacobi

On pourra consulter [1]¹⁰⁰ et [15]¹⁰¹ et l'Annexe A.

Ce sont les douze fonctions cn^{-1} , sn^{-1} , dn^{-1} , cd^{-1} , sd^{-1} , nd^{-1} , dc^{-1} , nc^{-1} , sc^{-1} , ns^{-1} , ds^{-1} , cs^{-1} , qui sont, en fait, des intégrales elliptiques de première espèce.

Modèle : $y = \operatorname{cn}(u) \longleftrightarrow u = \operatorname{cn}^{-1}(y)$.

Précisément :

$\operatorname{cn}^{-1}\left(y \middle| \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \int_{by}^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} : 0 < y < 1$ [1]¹⁰²,

$\operatorname{sn}^{-1}\left(y \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) = a \int_0^{by} \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} ; y < 1 < \frac{a}{b}$ [1]¹⁰³,

$\operatorname{dn}^{-1}\left(y \middle| \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = a \int_{ay}^a \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : \frac{b}{a} < y < 1$ [1]¹⁰⁴,

$\operatorname{cd}^{-1}\left(y \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) = a \int_{by}^b \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} ; y < 1 < \frac{a}{b}$ [1]¹⁰⁵,

97. p. 63 éq. (3.5.2)

98. p. 63 éq. (3.5.5)

99. p. 65 éq. (3.6.1)

100. p. 596 éqs. (17.4.41) à (17.4.52)

101. pp. 26-27

102. p. 596 éq. (17.4.52)

103. p. 596 éq. (17.4.45)

104. p. 596 éq. (17.4.44)

105. p. 596 éq. (17.4.46)

$$\text{sd}^{-1}\left(y\left|\frac{b^2}{a^2+b^2}\right.\right) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{aby}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} : 0 < y < \frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}}{ab} [1]^{106},$$

$$\text{nd}^{-1}\left(y\left|\frac{a^2-b^2}{a^2}\right.\right) = a \int_b^{by} \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : 1 < y < \frac{a}{b} [1]^{107},$$

$$\text{dc}^{-1}\left(y\left|\frac{b^2}{a^2}\right.\right) = a \int_a^{ay} \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : \frac{b}{a} < 1 < y [1]^{108},$$

$$\text{nc}^{-1}\left(y\left|\frac{a^2}{a^2+b^2}\right.\right) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \int_b^{by} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : 1 < y [1]^{109},$$

$$\text{sc}^{-1}\left(y\left|\frac{a^2-b^2}{a^2}\right.\right) = a \int_0^{by} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{\frac{1}{2}}} : b < a [1]^{110},$$

$$\text{ns}^{-1}\left(y\left|\frac{b^2}{a^2}\right.\right) = a \int_{ay}^{\infty} \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : \frac{b}{a} < 1 < y [1]^{111},$$

$$\text{ds}^{-1}\left(y\left|\frac{a^2}{a^2+b^2}\right.\right) = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \int_{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}y}^{\infty} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} : 0 < \frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} < y [1]^{112},$$

$$\text{cs}^{-1}\left(y\left|\frac{a^2-b^2}{a^2}\right.\right) = a \int_{ay}^{\infty} \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{\frac{1}{2}}} : b < a [1]^{113}.$$

106. p. 596 éq. (17.4.51)

107. p. 596 éq. (17.4.43)

108. p. 596 éq. (17.4.47)

109. p. 596 éq. (17.4.49)

110. p. 596 éq. (17.4.41)

111. p. 596 éq. (17.4.48)

112. p. 596 éq. (17.4.50)

113. p. 596 éq. (17.4.42)

Chapitre 5

Réseaux de points complexes et séries d'Eisenstein

5.1 Réseaux de points complexes

Soient $\gamma_1 = 2\omega_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma_2 = 2\omega_2 \in \mathbb{C}$ et $\gamma_3 = 2\omega_3 \in \mathbb{C}$ des nombres complexes *donnés* tels que $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ (et par conséquent $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$) et tels que :

$$\tau \triangleq \frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{\omega_3}{\omega_1} \in \mathcal{H}.$$

Nous considérons alors le *réseau* Γ de points complexes tel que :

$$\Gamma \triangleq \Gamma(\gamma_1, \gamma_3) \triangleq \mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_3 \triangleq \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma = n\gamma_1 + p\gamma_3; (n, p) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

On pose également $\sum'_{\gamma \in \Gamma} \triangleq \sum_{\gamma \in \Gamma - \{0\}}$, $\sum'_{n,p} \triangleq \sum_{(n,p) \in \mathbb{Z}^2; (n,p) \neq (0,0)}$ et $\prod'_{n,p} \triangleq \prod_{(n,p) \in \mathbb{Z}^2; (n,p) \neq (0,0)}$.

5.2 Séries d'Eisenstein

On pourra consulter [10]¹, [11]², [12], [16]³, [17]⁴ et [19]⁵.

Soit $G_l(\Gamma) \triangleq G_l(\gamma_1, \gamma_3) \triangleq \sum'_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{\gamma^{2l}} \triangleq \sum'_{n,p} \frac{1}{(n\gamma_1 + p\gamma_3)^{2l}}$; avec $l \geq 2$ la série

-
1. pp. 88-90 Ch. 2 § 6
 2. p. 1787
 3. pp.136-139 Ch. VII § 2.3
 4. pp. 13-18 § 2.1 et 2.2
 5. p. 515 Eisenstein Series

d'Eisenstein d'indice l [16]⁶, ou d'indice $2l$ [10]⁷. Alors :

$$G_l(\Gamma) = G_l(1, \tau) \gamma_1^{-2l} = 2^{-2l} G_l(1, \tau) \omega_1^{-2l}.$$

On pose alors, par abus de notation :

$$G_l(\tau) = G_l(1, \tau) = \sum'_{n,p} \frac{1}{(n+p\tau)^{2l}}. \text{ De plus on pose :}$$

$$g_2(\Gamma) \triangleq g_2(\gamma_1, \gamma_3) \triangleq 2^2 3 5 G_2(\Gamma) = 2^2 3 5 G_2(\tau) \gamma_1^{-4} = 2^{-2} 3 5 G_2(\tau) \omega_1^{-4} \text{ et :}$$

$$g_3(\Gamma) \triangleq g_3(\gamma_1, \gamma_3) \triangleq 2^2 5 7 G_3(\Gamma) = 2^2 5 7 G_3(\tau) \gamma_1^{-6} = 2^{-4} 5 7 G_3(\tau) \omega_1^{-6}. \text{ Et,}$$

pour la suite :

$$\Delta(\Gamma) \triangleq [g_2(\Gamma)]^3 - 3^3 [g_3(\Gamma)]^2 = 2^4 3^3 5^2 \{2^2 5 [G_2(\tau)]^3 - 7^2 [G_3(\tau)]^2\} \gamma_1^{-12}$$

$$= 2^{-8} 3^3 5^2 \{2^2 5 [G_2(\tau)]^3 - 7^2 [G_3(\tau)]^2\} \omega_1^{-12}.$$

Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur le réseau Γ on écrit plus simplement :

$$g_2 \triangleq 2^2 3 5 G_2 = 2^2 3 5 G_2(\tau) \gamma_1^{-4} = 2^{-2} 3 5 G_2(\tau) \omega_1^{-4},$$

$$g_3 \triangleq 2^2 5 7 G_3 = 2^2 5 7 G_3(\tau) \gamma_1^{-6} = 2^{-4} 5 7 G_3(\tau) \omega_1^{-6} \text{ et :}$$

$$\Delta \triangleq g_2^3 - 3^3 g_3^2 = 2^4 3^3 5^2 \{2^2 5 [G_2(\tau)]^3 - 7^2 [G_3(\tau)]^2\} \gamma_1^{-12}$$

$$= 2^{-8} 3^3 5^2 \{2^2 5 [G_2(\tau)]^3 - 7^2 [G_3(\tau)]^2\} \omega_1^{-12}.$$

La fonction G_l est partout holomorphe dans \mathcal{H} (y compris à l'infini) et :

$$\lim_{\Im(\tau) \rightarrow \infty} G_l(\tau) = 2 \zeta(2l) \text{ où } \zeta \text{ est la fonction de Riemann [16]}^8.$$

De plus soit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbb{Z} telles que $ad - bc = 1$. Alors on vérifie aisément que :

$$G_l(\tau) = (c\tau + d)^{-2l} G_l\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$

et on dit que la fonction G_l est *faiblement modulaire* de poids $2l$ [16]⁹. En fait G_l est une *forme modulaire* de poids $2l$ [16]¹⁰ (toujours pour $l \geq 2$).

En particulier :

$$\diamond T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et on en déduit que } G_l(\tau + 1) = G_l(\tau).$$

$$\diamond S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et on en déduit que } G_l\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{2l} G_l(\tau).$$

6. p. 136

7. p. 88

8. p. 137

9. p. 131 Définition 2

10. p. 137 Proposition 4

On déduit de ces relations que, par exemple :

◇ $G_l(i) = (-1)^l G_l(i)$; soit $G_3(i) = G_5(i) = G_7(i) = \dots = 0$. Et :

◇ $G_l(-j^2) = j^{2l} G_l(j)$ et $G_l(j) = G_l(-j^2 - 1) = G_l(-j^2) = j^{2l} G_l(j)$; soit $G_l(j) = 0$, sauf si l est un multiple de 3 [et, en particulier $G_2(j) = 0$] ($j \triangleq e^{\frac{2\pi i}{3}}$).

En fait on démontre que :

$$G_2(i) = 2^{-6} 3^{-1} 5^{-1} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 = 3,15121200\dots \text{ et :}$$

$$G_3(j) = 2^{-8} 5^{-1} 7^{-1} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{18} = 5,86303169\dots,$$

où Γ est la fonction d'Euler.

Chapitre 6

Les fonctions elliptiques de troisième espèce

Une fonction elliptique de troisième espèce est une fonction f , méromorphe sur \mathbb{C} , qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ :

$f(u) \triangleq f(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq f(u; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$f(u + \gamma_i) = e^{a_i u + b_i} f(u)$; $a_i \in \mathbb{C}$; $b_i \in \mathbb{C}$; $\forall u \in \mathbb{C}$; $i = 1, 3$ [11]¹.

Elle n'est donc pas, à strictement parler, une fonction elliptique.

C'est la raison pour laquelle γ_i ; $i = 1, 3$ est qualifiée de quasi-période [12], [19] et [20] ou pseudo-période [11].

On constate alors que la définition précédente est également valable pour $i = 2$, avec $a_2 = -(a_1 + a_3)$ et $b_2 = a_2 \gamma_2 - a_1 \gamma_3 - b_1 - b_3 \bmod(2 \pi i)$ ou $b_2 = a_2 \gamma_2 - a_3 \gamma_1 - b_3 - b_1 \bmod(2 \pi i)$.

6.1 La fonction sigma de Weierstrass

On pourra consulter [1]², [11]³, [12]⁴, [19]⁵ et [20]⁶.

-
1. p. 529 134(XIV-3) Elliptic Functions. Partie H. éq. (15)
 2. pp. 629-683 Ch. 18
 3. p. 528, mais il y a une erreur dans la définition et p. 1788 App A, Table 17. (3)
 4. pp. 239-243 § 1. The sigma and zeta functions
 5. pp. 1934-1935 Weierstrass Sigma Function
 6. pp. 447-448 § 20.42 surtout et pp. 429-490 Ch. XX et XXI

6.1.1 Définition

La fonction sigma de Weierstrass est la fonction méromorphe, notée σ , qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ :

$\sigma(u) \triangleq \sigma(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \sigma(u; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$\sigma(u) \triangleq \frac{2\omega_1}{\theta_1} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \theta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$ [1]⁷, [11]⁸ et [13]⁹, où le paramètre η_1 est tel que $\sigma''' \triangleq \sigma'''(0) = 0$; il va être calculé.

La fonction sigma de Weierstrass est effectivement une fonction elliptique de troisième espèce car si l'on pose :

$\eta_3 \triangleq \frac{\eta_1 \omega_3}{\omega_1} - \frac{\pi i}{2\omega_1}$ [11]¹⁰ [13]¹¹ on vérifie que :

$\sigma(u + \gamma_1) = e^{a_1 u + b_1} \sigma(u)$ et $\sigma(u + \gamma_3) = e^{a_3 u + b_3} \sigma(u)$, avec :

$a_1 = 2\eta_1$ et $b_1 = 2\eta_1 \omega_1 + \pi i \pmod{2\pi i}$ et :

$a_3 = 2\eta_3$ et $b_3 = 2\eta_3 \omega_3 + \pi i \pmod{2\pi i}$ [11]¹².

De plus si l'on pose :

$\eta_2 \triangleq -(\eta_1 + \eta_3)$ [13]¹³ on vérifie que l'on a les trois relations de Legendre [11]¹⁴, [12]¹⁵ et [19]¹⁶ :

$$\begin{aligned} \eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 &= \frac{\pi i}{2} \\ \eta_2 \omega_1 - \eta_1 \omega_2 &= \frac{\pi i}{2} \\ \eta_3 \omega_2 - \eta_2 \omega_3 &= \frac{\pi i}{2}. \end{aligned}$$

Et alors $\sigma(u + \gamma_2) = e^{a_2 u + b_2} \sigma(u)$, avec :

$a_2 = 2\eta_2$ et $b_2 = 2\eta_2 \omega_2 + \pi i \pmod{2\pi i}$.

-
- 7. p. 650 éq. (18.10.8)
 - 8. p. 1788
 - 9. p. 150 éq. (6.2.9)
 - 10. p. 528 éq. (8)
 - 11. p. 150 éq. (6.2.8)
 - 12. p. 528 éq. (5)
 - 13. p. 151 éq. (6.2.15)
 - 14. p. 1788
 - 15. pp. 241-242
 - 16. p. 1935 Weierstrass Zeta Function éq. (6)

6.1.2 Calcul des trois premières dérivées de la fonction sigma de Weierstrass

On trouve :

$$\sigma'(u) = \frac{1}{\theta_1'} [2 \eta_1 u \theta_1(\frac{u}{2\omega_1}) + \theta_1'(\frac{u}{2\omega_1})] e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$$

$$\sigma''(u) = \frac{1}{2\omega_1 \theta_1'} [4 \eta_1 (\eta_1 u^2 + \omega_1) \theta_1(\frac{u}{2\omega_1}) + 4 \eta_1 u \theta_1'(\frac{u}{2\omega_1}) + \theta_1''(\frac{u}{2\omega_1})] e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$$

$$\begin{aligned} \sigma'''(u) &= \frac{1}{4\omega_1^2 \theta_1'} [8 \eta_1^2 u (\eta_1 u^2 + 3\omega_1) \theta_1(\frac{u}{2\omega_1}) + 12 \eta_1 (\eta_1 u^2 + \omega_1) \theta_1'(\frac{u}{2\omega_1}) \\ &+ 6 \eta_1 u \theta_1''(\frac{u}{2\omega_1}) + \theta_1'''(\frac{u}{2\omega_1})] e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sigma \triangleq \sigma(0) = 0$$

$$\sigma' \triangleq \sigma'(0) = 1$$

$$\sigma'' \triangleq \sigma''(0) = 0$$

$$\sigma''' \triangleq \sigma'''(0) = \frac{12 \eta_1 \omega_1 \theta_1' + \theta_1'''}{4 \omega_1^2 \theta_1'} = 0 \text{ et par conséquent } \eta_1 = -\frac{\theta_1'''}{12 \omega_1 \theta_1'} \quad [11]^{17}$$

[13]¹⁸ [20]¹⁹.

6.1.3 Propriétés de la fonction sigma de Weierstrass

- $\sigma(u) = u \prod_{m,n} (1 - \frac{u}{\gamma}) e^{\frac{u}{\gamma} + \frac{u^2}{2\gamma^2}}$ [12]²⁰

- σ est méromorphe sur \mathbb{C} .

- σ est Γ -quasi-périodique :

$$\sigma(u + 2n\omega_1 + 2p\omega_3) = (-1)^{n+p+np} e^{(2n\eta_1 + 2p\eta_3)(u + n\omega_1 + p\omega_3)} \sigma(u) \quad [1]^{21}, [11]^{22} \text{ et } [20]^{23}.$$

- σ est impaire : $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ [11]²⁴.

- Développement en série de Laurent :

17. p. 1787

18. p. 150 éq. (6.2.7)

19. p. 473 § 21-43

20. p. 239

21. p. 631 éqs. (18.2.20) et (18.2.21)

22. p. 1788

23. p. 448 exemple 1

24. p. 1788

$$\sigma(u) = u - \frac{g_2}{2^4 3^5} u^5 - \frac{g_3}{2^3 3^5 7} u^7 - \frac{g_2^2}{2^9 3^2 5^7} u^9 - \dots [11]^{25}.$$

Le développement en série de Laurent est donné en toute généralité par [1]²⁶.

$$\bullet \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi Q_4^2} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sin\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) \prod_{l=1}^{\infty} [1 - 2q^{2l} \cos\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + q^{4l}] [13]^{27} \text{ et } [20]^{28}.$$

$$\bullet \sigma(u+v)\sigma(u-v) = [\sigma(u)]^2 [\sigma_1(v)]^2 - [\sigma_1(u)]^2 [\sigma(v)]^2 [13]^{29},$$

$$\sigma(u+v)\sigma(u-v) = [\sigma(u)]^2 [\sigma_2(v)]^2 - [\sigma_2(u)]^2 [\sigma(v)]^2 [13]^{30},$$

$$\sigma(u+v)\sigma(u-v) = [\sigma(u)]^2 [\sigma_3(v)]^2 - [\sigma_3(u)]^2 [\sigma(v)]^2 [13]^{31}.$$

$$\bullet \sigma(u+v)\sigma(u-v)\sigma(x+y)\sigma(x-y)$$

$$+ \sigma(v+x)\sigma(v-x)\sigma(u+y)\sigma(u-y)$$

$$+ \sigma(x+u)\sigma(x-u)\sigma(v+y)\sigma(v-y) = 0 [13]^{32}.$$

6.1.4 Homogénéité

$$\sigma(vu | v\omega_1, v\omega_3) = \sigma(vu; v^{-4}g_2, v^{-6}g_3)$$

$$= v\sigma(u | \omega_1, \omega_3) = v\sigma(u; g_2, g_3); \forall v \in \mathbb{C} [1]^{33}.$$

Mais attention :

$$\sigma(vu) \triangleq \sigma(vu | \omega_1, \omega_3) \triangleq \sigma(vu; g_2, g_3) \neq v\sigma(u) \triangleq v\sigma(u | \omega_1, \omega_3)$$

$$\triangleq v\sigma(u; g_2, g_3).$$

6.2 Les fonctions cosigma de Weierstrass

On pourra consulter [11]³⁴, [13]³⁵, [19]³⁶ et [20]³⁷.

25. p. 1788
26. pp. 635-636 éqs. (18.5.6), (18.5.7) et (18.5.8)
27. p. 154 éq. (6.5.2)
28. p. 473 § 21-43
29. p. 153 éq. (6.4.1)
30. p. 153 éq. (6.4.1)
31. p. 153 éq. (6.4.1)
32. p. 153 éq. (6.4.6)
33. p. 631 éqs. (18.2.4) et (18.2.15)
34. p. 529 134(XIV.3) Elliptic Functions. Partie R. éq. (16) et p. 1788 (avec une erreur de signe)
35. p. 151
36. p. 1935 Weierstrass Sigma Functions éq. (6)
37. p. 448

6.2.1 Définition

Les fonctions cosigma de Weierstrass sont les fonctions méromorphes, notées σ_i ; $i = 1, 2, 3$, qui dépendent de la variable complexe u et du réseau Γ :

$\sigma_i(u) \triangleq \sigma_i(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \sigma_i(u; g_2, g_3)$; elle sont telles que :

$$\sigma_i(u) = e^{-\eta_i u} \frac{\sigma(u+\omega_i)}{\sigma(\omega_i)} = -e^{\eta_i u} \frac{\sigma(u-\omega_i)}{\sigma(\omega_i)}; i = 1, 2, 3 \text{ [13]}^{38}.$$

Les fonctions cosigma sont effectivement des fonctions elliptiques de troisième espèce car :

$$\sigma_i(u + \gamma_j) = e^{a_j u + b_j} \sigma_i(u); i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, \text{ avec :}$$

$$a_j = 2\eta_j \text{ et } b_j = 2\eta_j \omega_j.$$

Ces fonctions s'expriment avec les fonctions thêta :

$\sigma_i(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\theta_{i+1}(\frac{u}{2\omega_1})}{\theta_{i+1}}$; $i = 1, 2, 3$, avec (rappel) $\theta_{i+1} \triangleq \theta_{i+1}(0)$ [11]³⁹ et [13]⁴⁰.

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\theta_2(\frac{u}{2\omega_1})}{\theta_2} \text{ [13]}^{41}. \text{ Alors :}$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega_1}\right) \prod_{l=1}^{\infty} (1 + q^{2l})^{-2} [1 + 2q^{2l} \cos\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + q^{4l}] \text{ [13]}^{42}.$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\theta_3(\frac{u}{2\omega_1})}{\theta_3} \text{ [13]}^{43}. \text{ Alors :}$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \prod_{l=1}^{\infty} (1 + q^{2l-1})^{-2} [1 + 2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + q^{4l-2}] \text{ [13]}^{44}.$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{\theta_4(\frac{u}{2\omega_1})}{\theta_4} \text{ [13]}^{45}. \text{ Alors :}$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \prod_{l=1}^{\infty} (1 - q^{2l-1})^{-2} [1 - 2q^{2l-1} \cos\left(\frac{\pi u}{\omega_1}\right) + q^{4l-2}] \text{ [13]}^{46}.$$

38. p. 151 éq. (6.2.18) pour la première égalité

39. p. 1788

40. p. 151

41. p. 151 éq. (6.2.19)

42. p. 154 éq. (6.5.3)

43. p. 151 éq. (6.2.20)

44. p. 155 éq. (6.5.4)

45. p. 151 éq. (6.2.21)

46. p. 155 éq. (6.5.5)

6.2.2 Propriétés des fonctions cosigma de Weierstrass

- $\theta_2^4 \sigma_1(u+v) \sigma_1(u-v) = \theta_3^4 [\sigma_2(u)]^2 [\sigma_2(v)]^2 - \theta_4^4 [\sigma_3(u)]^2 [\sigma_3(v)]^2$ [13]⁴⁷,
- $\theta_3^4 \sigma_2(u+v) \sigma_2(u-v) = \theta_2^4 [\sigma_1(u)]^2 [\sigma_1(v)]^2 + \theta_4^4 [\sigma_3(u)]^2 [\sigma_3(v)]^2$ [13]⁴⁸,
- $\theta_4^4 \sigma_3(u+v) \sigma_3(u-v) = \theta_3^4 [\sigma_2(u)]^2 [\sigma_2(v)]^2 - \theta_2^4 [\sigma_1(u)]^2 [\sigma_1(v)]^2$ [13]⁴⁹.

Et, en particulier, en faivant $v = 0$:

$$\theta_2^4 [\sigma_1(u)]^2 - \theta_3^4 [\sigma_2(u)]^2 + \theta_4^4 [\sigma_3(u)]^2 = 0$$
 [13]⁵⁰.

- $\sigma(u+v) \sigma_1(u-v) = \sigma(u) \sigma_1(u) \sigma_2(v) \sigma_3(v) + \sigma_2(u) \sigma_3(u) \sigma(v) \sigma_1(v)$ [13]⁵¹,
- $\sigma(u+v) \sigma_2(u-v) = \sigma(u) \sigma_2(u) \sigma_1(v) \sigma_3(v) + \sigma_1(u) \sigma_3(u) \sigma(v) \sigma_2(v)$ [13]⁵²,
- $\sigma(u+v) \sigma_3(u-v) = \sigma(u) \sigma_3(u) \sigma_1(v) \sigma_2(v) + \sigma_1(u) \sigma_2(u) \sigma(v) \sigma_3(v)$ [13]⁵³.

- $\sigma_2(u+v) \sigma_3(u-v) = \sigma_2(u) \sigma_3(u) \sigma_2(v) \sigma_3(v) - \frac{\pi^2 \theta_2^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma_1(u) \sigma(v) \sigma_1(v)$ [13]⁵⁴,

$$\sigma_1(u+v) \sigma_3(u-v) = \sigma_1(u) \sigma_3(u) \sigma_1(v) \sigma_3(v) - \frac{\pi^2 \theta_3^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma_2(u) \sigma(v) \sigma_2(v)$$
 [13]⁵⁵,

$$\sigma_1(u+v) \sigma_2(u-v) = \sigma_1(u) \sigma_2(u) \sigma_1(v) \sigma_2(v) - \frac{\pi^2 \theta_4^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma_3(u) \sigma(v) \sigma_3(v)$$
 [13]⁵⁶.

- $\sigma_2(u) \sigma_2(v) \sigma_3(u+v) - \sigma_3(u) \sigma_3(v) \sigma_2(u+v) = \frac{\pi^2 \theta_2^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma(v) \sigma_1(u+v)$ [13]⁵⁷,

$$\sigma_1(u) \sigma_1(v) \sigma_3(u+v) - \sigma_3(u) \sigma_3(v) \sigma_1(u+v) = \frac{\pi^2 \theta_3^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma(v) \sigma_2(u+v)$$
 [13]⁵⁸,

$$\sigma_1(u) \sigma_1(v) \sigma_2(u+v) - \sigma_2(u) \sigma_2(v) \sigma_1(u+v) = \frac{\pi^2 \theta_4^4}{4\omega_1^2} \sigma(u) \sigma(v) \sigma_3(u+v)$$
 [13]⁵⁹,

6.2.3 Homogénéité

$$\begin{aligned} \sigma_i(vu | v\omega_1, v\omega_3) &= \sigma_i(vu; v^{-4}g_2, v^{-6}g_3) \\ &= \sigma_i(u | \omega_1, \omega_3); i = 1, 2, 3; \forall v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$
 [13]⁶⁰.

47. p. 153 éq. (6.4.2)

48. p. 153 éq. (6.4.2)

49. p. 153 éq. (6.4.2)

50. p. 153 éq. (6.4.3)

51. p. 153 éq. (6.4.4)

52. p. 153 éq. (6.4.4)

53. p. 153 éq. (6.4.4)

54. p. 153 éq. (6.4.7)

55. p. 153 éq. (6.4.7)

56. p. 153 éq. (6.4.7)

57. p. 153 éq. (6.4.7)

58. p. 153 éq. (6.4.7)

59. p. 153 éq. (6.4.7)

60. p. 152 éq. (6.2.25)

Mais attention :

$$\begin{aligned} \sigma_i(vu) &\triangleq \sigma_i(vu | \omega_1, \omega_3) \triangleq \sigma_i(vu; g_2, g_3) \neq \sigma_i(u) \triangleq \sigma_i(u | \omega_1, \omega_3) \\ &\triangleq \sigma_i(u; g_2, g_3); i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

6.3 Expression des trois fonctions elliptiques de Jacobi de base à l'aide des fonctions sigma et cosigma de Weierstrass

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u) &= \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)} [11]^{61} \text{ et } [13]^{62}, \\ \operatorname{sn}(u) &= \frac{K}{\omega_1} \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)} [11]^{63} \text{ et } [13]^{64}, \\ \operatorname{dn}(u) &= \frac{\sigma_2\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1 u}{K}\right)} [11]^{65} \text{ et } [13]^{66}. \end{aligned}$$

61. p. 1788

62. p. 152 éq. (6.3.4) dans le cas où $\omega_1 = K$

63. p. 1788

64. p. 152 éq. (6.3.3) dans le cas où $\omega_1 = K$

65. p. 1788

66. p. 152 éq. (6.3.4) dans le cas où $\omega_1 = K$

Chapitre 7

Autres fonctions de Weierstrass

7.1 La fonction dzéta de Weierstrass

À ne pas confondre avec la fonction dzéta de Riemann.

On pourra consulter [11]¹, [12]² et [19]³

7.1.1 Définition

La fonction dzéta de Weierstrass est la fonction méromorphe, notée ζ , qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ :

$\zeta(u) \triangleq \zeta(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \zeta(u; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$\zeta(u) \triangleq \frac{d}{du} [\ln \sigma(u)] \triangleq \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \triangleq \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta_1'(\frac{u}{2\omega_1})}{\theta_1(\frac{u}{2\omega_1})}$ [1]⁴, [11]⁵, [12]⁶, [13]⁷ et [19]⁸.

7.1.2 Propriétés

- $\eta_i = \zeta(\omega_i); i = 1, 2, 3$

-
1. pp. 528-529 134(XIV.3) partie F : Weierstrass's Elliptic Functions
 2. pp. 239-243 § 1 The sigma and zeta functions
 3. p. 1935 Weierstrass Zeta Function
 4. p. 650 éq. (18.10.7)
 5. p. 1788
 6. p. 240
 7. p. 155 éq. (6.6.8)
 8. p. 1934 Weierstrass Sigma Function éq. (1)

- $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{\gamma \in \Gamma} \left(\frac{1}{u-\gamma} + \frac{u}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \right)$ [19]⁹.

- ζ est méromorphe sur \mathbb{C} .

- ζ est Γ - quasi périodique.

$$\zeta(u + 2n\omega_1 + 2p\omega_3) = \zeta(u) + 2n\eta_1 + 2p\eta_3; \forall \gamma \in \Gamma$$
 [11]¹⁰.

Donc, en particulier, $\zeta(u + \gamma_i) = \zeta(u + 2\omega_i) = \zeta(u) + 2\eta_i; i = 1, 2, 3$ [19]¹¹.

- ζ est impaire : $\zeta(-u) = -\zeta(u)$.

- Développement en série de Laurent :

$$\zeta(u) = u^{-1} - \frac{g_2}{2^2 3^5} u^3 - \frac{g_3}{2^2 5^7} u^5 - \frac{g_2^2}{2^4 3^5 7} u^7 - \frac{g_2 g_3}{2^4 3^5 7 11} u^9 - \dots$$
 [11]¹².

- $\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u+x)\sigma(u-x)\sigma(v+x)\sigma(v-x)} = \frac{1}{\sigma(2x)} [\zeta(u+x) - \zeta(u-x) - \zeta(v+x) + \zeta(v-x)]$ [13]¹³.

7.1.3 Homogénéité

$$\zeta(vu; v^{-4}g_2, v^{-6}g_3) = v^{-1} \zeta(u | \omega_1, \omega_3) = v^{-1} \zeta(u; g_2, g_3); \forall v \in \mathbb{C} [1]$$
¹⁴.

Mais attention :

$$\zeta(vu) \triangleq \zeta(vu | \omega_1, \omega_3) \triangleq \zeta(vu; g_2, g_3) \neq v^{-1} \zeta(u) \triangleq v^{-1} \zeta(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq v^{-1} \zeta(u; g_2, g_3).$$

7.1.4 Théorème d'addition

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2} \frac{\zeta''(u) - \zeta''(v)}{\zeta'(u) - \zeta'(v)}$$
 [11]¹⁵.

9. p. 1935 Weierstrass Zeta Function éq. (4)

10. p. 1788

11. p. 1935 Weierstrass Zeta Function éq. (5), pour $i = 1$

12. p. 1787

13. p. 157 éq. (6.7.3)

14. p. 631 éqs. (18.2.3) et (18.2.14)

15. p. 1788

Chapitre 8

Les fonctions elliptiques de deuxième espèce

Une fonction elliptique de deuxième espèce est une fonction f , méromorphe sur \mathbb{C} , qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ :

$f(u) \triangleq f(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq f(u; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$f(u + \gamma_i) = \mu_i f(u)$; $\mu_i \in \mathbb{C}$; $\forall u \in \mathbb{C}$; $i = 1, 3$ [11]¹.

Elle n'est donc pas, à strictement parler, une fonction elliptique.

Exemple

Pour des constantes $\rho \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{C}$ la fonction f telle que :

$f(u) = e^{\rho u \frac{\sigma(u-r)}{\sigma(u)}}$ est une fonction elliptique de deuxième espèce [11]².

Alors $\mu_i = e^{2\rho \omega_i - 2r \eta_i}$; $i = 1, 3$ [11]³.

1. p. 529 134(XIV-3) Elliptic Functions. Partie G. éq. (12)

2. p. 529 134(XIV-3) Elliptic Functions. Partie G. éq. (13)

3. p. 529 134(XIV-3) Elliptic Functions. Partie G. éq. (14)

Chapitre 9

Les fonctions elliptiques ou fonctions elliptiques de première espèce et leurs inverses

Les fonctions elliptiques – ou fonctions elliptiques de première espèce – sont des fonctions méromorphes de la variable complexe doublement périodiques. Soit P l'ensemble de toutes les périodes de la fonction elliptique ; c'est un groupe additif. Et soit $\gamma_1 = 2\omega_1$ et $\gamma_3 = 2\omega_3$ une base de P . Alors γ_1 et γ_3 sont appelées périodes fondamentales de la fonction elliptique et le parallélogramme de sommets $a, a + \gamma_1, a + \gamma_3, a + \gamma_1 + \gamma_3$; $\forall a \in \mathbb{C}$ est appelé parallélogramme de périodes fondamentales. Nous avons vu que le plan complexe est couvert par un *réseau* Γ de parallélogrammes congruents, appelés parallélogrammes de périodes obtenus en translatant le parallélogramme de périodes fondamentales par $n\gamma_1 + p\gamma_3$; $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

Une fonction elliptique est donc une fonction f , méromorphe sur \mathbb{C} , qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ :

$$f(u) = f(u | \omega_1, \omega_3) = f(u ; g_2, g_3) ; \text{ telle que :}$$

$$f(u + \gamma) = f(u) ; \forall u \in \mathbb{C} ; \forall \gamma \in \Gamma.$$

9.1 Les fonctions \wp et \wp' de Weierstrass

On pourra consulter [3]¹, [11]², [12]³, [14], [19]⁴ et [20]⁵.

9.1.1 Définition de la fonction \wp de Weierstrass

La fonction \wp de Weierstrass est la fonction méromorphe, qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ ;

$\wp(u) \triangleq \wp(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \wp(u; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$$\wp(u) \triangleq -\zeta'(u) \triangleq \frac{\theta_1'''}{12\omega_1^2\theta_1'} - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta_1(\frac{u}{2\omega_1})\theta_1''(\frac{u}{2\omega_1}) - [\theta_1'(\frac{u}{2\omega_1})]^2}{[\theta_1(\frac{u}{2\omega_1})]^2}.$$

Propriétés

- $\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma} [\frac{1}{(u-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}]$; $u \in \mathbb{C}$ [14]⁶.
- \wp est méromorphe sur \mathbb{C} .
- \wp est Γ -périodique : $\wp(u + \gamma) = \wp(u)$; $\forall \gamma \in \Gamma$.
- \wp est paire : $\wp(-u) = \wp(u)$.
- Développement en série de Laurent :

$\wp(u) = u^{-2} + 3G_2u^2 + 5G_3u^4 + 7G_4u^6 + \dots$ [10]⁷ et [12]⁸ et :

$$\wp(u) = u^{-2} + \frac{g_2}{2^2 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 3 5^2} u^6 + \frac{3g_2g_3}{2^4 5 7 11} u^8 + \left(\frac{g_2^3}{2^5 3 5^3 13} + \frac{g_3^2}{2^4 7^2 13} \right) u^{10} + \frac{g_2^2 g_3}{2^5 3 5^2 7 11} u^{12} + \dots$$
 [1]⁹, [11]¹⁰ et [20]¹¹.

- \wp est d'ordre 2 [10]¹².

1. pp. 30-32
 2. pp. 528-529 134(XIV.3) partie F : Weierstrass's Elliptic Functions
 3. pp. 7-11 § 2
 4. pp. 1930-1933 Weierstrass Elliptic Function
 5. pp. 429-461 Ch. XX
 6. p. 33 éq. (1)
 7. p. 89
 8. p. 10
 9. pp. 635-636 qui proposent 19 termes du développement !
 10. p. 1787
 11. p. 437
 12. p. 85

- $\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{[\sigma(u)]^2[\sigma(v)]^2} = \wp(v) - \wp(u)$ [13]¹³.

- $\wp(u) = \wp(\omega_1) + \frac{[\sigma_1(u)]^2}{[\sigma(u)]^2}$ [13]¹⁴,

$$\wp(u) = \wp(\omega_2) + \frac{[\sigma_2(u)]^2}{[\sigma(u)]^2} \text{ [13]}^{15},$$

$$\wp(u) = \wp(\omega_3) + \frac{[\sigma_3(u)]^2}{[\sigma(u)]^2} \text{ [13]}^{16}.$$

Homogénéité

$$\wp(vu; v^{-4}g_2, v^{-6}g_3) = v^{-2}\wp(u|\omega_1, \omega_3) = v^{-2}\wp(u; g_2, g_3); \forall v \in \mathbb{C} \text{ [1]}^{17}, \text{ [10]}^{18} \text{ et [20]}^{19}.$$

Mais attention :

$$\wp(vu) \triangleq \wp(vu|\omega_1, \omega_3) \triangleq \wp(vu; g_2, g_3) \neq v^{-2}\wp(u) \triangleq v^{-2}\wp(u|\omega_1, \omega_3) \triangleq v^{-2}\wp(u; g_2, g_3).$$

Valeurs de la fonction \wp

Soient $e_1 \triangleq \wp(\omega_1)$, $e_2 \triangleq \wp(\omega_2)$ et $e_3 \triangleq \wp(\omega_3)$. Alors :

$$e_1 = \wp(\omega_1) = \frac{1}{(2\omega_1)^2} \left(\frac{\theta_1'''}{3\theta_1'} - \frac{\theta_2''}{\theta_2} \right) \text{ [13]}^{20}$$

$$e_2 = \wp(\omega_2) = \frac{1}{(2\omega_1)^2} \left(\frac{\theta_1'''}{3\theta_1'} - \frac{\theta_3''}{\theta_3} \right) \text{ [13]}^{21}$$

$$e_3 = \wp(\omega_3) = \frac{1}{(2\omega_1)^2} \left(\frac{\theta_1'''}{3\theta_1'} - \frac{\theta_4''}{\theta_4} \right) \text{ [13]}^{22}.$$

On a également :

$$e_1 = \frac{\pi^2(\theta_3^4 + \theta_4^4)}{12\omega_1^2} \text{ [1]}^{23} \text{ [13]}^{24},$$

-
- 13. p. 158 éq. (6.7.5)
 - 14. p. 158 éqs. (6.7.9) et (6.7.10)
 - 15. p. 158 éq. (6.7.11)
 - 16. p. 158 éq. (6.7.12)
 - 17. p. 631 éq. (18.2.2) et (18.2.13)
 - 18. p. 85
 - 19. p. 439
 - 20. p. 160 éq. (6.7.29)
 - 21. p. 160 éq. (6.7.30)
 - 22. p. 160 éq. (6.7.31)
 - 23. p. 650 éq. (18.10.9)
 - 24. p. 182 Exercice 4

$$e_2 = \frac{\pi^2 (\theta_2^4 - \theta_4^4)}{12 \omega_1^2} [1]^{25} [13]^{26},$$

$$e_3 = -\frac{\pi^2 (\theta_2^4 + \theta_3^4)}{12 \omega_1^2} [1]^{27} [13]^{28}, \text{ et :}$$

$$e_1 = \frac{(2-m)K^2}{3 \omega_1^2} [1]^{29}, e_2 = \frac{(2m-1)K^2}{3 \omega_1^2} [1]^{30} \text{ et } e_3 = -\frac{(m+1)K^2}{3 \omega_1^2} [1]^{31}.$$

$$e_2 - e_3 = \frac{\pi^2 \theta_2^4}{4 \omega_1^2},$$

$$e_1 - e_3 = \frac{\pi^2 \theta_3^4}{4 \omega_1^2},$$

$$e_1 - e_2 = \frac{\pi^2 \theta_4^4}{4 \omega_1^2}.$$

9.1.2 Définition de la fonction \wp' de Weierstrass

La fonction \wp' de Weierstrass est la fonction méromorphe, qui dépend de la variable complexe u et du réseau Γ ;

$\wp'(u) \triangleq \wp'(u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \wp'(u ; g_2, g_3)$; elle est telle que :

$$\wp'(u) \triangleq -\zeta''(u) \triangleq -\frac{\pi \theta_1'^2}{4 \omega_1^3} \frac{\theta_2(\frac{u}{2\omega_1}) \theta_3(\frac{u}{2\omega_1}) \theta_4(\frac{u}{2\omega_1})}{[\theta_1(\frac{u}{2\omega_1})]^3} [11]^{32}, \text{ ou :}$$

$$\wp'(u) \triangleq -\zeta''(u) \triangleq -\frac{\theta_1'^3}{4 \omega_1^3 \theta_2 \theta_3 \theta_4} \frac{\theta_2(\frac{u}{2\omega_1}) \theta_3(\frac{u}{2\omega_1}) \theta_4(\frac{u}{2\omega_1})}{[\theta_1(\frac{u}{2\omega_1})]^3} [1]^{33}$$

Propriétés

- $\wp'(u) = -2 \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(u-\gamma)^3}$; $u \in \mathbb{C}$ [11]³⁴ et [14]³⁵.
- \wp' est méromorphe sur \mathbb{C} .
- \wp' est Γ -périodique : $\wp'(u + \gamma) = \wp'(u)$; $\forall \gamma \in \Gamma$.
- \wp' est impaire : $\wp'(-u) = -\wp'(u)$.

25. p. 650 éq. (18.10.10)

26. p. 182 Exercice 4

27. p. 650 éq. (18.10.11)

28. p. 182 Exercice 4

29. p. 649 éq. (18.9.1)

30. p. éq. (649 18.9.2)

31. p. 649 éq. (18.9.3)

32. p. 1787 mais avec une erreur

33. p. 650 éq. (18.10.5)

34. p. 528

35. p. 35

- Développement en série de Laurent :

$$\varphi'(u) = -2u^{-3} + 6G_2u + 20G_3u^3 + 42G_4u^5 + \dots \text{ et :}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= -2u^{-3} + \frac{g_2}{25}u + \frac{g_3}{7}u^3 + \frac{g_2^2}{2^3 5^2}u^5 + \frac{3g_2g_3}{25711}u^7 + \left(\frac{g_2^3}{2^4 35^2 13} + \frac{5g_3^2}{2^3 7^2 13}\right)u^9 \\ &+ \frac{g_2^2 g_3}{2^3 5^2 7 11}u^{11} + \dots \end{aligned}$$

- φ' est d'ordre 3 [11]³⁶.

- $\varphi'(u) = -\frac{2\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{[\sigma(u)]^3} = -\frac{\sigma(2u)}{[\sigma(u)]^4}$ [13]³⁷ et [11]³⁸.

Homogénéité

$$\begin{aligned} &\varphi'(v u; v^{-4}g_2, v^{-6}g_3) \\ &= v^{-3}\varphi'(u | \omega_1, \omega_3) = v^{-3}\varphi'(u; g_2, g_3); \forall v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Mais attention :

$$\begin{aligned} \varphi'(v u) &\triangleq \varphi'(v u | \omega_1, \omega_3) \triangleq \varphi'(v u; g_2, g_3) \neq v^{-3}\varphi'(u) \triangleq v^{-3}\varphi'(u | \omega_1, \omega_3) \\ &\triangleq v^{-3}\varphi'(u; g_2, g_3). \end{aligned}$$

Zéros de la fonction φ'

$$\varphi'(\omega_1) = \varphi'(\omega_2) = \varphi'(\omega_3) = 0.$$

En effet φ' est impaire et de période $2\omega_i; i = 1, 2, 3$ et alors $\varphi'(\omega_i) = -\varphi'(-\omega_i) = -\varphi'(2\omega_i - \omega_i) = -\varphi'(\omega_i)$ soit $\varphi'(\omega_i) = 0; i = 1, 2, 3$ QED.

Équation différentielle vérifiée par φ

La fonction φ est solution de l'équation différentielle non-linéaire :

$$[\varphi'(u)]^2 = 4[\varphi(u)]^3 - g_2\varphi(u) - g_3; \text{ avec } \varphi(0) = \infty.$$

Le discriminant du second membre est $\Delta \triangleq g_2^3 - 3^3 g_3^2$. Alors on constate aisément que : $\Delta(v\Gamma) = v^{-12}\Delta(\Gamma); \forall v \in \mathbb{C}$ [1]³⁹.

On va poser :

36. p. 528

37. p. 158 éq. (6.7.8)

38. p. 1788 mais avec une erreur : $\varphi'(2u)$ au lieu de $\varphi'(u)$

39. p. 631 éq. (18.2.8)

$T = T(t) = t^3 - \frac{g_2}{4}t - \frac{g_3}{4} = (t - e_1)(t - e_2)(t - e_3)$ car e_1, e_2 et e_3 sont, d'après ce qui précède, les 3 racines de l'équation $T(t) = 0$. Par conséquent [11]⁴⁰ :

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 &= -\frac{g_2}{4}, \\ e_1 e_2 e_3 &= \frac{g_3}{4}. \text{ Soient [1]}^{41} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1^2 &\triangleq (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 3e_1^2 - \frac{g_2}{4} = 2e_1^2 + \frac{g_3}{4e_1} \in \mathbb{C}, \\ H_2^2 &\triangleq (e_2 - e_1)(e_2 - e_3) = 3e_2^2 - \frac{g_2}{4} = 2e_2^2 + \frac{g_3}{4e_2} \in \mathbb{C}, \\ H_3^2 &\triangleq (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = 3e_3^2 - \frac{g_2}{4} = 2e_3^2 + \frac{g_3}{4e_3} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

$$\text{Et } \Delta = 2^4 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 [1]^{42}.$$

On va se restreindre maintenant, comme la majorité des auteurs, au cas où $g_2 \in \mathbb{R}$ et $g_3 \in \mathbb{R}$ [1]⁴³. Alors $\Delta = g_2^3 - 3^3 g_3^2 \in \mathbb{R}$.

Si $g_3 \leq 0$ grâce à la propriété d'homogénéité avec $\nu = i$ on constate que $\nu^{-6} g_3 = i^{-6} g_3 = -g_3 \geq 0$. On peut donc toujours se ramener au cas où $g_3 \geq 0$, **ce que nous supposons désormais (sauf pour un cas lorsque $\Delta = 0$).**

• Si $\Delta > 0$ on suppose $g_3 \geq 0$. Les 3 racines e_1, e_2 et e_3 sont distinctes et réelles. Posons $e_3 < e_2 < e_1$. On constate plus précisément que :

$$e_3 < e_2 \leq 0 < e_1, \text{ l'égalité ayant lieu si } g_3 = 0.$$

$$H_1^2 > 0; \text{ posons } H_1 = \sqrt{H_1^2} > 0 [1]^{44},$$

$$H_2^2 < 0; \text{ posons } H_2 = \sqrt{-H_2^2} i [1]^{45},$$

$$H_3^2 > 0; \text{ posons } H_3 = \sqrt{H_3^2} > 0 [1]^{46}.$$

• Si $\Delta < 0$ on suppose $g_3 \geq 0$. Les 3 racines e_1, e_2 et e_3 sont distinctes ; l'une est réelle et les deux autres complexes conjuguées. Posons $e_2 \in \mathbb{R}$, $e_1 = -\xi + \eta i$ et $e_3 = \bar{e}_1 = -\xi - \eta i$, avec $\eta > 0$ (\bar{e}_1 nombre complexe conjugué de e_1). On constate que :

$$\begin{aligned} e_2 \geq 0 \text{ (égalité si } g_3 = 0) \text{ [car } e_1 e_2 e_3 = e_2 (\xi^2 + \eta^2) = \frac{g_3}{4} \geq 0], \\ \xi \geq 0 \text{ (car } e_1 + e_2 + e_3 = -2\xi + e_2 = 0 \text{ soit } \xi = \frac{e_2}{2} \geq 0). \end{aligned}$$

40. p. 1787

41. p. 633 éqs. (18.3.5) et (18.3.6)

42. p. éq. (629 18.1.8)

43. p. 629

44. p. 633 éq. (18.3.12)

45. p. 633 éq. (18.3.13)

46. p. 633 éq. (18.3.12)

$$H_2^2 = (e_2 + \xi)^2 + \eta^2 > 0; \text{ posons } H_2 = \sqrt{H_2^2} [1]^{47},$$

$$H_3^2 = -2\eta^2 + 2\eta(e_2 + \xi)i, \text{ avec } \frac{\pi}{2} < \arg(H_3^2) \leq \pi \text{ (égalité si } g_3 = 0); \text{ soit}$$

alors H_3 tel que $\frac{\pi}{4} < \arg(H_3) \leq \frac{\pi}{2}$ (égalité si $g_3 = 0$) [1]⁴⁸.

$$H_1 = \overline{H_3} [1]^{49},$$

• Si $\Delta = 0$ on ne suppose plus $g_3 \geq 0$. les 3 racines e_1, e_2 et e_3 ne sont pas distinctes [1]⁵⁰

◇ Cas I : $g_2 > 0$ et $g_3 < 0$

$$e_1 = e_2 = 2^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} > 0, e_3 = -3^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} < 0. \text{ Alors :}$$

$$e_3 < 0 < e_2 = e_1.$$

$$H_1 = 0,$$

$$H_2 = 0,$$

$$H_3 = 3e_1 = 2^{-1} 3^{\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} > 0.$$

◇ Cas II : $g_2 > 0$ et $g_3 > 0$

$$e_1 = 3^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} > 0, e_2 = e_3 = -2^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} < 0. \text{ Alors :}$$

$$e_3 = e_2 < 0 < e_1.$$

$$H_1 = -3e_2 = 2^{-1} 3^{\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$H_2 = 0,$$

$$H_3 = 0.$$

◇ Cas III : $g_2 = 0$ et $g_3 = 0$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0.$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = 0.$$

Théorème d'addition

$$\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4} \left[\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)} \right]^2 \quad [11]^{51}, [12]^{52} \text{ et } [19]^{53}.$$

47. p. 633 éq. (18.3.12)

48. p. 633 éq. (18.3.13)

49. p. 633 éq. (18.3.13)

50. pp. 651-652 § 18.12

51. p. 1787

52. p. 14

53. p. 1932 Weierstrass Elliptic Function éq. (50)

Et, en particulier : $\wp(2u) = -2\wp(u) + \frac{1}{4} \left[\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)} \right]^2$ [12]⁵⁴

$$\wp(u + \omega_j) = e_j + \frac{(e_j - e_k)(e_j - e_l)}{\wp(u) - e_j} ; j, k, l = 1, 2, 3 \text{ [11]}^{55}.$$

Calcul de k et m , k' et m_1 , K et K' et E et E'

Ce calcul est possible grâce aux fonctions thêta de Jacobi présentées précédemment [20]⁵⁶.

La connaissance de ω_1 et ω_3 conduit à $\tau \triangleq \frac{\omega_3}{\omega_1}$ (rappel : on suppose $\tau \in \mathcal{H}$) puis à $q \triangleq e^{\pi i \tau}$.

On calcule ensuite – en général numériquement et si possible analytiquement – (cf. exemples I et II ci-après) les sommes infinies suivantes :

$$\theta_2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} = 2q^{\frac{1}{4}} (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \dots) [1]^{57},$$

$$\theta_3 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2} = 1 + 2(q + q^4 + q^9 + q^{16} + \dots) [1]^{58},$$

$$\theta_4 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} = 1 + 2(-q + q^4 - q^9 + q^{16} - \dots) [1]^{59} [20]^{60}.$$

$$\text{Et on a la relation } \theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4 [1]^{61}.$$

On en déduit :

$$k = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2} \text{ et } m = k^2 = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}, k' = \frac{\theta_4^2}{\theta_3^2} \text{ et } m_1 = k'^2 = \frac{\theta_4^4}{\theta_3^4} \text{ puis } K = \frac{\pi}{2} \theta_3^2.$$

On obtient K , K' , E et E' par calcul des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèces (il y a donc deux manières de calculer K).

Calcul de g_2 , g_3 et Δ

Nous avons vu que $g_2 = 2^{-2} 35 G_2(\tau) \omega_1^{-4}$ et $g_3 = 2^{-4} 57 G_3(\tau) \omega_1^{-6}$ et on suppose (rappel) que $g_2 \in \mathbb{R}$ et $g_3 \in \mathbb{R}$; $g_3 \geq 0$ (sauf dans un cas lorsque $\Delta = 0$) et donc que :

$$\Delta = g_2^3 - 3^3 g_3^2 = 2^{-8} 3^3 5^2 \{2^2 5 [G_2(\tau)]^3 - 7^2 [G_3(\tau)]^2\} \omega_1^{-12} \in \mathbb{R}.$$

54. p. 14

55. p. 1787

56. p. 479 exemple 3

57. p. 579 éq. (16.38.7)

58. p. 579 éq. (16.38.5)

59. p. 579 éq. (16.38.8)

60. p. 479 exemple 3 mais il y a une erreur de signe

61. p. 579 éq. (16.38.8)

Lien avec les fonctions elliptiques de Jacobi

• Si $\Delta > 0$ les 3 racines e_1, e_2 et e_3 sont distinctes et réelles et on a posé $e_3 < e_2 < e_1$. Soit alors :

$$v \triangleq \frac{2}{(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}}}, m \triangleq \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \text{ et } m_1 \triangleq \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \text{ (on a bien } m + m_1 = 1), \text{ et :}$$

$$y(u) \triangleq e_1 + (e_1 - e_3) [\text{cs}(\frac{2u}{v} | m)]^2 \text{ ou :}$$

$$y(u) \triangleq e_2 + (e_1 - e_3) [\text{ds}(\frac{2u}{v} | m)]^2 \text{ ou :}$$

$$y(u) \triangleq e_3 + (e_1 - e_3) [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^2.$$

En effet il est aisé de démontrer que les trois expressions précédentes de $y(u)$ sont identiques.

Alors, par dérivation :

$$y'(u) = -2(e_1 - e_3)^{\frac{3}{2}} [\text{cn}(\frac{2u}{v} | m)] [\text{dn}(\frac{2u}{v} | m)] [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^3.$$

$$\text{On a } y(0) = \infty \text{ et } \frac{[y'(u)]^2}{4} = T[y(u)].$$

En effet les deux membres de cette équation différentielle du premier ordre sont égaux à :

$$(e_1 - e_3)^3 [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^6 + 3(e_1 - e_3)^2 e_3 [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^4 + (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3) [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^2.$$

Les deux fonctions y et \wp , qui satisfont à la même condition initiale et à la même équation différentielle du premier ordre, sont égales et, par conséquent :

$$\wp(u) = e_1 + (e_1 - e_3) [\text{cs}(\frac{2u}{v} | m)]^2 [11]^{62} \text{ ou :}$$

$$\wp(u) = e_2 + (e_1 - e_3) [\text{ds}(\frac{2u}{v} | m)]^2 [11]^{63} \text{ ou :}$$

$$\wp(u) = e_3 + (e_1 - e_3) [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^2 [11]^{64} \text{ et } [15]^{65} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2(e_1 - e_3)^{\frac{3}{2}} [\text{cn}(\frac{2u}{v} | m)] [\text{dn}(\frac{2u}{v} | m)] [\text{ns}(\frac{2u}{v} | m)]^3.$$

De plus comme on a supposé $g_3 \geq 0$ on constate que $0 < m \leq \frac{1}{2} [1]^{66}$.

Il est alors aisé de vérifier les relations suivantes, données par [1] ⁶⁷.

62. p. 1787

63. p. 1787

64. p. 1787

65. p. 23

66. p. 649 éq. (18.9.10)

67. p. 649

$$e_1 = \frac{(2-m)K^2}{3\omega_1^2} [1]^{68}, e_2 = \frac{(2m-1)K^2}{3\omega_1^2} [1]^{69} \text{ et } e_3 = -\frac{(m+1)K^2}{3\omega_1^2} [1]^{70},$$

$$g_2 = \frac{4(m^2-m+1)K^4}{3\omega_1^4} [1]^{71} \text{ et } g_3 = \frac{4(m-2)(2m-1)(m+1)K^6}{27\omega_1^6} [1]^{72}.$$

$$\Delta = \frac{16m^2(m-1)^2K^{12}}{\omega_1^{12}} [1]^{73},$$

$$\omega_1 = \frac{K}{(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}} [1]^{74} \text{ et } [15]^{75}, \omega_3 = \frac{K'}{(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}} i [1]^{76} \text{ et } [15]^{77},$$

$$\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3, \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{K'}{K} i \text{ et } q = e^{\pi i \tau} = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

Et :

$$\eta_1 \triangleq \zeta(\omega_1) = \frac{K[3E+(m-2)K]}{3\omega_1} = (e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} \left(E - \frac{e_1}{e_1-e_3} K \right) [1]^{78} \text{ et } [15]^{79},$$

$$\eta_3 \triangleq \zeta(\omega_3) = \frac{\eta_1 \omega_3 - \frac{1}{2} \pi i}{\omega_1} = -(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} \left(E' + \frac{e_3}{e_1-e_3} K' \right) i [1]^{80} \text{ et } [15]^{81}.$$

• Si $\Delta < 0$ les 3 racines e_1, e_2 et e_3 sont distinctes ; on a posé e_2 réelle et e_1 et e_3 complexes conjuguées. Soit alors :

$$m \triangleq \frac{1}{2} - \frac{3e_2}{4H_2} \text{ et } m_1 \triangleq \frac{1}{2} + \frac{3e_2}{4H_2} \text{ (on a bien } m + m_1 = 1), \text{ et :}$$

$$y(u) \triangleq e_2 + H_2 \frac{1 + \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)}{1 - \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)}.$$

Alors, par dérivation :

$$y'(u) = -4H_2^{\frac{3}{2}} \frac{\text{sn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m) \text{dn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)}{[1 - \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)]^2}.$$

$$\text{On a } y(0) = \infty \text{ et } \frac{[y'(u)]^2}{4} = T[y(u)].$$

En effet les deux membres de cette équation différentielle du premier ordre sont égaux à :

68. p. 649 éq. (18.9.1)

69. p. 649 éq. (18.9.2)

70. p. 649 éq. (18.9.3)

71. p. 649 éq. (18.9.4)

72. p. 649 éq. (18.9.5)

73. p. 649 éq. (18.9.6)

74. p. 649 éq. (18.9.8)

75. p. 23

76. p. 649 éq. (18.9.7)

77. p. 23

78. p. 649 éq. (18.9.13)

79. p. 23

80. p. 649 éq. (18.9.14)

81. p. 23

$$\frac{H_2^2 [1 + \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)] \{ (2H_2 + 3e_2) + (2H_2 - 3e_2) [\text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)]^2 \}}{[1 - \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)]^3}.$$

Les deux fonctions y et \wp , qui satisfont à la même condition initiale et à la même équation différentielle du premier ordre, sont égales et, par conséquent :

$$\wp(u) = e_2 + H_2 \frac{1 + \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)}{1 - \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)} [1]^{82} \text{ et } [15]^{83} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -4H_2^{\frac{3}{2}} \frac{\text{sn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m) \text{dn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)}{[1 - \text{cn}(2H_2^{\frac{1}{2}} u|m)]^2} [1]^{84} \text{ et } [15]^{85}.$$

De plus comme on a supposé $g_3 \geq 0$ on constate que $0 < m \leq \frac{1}{2}$ [1]⁸⁶.

Il est alors aisé de vérifier les relations suivantes, données par [1]⁸⁷.

$$e_1 = \frac{(2m-1) + 6(m-m^2)^{\frac{1}{2}} i}{3\omega_2^2} K^2 [1]^{88}, e_2 = \frac{2(1-2m)K^2}{3\omega_2^2} [1]^{89}$$

$$\text{et } e_3 = \frac{(2m-1) - 6(m-m^2)^{\frac{1}{2}} i}{3\omega_2^2} K^2 [1]^{90},$$

$$g_2 = \frac{4(16m^2 - 16m + 1)K^4}{3\omega_2^4} [1]^{91} \text{ et } g_3 = \frac{8(2m-1)(32m^2 - 32m - 1)K^6}{27\omega_2^6}, [1]^{92}.$$

$$\Delta = -\frac{256(m-m^2)K^{12}}{\omega_2^{12}} [1]^{93}.$$

$$\omega_2 = -\frac{K}{H_2^{\frac{1}{2}}} [1]^{94} \text{ et } \omega_2' \triangleq \omega_3 - \omega_1 = -\frac{K'\omega_2}{K} i [1]^{95}. \text{ Et :}$$

$$\eta_2 \triangleq \zeta(\omega_2) = \frac{K[6E + (4m-5)K]}{3\omega_2} [1]^{96}, \eta_2' \triangleq \zeta(\omega_2') = \frac{\eta_2 \omega_2' + \pi i}{\omega_2} [1]^{97}.$$

82. p. 649 éq. (18.9.11)

83. p. 24

84. p. 649 éq. (18.9.12)

85. p. 23

86. p. 649 éq. (18.9.10)

87. p. 649

88. p. 649 éq. (18.9.1)

89. p. 649 éq. (18.9.2)

90. p. 649 éq. (18.9.3)

91. p. 649 éq. (18.9.4)

92. p. 649 éq. (18.9.5)

93. p. 649 éq. (18.9.6)

94. p. 649 éq. (18.9.8)

95. p. 649 éq. (18.9.7)

96. p. 649 éq. (18.9.13)

97. p. 649 éq. (18.9.14)

• Si $\Delta = 0$ les 3 racines e_1, e_2 et e_3 ne sont pas distinctes.

◇ Cas I : $g_2 > 0$ et $g_3 < 0$. Soit alors :

$$y(u) \triangleq -2e_1 + 3e_1 \left\{ \coth[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u] \right\}^2 = e_1 + \frac{3e_1}{\{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^2}.$$

Alors, par dérivation :

$$y'(u) = -2(3e_1)^{\frac{3}{2}} \frac{\cosh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]}{\{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^3}.$$

$$\text{On a } y(0) = \infty \text{ et } \frac{[y'(u)]^2}{4} = T[y(u)].$$

En effet les deux membres de cette équation différentielle du premier ordre sont égaux à :

$$(3e_1)^3 \frac{1 + \{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^4}{\{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^6}$$

Les deux fonctions y et \wp , qui satisfont à la même condition initiale et à la même équation différentielle du premier ordre, sont égales et, par conséquent :

$$\wp(u) \triangleq -2e_1 + 3e_1 \left\{ \coth[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u] \right\}^2 = e_1 + \frac{3e_1}{\{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^2} \quad [1]^{98} \text{ et } [15]^{99} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2(3e_1)^{\frac{3}{2}} \frac{\cosh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]}{\{\sinh[(3e_1)^{\frac{1}{2}} u]\}^3}.$$

◇ Cas II : $g_2 > 0$ et $g_3 > 0$. Soit alors :

$$y(u) \triangleq -2e_2 - 3e_2 \left\{ \cot[(-3e_2)^{\frac{1}{2}} u] \right\}^2 = e_2 - \frac{3e_2}{\{\sin[(-3e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^2}.$$

Alors, par dérivation :

$$y'(u) = 2(-3e_2)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos[(-3e_2)^{\frac{1}{2}} u]}{\{\sin[(-3e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^3}.$$

$$\text{On a } y(0) = \infty \text{ et } \frac{[y'(u)]^2}{4} = T[y(u)].$$

En effet les deux membres de cette équation différentielle du premier ordre sont égaux à :

98. p. 651 éq. (18.12.3)

99. p. 24 $\Delta = 0$ (B)

$$(-3 e_2)^3 \frac{\{\cos[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^2}{\{\sin[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^6}.$$

Les deux fonctions y et \wp , qui satisfont à la même condition initiale et à la même équation différentielle du premier ordre, sont égales et, par conséquent :

$$\wp(u) \triangleq -2 e_2 - 3 e_2 \{\cot[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^2 = e_2 - \frac{3 e_2}{\{\sin[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^2} [1]^{100} \text{ et } [15]^{101} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = 2 (-3 e_2)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]}{\{\sin[(-3 e_2)^{\frac{1}{2}} u]\}^3}.$$

◇ Cas III : $g_2 = 0$ et $g_3 = 0$. Soit alors :

$$y(u) \triangleq u^{-2}.$$

Alors, par dérivation :

$$y'(u) = -2 u^{-3}.$$

$$\text{On a } y(0) = \infty \text{ et } \frac{[y'(u)]^2}{4} = T[y(u)].$$

En effet les deux membres de cette équation différentielle du premier ordre sont égaux à u^{-6} .

Les deux fonctions y et \wp , qui satisfont à la même condition initiale et à la même équation différentielle du premier ordre, sont égales et, par conséquent :

$$\wp(u) \triangleq u^{-2} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2 u^{-3}.$$

100. p. 652 éq. (18.12.27)

101. p. 24 $\Delta = 0$ (A)

Exemples

Exemple I

Soit $\tau = i$ et donc $q = e^{-\pi}$. Alors on peut montrer que :

$$\theta_2 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} = 2^{-\frac{3}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma(\frac{1}{4}) = 0,91357913\dots,$$

$$\theta_3 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2} = 2^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma(\frac{1}{4}) = 1,08643481\dots \text{ et}$$

$$\theta_4 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} = 2^{-\frac{3}{4}} \pi^{-\frac{3}{4}} \Gamma(\frac{1}{4}) = 0,91357913\dots$$

Et on a la relation $\theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4 = 2^{-2} \pi^{-3} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 = 1,39320392\dots$. On en déduit :

$$k = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2} = k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } m = \frac{\theta_4^2}{\theta_3^2} = k_1^2 = \frac{1}{2}, k' = \frac{\theta_4^2}{\theta_2^2} = k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$m_1 = \frac{\theta_4^4}{\theta_3^4} = k'^2 = k_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Cette valeur k_1 du paramètre k correspond à la plus simple des valeurs singulières [19]¹⁰². Alors :

$$K = \frac{\pi}{2} \theta_3^2 = 2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = 1,85407467\dots [1]^{103}, [3]^{104} \text{ et } [19]^{105}.$$

$$K' = K.$$

$$E = 2^{-3} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 + \pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} = 1,35064388\dots [19]^{106}.$$

$$E' = E. \text{ Donc :}$$

$$E - \frac{1}{2} K = \pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} = 0,42360654\dots$$

$$\text{Et on vérifie que } KE' + K'E - KK' = 2KE - K^2 = \frac{\pi}{2} = 1,57079632\dots$$

$$G_2(i) = 2^{-6} 3^{-1} 5^{-1} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 = 3,15121200\dots \text{ et } G_3(i) = 0.$$

$$g_2 = 2^{-8} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 \omega_1^{-4}, g_3 = 0 \text{ et } \Delta = 2^{-24} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{24} \omega_1^{-12}.$$

102. pp. 540-543 Elliptic Integral Singular Value et Elliptic Integral Singular Value- k_1

103. p. 658

104. p. 25 Th. 1.7

105. p. 540 Elliptic Integral Singular Value et Elliptic Integral Singular Value- k_1

106. pp. 542-543 Elliptic Integral Singular Value- k_1

Sous-exemple I.1

Soit $\omega_1 \in \mathbb{R}$; on suppose $\omega_1 \neq 0$. Alors $\omega_3 = \omega_1 i$ et $\omega_2 = -\omega_1 (1 + i)$:

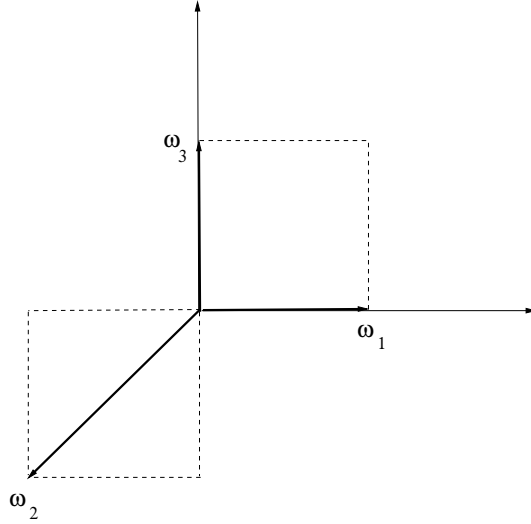


Figure 13 : Sous-exemple I.1.

Alors :

$g_2 = 2^{-8} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 \omega_1^{-4}$; $g_2 \in \mathbb{R}$; $g_2 > 0$ et $g_3 = 0$. Et on est bien dans le cas $g_2 \in \mathbb{R}$ et $g_3 \in \mathbb{R}$; $g_3 \geq 0$. De plus :

$\Delta = 2^{-24} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{24} \omega_1^{-12}$; $\Delta \in \mathbb{R}$; $\Delta > 0$. On est donc dans le cas $\Delta > 0$.

Étant donné que $T(t) = t^3 - \frac{g_2}{4} t = (t - 2^{-1} g_2^{\frac{1}{2}}) t (t + 2^{-1} g_2^{\frac{1}{2}})$, on a :

$$e_1 = 2^{-1} g_2^{\frac{1}{2}} = 2^{-5} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2},$$

$$e_2 = 0 \text{ et}$$

$$e_3 = -2^{-1} g_2^{\frac{1}{2}} = -2^{-5} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2}.$$

$$H_1^2 = 2^{-1} g_2 = 2^{-9} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 \omega_1^{-4} > 0,$$

$$H_2^2 = -2^{-2} g_2 = -2^{-10} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 \omega_1^{-4} < 0 \text{ et}$$

$$H_3^2 = 2^{-1} g_2 = 2^{-9} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 \omega_1^{-4} > 0; \text{ soit :}$$

$$H_1 = 2^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2},$$

$$H_2 = 2^{-1} g_2^{\frac{1}{2}} i = 2^{-5} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2} i \text{ et}$$

$$H_3 = 2^{-\frac{1}{2}} g_2^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{9}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\wp(u) &= 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2} \left[2^{-1} + \frac{\langle \text{cn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^2}{\langle \text{sn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \right] \\
&= 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2} \frac{\langle \text{dn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^2}{\langle \text{sn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \\
&= 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \omega_1^{-2} \left[-2^{-1} + \frac{1}{\langle \text{sn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \right] \text{ et :}
\end{aligned}$$

$$\wp'(u) = -2^{-5} \pi^{-\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^6 \omega_1^{-3} \frac{\text{cn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \text{dn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2})}{\langle \text{sn}(2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_1|^{-1} u|\frac{1}{2}) \rangle^3}.$$

On obtient à nouveau $m = k^2 = \frac{1}{2}$ donc $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $m_1 = k'^2 = \frac{1}{2}$ donc $k' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus comme $g_3 = 0$ on vérifie bien que $0 < m \leq \frac{1}{2}$ (puisque $m = \frac{1}{2}$). Et on peut à nouveau calculer $K = K'$ et $E = E'$.

On vérifie alors les relations données précédemment par [1]¹⁰⁷ pour $e_1, e_2, e_3; g_2, g_3; \Delta; \omega_1, \omega_3, \omega_2; \tau; q$. Et on obtient :

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \zeta(\omega_1) = 2^{-2} \pi \omega_1^{-1} \\
\eta_3 &= \zeta(\omega_3) = -2^{-2} \pi \omega_1^{-1} i = -\eta_1 i
\end{aligned}$$

Sous-sous-exemple I.1.1 : réseau des entiers de Gauss

On a $\omega_1 = \frac{1}{2}$ alors $\omega_3 = \frac{1}{2} i$ et $\omega_2 = -\frac{1}{2} (1 + i)$. Donc :

$$g_2 = 2^{-4} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 = 189,07272012\dots, g_3 = 0 \text{ et}$$

$$\Delta = 2^{-12} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{24} = 0,67590649\dots 10^{-7}.$$

$$e_1 = 2^{-3} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 = 6,87518581\dots, e_2 = 0 \text{ et}$$

$$e_3 = -2^{-3} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 = -6,87518581\dots$$

Et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\wp(u) &= 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \left[2^{-1} + \frac{\langle \text{cn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^2}{\langle \text{sn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \right] \\
&= 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \frac{\langle \text{dn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^2}{\langle \text{sn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \\
&= 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \left[-2^{-1} + \frac{1}{\langle \text{sn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^2} \right] \text{ et :}
\end{aligned}$$

$$\wp'(u) = -2^{-2} \pi^{-\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^6 \frac{\text{cn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \text{dn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2})}{\langle \text{sn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{4}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 u|\frac{1}{2}) \rangle^3}.$$

$$\eta_1 = \zeta(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} = 1,57079632\dots \text{ et}$$

$$\eta_3 = \zeta(\frac{1}{2} i) = -\frac{\pi}{2} i = -1,57079632\dots i = -\eta_1 i.$$

107. p. 649

Sous-sous exemple I.1.2 : cas de la lemniscate [1]¹⁰⁸

On a $\omega_1 = K = 2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = 1,85407467\dots$ alors
 $\omega_3 = Ki = 2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 i = 1,85407467\dots i$ et
 $\omega_2 = -K(1+i) = -2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 (1+i) = -1,85407467\dots (1+i)$. Donc :
 $g_2 = 1, g_3 = 0$ et $\Delta = 1$. Et $e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = 0$ et $e_3 = -\frac{1}{2}$.

Et on en déduit :

$$\wp(u) = 2^{-1} + \frac{[\text{cn}(u|\frac{1}{2})]^2}{[\text{sn}(u|\frac{1}{2})]^2} = \frac{[\text{dn}(u|\frac{1}{2})]^2}{[\text{sn}(u|\frac{1}{2})]^2} = -2^{-1} + \frac{1}{[\text{sn}(u|\frac{1}{2})]^2} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2 \frac{\text{cn}(u|\frac{1}{2}) \text{dn}(u|\frac{1}{2})}{[\text{sn}(u|\frac{1}{2})]^3}.$$

$\eta_1 = \zeta\{2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2\} = \zeta(1,85407467\dots) = \pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} = 0,42360654\dots$
 et
 $\eta_3 = \zeta\{2^{-2} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 i\} = \zeta(1,85407467\dots i) = -\pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} i$
 $= -0,42360654\dots i = -\eta_1 i$.

Sous-exemple I.2

Soit $\omega_1 = \frac{1}{2} (1-i) |\omega_2|$ alors $\omega_3 = i \omega_1 = \frac{1}{2} (1+i) |\omega_2|$ et $\omega_2 = -|\omega_2|; \omega_2 \in \mathbb{R}; \omega_2 \leq 0$. Et donc $\omega'_2 \triangleq \omega_3 - \omega_1 = i |\omega_2|$.

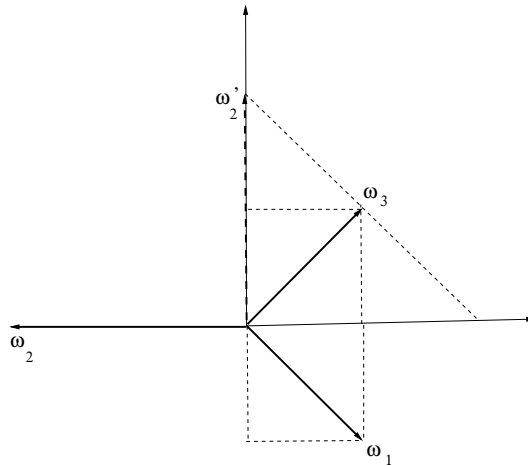


Figure 14 : Sous-exemple I.2.

Alors :

$g_2 = -2^{-6} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 |\omega_2|^{-4} < 0$ et $g_3 = 0$. Et on est bien dans le cas $g_2 \in \mathbb{R}$ et $g_3 \in \mathbb{R}; g_3 \geq 0$. De plus :

108. pp. 658-662 § 18.14

$\Delta = -2^{-18} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{24} |\omega_2|^{-12}$; $\Delta \in \mathbb{R}$; $\Delta < 0$. On est donc dans le cas $\Delta < 0$.

Étant donné que $T(t) = t^3 - \frac{g_2}{4} t = [t + 2^{-1} (-g_2)^{\frac{1}{2}} i] t [t - 2^{-1} (-g_2)^{\frac{1}{2}} i]$, on a :

$$e_1 = 2^{-1} (-g_2)^{\frac{1}{2}} i = 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 |\omega_2|^{-2} i = -\xi + \eta i,$$

$$e_2 = 0 \text{ et}$$

$$e_3 = -2^{-1} (-g_2)^{\frac{1}{2}} i = -2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 |\omega_2|^{-2} i = -\xi - \eta i; \text{ avec :}$$

$$\xi = 0 \text{ et } \eta = 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 |\omega_2|^{-2} > 0.$$

$$H_1^2 = 2^{-1} g_2 = -2^{-7} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 |\omega_2|^{-4} < 0,$$

$$H_2^2 = -2^{-2} g_2 = 2^{-8} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 |\omega_2|^{-4} > 0 \text{ et :}$$

$$H_3^2 = 2^{-1} g_2 = -2^{-7} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 |\omega_2|^{-4} < 0.$$

$$H_1 = -2^{-\frac{7}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 i |\omega_2|^{-2},$$

$$H_2 = 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 |\omega_2|^{-2} \text{ et :}$$

$$H_3 = 2^{-\frac{7}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 i |\omega_2|^{-2}$$

On en déduit :

$$\wp(u) = 2^{-4} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 |\omega_2|^{-2} \frac{1 + \text{cn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_2|^{-1} | \frac{1}{2})}{1 - \text{cn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_2|^{-1} | \frac{1}{2})} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2^{-4} \pi^{-\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^6 |\omega_2|^{-3} \frac{\text{sn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_2|^{-1} | \frac{1}{2}) \text{dn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_2|^{-1} | \frac{1}{2})^2}{(1 - \text{cn}(2^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 |\omega_2|^{-1} | \frac{1}{2}))}.$$

On obtient à nouveau $m = k_1^2 = \frac{1}{2}$ donc $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $m_1 = k'^2 = \frac{1}{2}$ donc $k' = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De plus comme $g_3 = 0$ on vérifie bien que $0 < m \leq \frac{1}{2}$ (puisque $m = \frac{1}{2}$). Et on peut à nouveau calculer $K = K'$ et $E = E'$.

On vérifie alors les relations données précédemment par [1]¹⁰⁹ pour e_1, e_2, e_3 ; g_2, g_3 ; Δ ; ω_2 et ω'_2 . Et on obtient :

$$\eta_2 \triangleq \zeta(\omega_2) = \frac{2K}{\omega_2} (E - \frac{K}{2}) = -2^{-1} \pi |\omega_2|^{-1}.$$

$$\eta'_2 \triangleq \zeta(\omega'_2) = \zeta(i|\omega_2) = -2^{-1} \pi i |\omega_2|^{-1} = i \eta_2.$$

Sous-sous-exemple I.2.1

Soit $|\omega_2| = \frac{1}{2}$. Alors $\omega_1 = \frac{1}{4} (1 - i)$, $\omega_2 = -\frac{1}{2}$ et $\omega_3 = \frac{1}{4} (1 + i)$ et donc $\omega'_2 = \frac{1}{2} i$.
Donc :

109. p. 649

$$\begin{aligned}
g_2 &= -2^{-2} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{4})]^8 = -756,29088051\dots \\
\Delta &= -2^{-6} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{24} = -0,43258015\dots 10^9. \\
e_1 &= 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 i = 13,75037163\dots i, e_2 = 0 \text{ et} \\
e_3 &= -2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 i = -13,75037163\dots i. \text{ Et on en déduit :}
\end{aligned}$$

$$\wp(u) = 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{4})]^4 \frac{1+\text{cn}(\pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 | \frac{1}{2})}{1-\text{cn}(\pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 | \frac{1}{2})} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2^{-1} \pi^{-\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^6 \frac{\text{sn}(\pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 | \frac{1}{2}) \text{dn}(\pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 | \frac{1}{2})^2}{(1-\text{cn}(\pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 | \frac{1}{2}))}.$$

$$\eta_2 \triangleq \zeta(-\frac{1}{2}) = -\pi = -3,14159265\dots$$

$$\eta_2' \triangleq \zeta(\frac{1}{2} i) - \pi i = -3,14159265\dots i = \eta_2 i.$$

Sous-sous exemple I.2.2 : cas de la pseudo-lemniscate [1]¹¹⁰

Soit $|\omega_2| = 2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = 2,62205755\dots$. Alors :

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2^{-\frac{5}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 (1-i) = 1,31102877\dots (1-i), \\
\omega_2 &= -2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 = -2,62205755\dots \text{ et} \\
\omega_3 &= 2^{-\frac{5}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 (1+i) = 1,31102877\dots (1+i) \text{ et donc :} \\
\omega_2' &= 2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 i = 2,62205755\dots i. \text{ Donc :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= -1, \Delta = -1 \\
e_1 &= \frac{1}{2} i, e_2 = 0 \text{ et } e_3 = -\frac{1}{2} i.
\end{aligned}$$

$$\wp(u) = 2^{-1} \frac{1+\text{cn}(2^{\frac{1}{2}} u | \frac{1}{2})}{1-\text{cn}(2^{\frac{1}{2}} u | \frac{1}{2})} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2^{\frac{1}{2}} \frac{\text{sn}(2^{\frac{1}{2}} u | \frac{1}{2}) \text{dn}(2^{\frac{1}{2}} u | \frac{1}{2})}{[1-\text{cn}(2^{\frac{1}{2}} u | \frac{1}{2})]^2}.$$

$$\eta_2 \triangleq \zeta\{-2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2\} = \zeta(-2,62205755\dots) = -2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} = -0,59907011\dots$$

$$\eta_2' \triangleq \zeta\{2^{-\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^2 i\} = \zeta(2,62205755\dots i) = -2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} [\Gamma(\frac{1}{4})]^{-2} i = \eta_2 i \approx -0,59907011 i.$$

110. pp. 662-663 § 18.15

Exemple II

Soit $\tau = j$ et donc $q = -e^{-\frac{\pi\sqrt{3}}{2}} i$. Alors on peut montrer que :

$$\theta_2 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{(l+\frac{1}{2})^2} = 2^{-\frac{17}{12}} 3^{\frac{1}{8}} (3^{\frac{1}{2}} - 1)^{\frac{1}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{\frac{3}{2}} = 0,51315180\dots,$$

$$\theta_3 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{l^2} = 2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{8}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{\frac{3}{2}} = 1,00866684\dots \text{ et}$$

$$\theta_4 \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{l^2} = 2^{-\frac{17}{12}} 3^{\frac{1}{8}} (3^{\frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{\frac{3}{2}} = 0,99133315\dots$$

Et on a la relation $\theta_2^4 + \theta_4^4 = \theta_3^4 = 2^{-\frac{8}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-4} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 = 1,03512066\dots$. On en déduit :

$$k = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2} = k_3 = 2^{-\frac{3}{2}} (3^{\frac{1}{2}} - 1) = \sin \frac{\pi}{12} = 0,25881904\dots \text{ et}$$

$$m = \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4} = k_3^2 = 2^{-2} (2 - 3^{\frac{1}{2}}) = 0,06698729\dots,$$

$$k' = \frac{\theta_4^2}{\theta_3^2} = 2^{-\frac{3}{2}} (3^{\frac{1}{2}} + 1) = 0,96592582\dots \text{ et}$$

$$m_1 = \frac{\theta_4^4}{\theta_3^4} = k'^2 = 2^{-2} (2 + 3^{\frac{1}{2}}) = 0,93301270\dots$$

Cette valeur k_3 du paramètre k correspond à la troisième des valeurs singulières [19]¹¹¹. Alors :

$$K = \frac{\pi}{2} \theta_3^2 = 2^{-\frac{7}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 = 2^{-1} 3^{-\frac{3}{4}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{6}) [\Gamma(\frac{2}{3})]^{-1} = 1,59814200\dots$$

[1]¹¹², [3]¹¹³ et [19]¹¹⁴.

$$K' = \sqrt{3} K = 2^{-\frac{7}{3}} 3^{\frac{3}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 = 2,76806314\dots$$

$$E = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \frac{1}{K} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} K = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})} + 2 \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\right]$$

= 1,54415049... [19]¹¹⁵.

$$E' = \frac{\pi\sqrt{3}}{4} \frac{1}{K'} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} K' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[3^{\frac{3}{4}} \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6})} + \frac{\sqrt{3}-1}{23^{\frac{3}{4}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right]$$

= 1,07640511... [19]¹¹⁶. Donc :

$$6E + (4m - 5)K = \frac{3\pi}{2\sqrt{3}} \frac{1}{K}.$$

Et on vérifie que $KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2} = 1,57079632\dots$

$$G_2(j) = 0 \text{ et } G_3(j) = 2^{-8} 5^{-1} 7^{-1} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{18} = 5,86303169\dots$$

111. pp. 540-543 Elliptic Integral Singular Value et Elliptic Integral Singular Value- k_3

112. p. 653 éq. (18.13.15)

113. p. 28 Exercice 6 d

114. p. 540 Elliptic Integral Singular Value éq. (6)

115. p. 543 Elliptic Integral Singular Value- k_3 éq. (8)

116. p. 543 Elliptic Integral Singular Value- k_3 éq. (9)

$$g_2 = 0, g_3 = 2^{-12} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{18} \omega_1^{-6} \text{ et } \Delta = -2^{-24} 3^3 \pi^{-12} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{36} \omega_1^{-12}.$$

Sous-exemple II.1

On suppose $|\omega_2| \neq 0$. Soit $\omega_1 = -|\omega_2| j$ alors $\omega_3 = -|\omega_2| j^2$ et $\omega_2 = -|\omega_2|$; $\omega_2 \in \mathbb{R}; \omega_2 < 0$. Et donc $\omega'_2 \triangleq \omega_3 - \omega_1 = \sqrt{3} |\omega_2| i$:

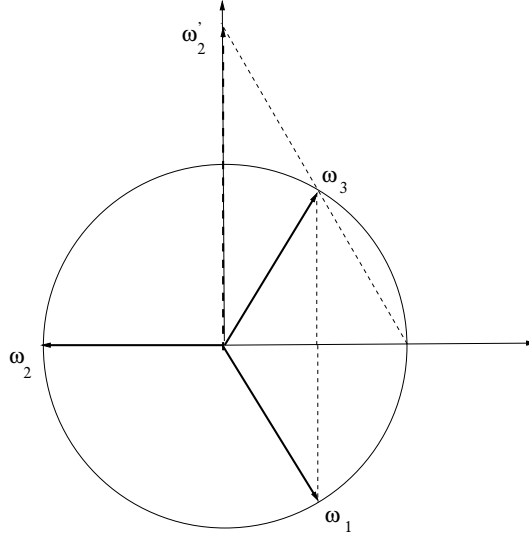


Figure 15 : Sous-exemple II.1.

Alors :

$g_2 = 0$ et $g_3 = 2^{-12} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{18} |\omega_2|^{-6} > 0$. Et on est bien dans le cas $g_2 \in \mathbb{R}$ et $g_3 \in \mathbb{R}; g_3 > 0$. De plus :

$\Delta = -2^{-24} 3^3 \pi^{-12} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{36} |\omega_2|^{-12}$; $\Delta \in \mathbb{R}; \Delta < 0$. On est donc dans le cas $\Delta < 0$.

Étant donné que $T(t) = t^3 - \frac{g_3}{4} = [(t - 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} j)(t - 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}})(t - 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} j^2)]$, on a :

$$e_1 = 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} j = 2^{-\frac{14}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} j = -\xi + \eta i,$$

$$e_2 = 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{14}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} \text{ et}$$

$$e_3 = 2^{-\frac{2}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} j^2 = 2^{-\frac{14}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} j^2 = -\xi - \eta i; \text{ avec :}$$

$$\xi = 2^{-\frac{5}{3}} g_3^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{17}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} > 0 \text{ et}$$

$$\eta = 2^{-\frac{5}{3}} 3^{\frac{1}{2}} g_3^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{17}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} > 0.$$

$$H_1^2 = 2^{-\frac{4}{3}} 3 g_3^{\frac{2}{3}} j^2 = 2^{-\frac{28}{3}} 3 \pi^{-4} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{12} |\omega_2|^{-4} j^2,$$

$$H_2^2 = 2^{-\frac{4}{3}} 3 g_3^{\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{28}{3}} 3 \pi^{-4} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{12} |\omega_2|^{-4} \text{ et :}$$

$$H_3^2 = 2^{-\frac{4}{3}} 3 g_3^{\frac{2}{3}} j = 2^{-\frac{28}{3}} 3 \pi^{-4} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{12} |\omega_2|^{-4} j.$$

$$H_1 = -2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} g_3^{\frac{1}{3}} j = -2^{-\frac{14}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} j,$$

$$H_2 = 2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} g_3^{\frac{1}{3}} = 2^{-\frac{14}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} > 0 \text{ et :}$$

$$H_3 = -2^{-\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} g_3^{\frac{1}{3}} j^2 = -2^{-\frac{14}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} j^2.$$

On en déduit :

$$\wp(u) = 2^{-\frac{14}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 |\omega_2|^{-2} \left(1 + 3^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \text{cn}(2^{-\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 |\omega_2|^{-1} u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|)}{1 - \text{cn}(2^{-\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 |\omega_2|^{-1} u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|)} \right) \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2^{-5} 3^{\frac{3}{4}} \pi^{-3} [\Gamma(\frac{1}{3})]^9 |\omega_2|^{-3} \frac{\text{sn}(2^{-\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 |\omega_2|^{-1} u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|) \text{ dn}(2^{-\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 |\omega_2|^{-1} u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|)^2}{(1 - \text{cn}(2^{-\frac{4}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 |\omega_2|^{-1} u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|))}.$$

On obtient à nouveau $m = k_3^2 = 2^{-2} (2 - 3^{\frac{1}{2}})$ donc $k_3 = 2^{-\frac{3}{2}} (3^{\frac{1}{2}} - 1)$ et $m_1 = k'^2 = 2^{-2} (2 + 3^{\frac{1}{2}})$ donc $k' = 2^{-\frac{3}{2}} (3^{\frac{1}{2}} + 1)$. De plus comme $g_3 > 0$ on vérifie bien que $0 < m \leq \frac{1}{2}$. Et on peut à nouveau calculer K et K' et E et E' .

On vérifie alors les relations données précédemment par [1]¹¹⁷ pour $e_1, e_2, e_3; g_2, g_3; \Delta; \omega_2$ et ω'_2 . Et on obtient :

$$\eta_2 \triangleq \zeta(\omega_2) = -2^{-1} 3^{-\frac{1}{2}} \pi |\omega_2|^{-1}.$$

$$\eta'_2 \triangleq \zeta(\omega'_2) = \zeta(\sqrt{3} |\omega_2|) i = -2^{-1} \pi |\omega_2|^{-1} i = \sqrt{3} \eta_2 i.$$

Sous-sous-exemple II.1.1 : réseau des entiers d'Eisenstein

Soit $|\omega_2| = \frac{1}{2}$. Alors $\omega_1 = -\frac{1}{2} j, \omega_2 = -\frac{1}{2}$ et $\omega_3 = -\frac{1}{2} j^2$ et donc $\omega'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Donc :

$$g_3 = 2^{-6} \pi^{-6} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{18} = 820,82443707\dots,$$

$$\Delta = -2^{-12} 3^3 \pi^{-12} [\Gamma(\frac{1}{3})]^{36} = 0,18191324\dots 10^8,$$

$$e_1 = -\xi + \eta i, e_2 = 2^{-\frac{8}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 = 5,89834396\dots \text{ et } e_3 = -\xi - \eta i; \text{ avec :}$$

$$\xi = 2^{-\frac{11}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 = 2,94917198\dots,$$

$$\eta = 2^{-\frac{11}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 = 5,10811571\dots \text{ Et on en déduit :}$$

$$\wp(u) = 2^{-\frac{8}{3}} \pi^{-2} [\Gamma(\frac{1}{3})]^6 \left(1 + 3^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \text{cn}(2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|)}{1 - \text{cn}(2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 u |2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})|)} \right) \text{ et :}$$

117. p. 649

$$\wp'(u) = \frac{-2^{-2} 3^{\frac{3}{4}} \pi^{-3} [\Gamma(\frac{1}{3})]^9 \operatorname{sn}\{2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})\} \operatorname{dn}\{2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})\}^2}{(1 - \operatorname{cn}\{2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{4}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})\})^2}.$$

$$\eta_2 \triangleq \zeta(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$\eta_2' \triangleq \zeta(\frac{\sqrt{3}}{2} i) = -\pi i = \sqrt{3} \eta_2 i.$$

Sous-sous-exemple II.1.2 : Cas anharmonique [1] ¹¹⁸

Soit $|\omega_2| = 2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 = 1,52995403\dots$ Alors :

$$\omega_1 = -2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 j = -1,52995403\dots j,$$

$$\omega_2 = -2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 = -1,52995403\dots \text{ et}$$

$$\omega_3 = -2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 j^2 = -1,52995403\dots j^2 \text{ et donc}$$

$$\omega_2' = 2^{-2} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 i = 2,64995812\dots i. \text{ Donc :}$$

$$g_3 = 1,$$

$$\Delta = -3^3 = -27,$$

$$e_1 = -\xi + \eta i, e_2 = 2^{-\frac{2}{3}} = 0,62996052\dots \text{ et } e_3 = -\xi - \eta i; \text{ avec :}$$

$$\xi = 2^{-\frac{5}{3}} = 0,31498026\dots,$$

$$\eta = 2^{-\frac{5}{3}} 3^{\frac{1}{2}} = 0,54556181\dots \text{ Et on en déduit :}$$

$$\wp(u) = 2^{-\frac{2}{3}} \left\{ 1 + 3^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \operatorname{cn}[2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})]}{1 - \operatorname{cn}[2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})]} \right\} \text{ et :}$$

$$\wp'(u) = -2 3^{\frac{3}{4}} \frac{\operatorname{sn}[2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})] \operatorname{dn}[2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})]}{(1 - \operatorname{cn}[2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{4}} u | 2^{-2} (2-3^{\frac{1}{2}})])^2}.$$

$$\eta_2 \triangleq \zeta\{-2^{-2} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3\} = \zeta(-1,52995403\dots) = -2 3^{-\frac{1}{2}} \pi^2 [\Gamma(\frac{1}{3})]^{-3} \approx -0,5927627.$$

$$\eta_2' \triangleq \zeta\{2^{-2} 3^{\frac{1}{2}} \pi^{-1} [\Gamma(\frac{1}{3})]^3 i\} = \zeta(2,64995812\dots i) = -2 \pi^2 [\Gamma(\frac{1}{3})]^{-3} i = \sqrt{3} \eta_2 i \approx -1,0266951 i.$$

118. pp. 652-657 § 18.13

Chapitre 10

Sixième partie : les logiciels

10.1 Mathematica

Mathematica utilise l'argument u , le paramètre m de préférence au module k , le "nome" q , l'amplitude φ (notée en fait ϕ), les invariants $\{g_2, g_3\}$, les demi-périodes $\{\omega_1, \omega_3\}$ (notées en fait ω, ω') et le rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ (donc noté $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$).

Fonction	Résultat
EllipticNomeQ [m]	donne q en fonction de m
InverseEllipticNomeQ [q]	donne m en fonction du "nome" q
WeierstrassInvariants [{ ω, ω' }]	donne $\{g_2, g_3\}$ en fonction de $\{\omega_1, \omega_3\}$
WeierstrassHalfPeriods [{ g_2, g_3 }]	donne $\{\omega_1, \omega_3\}$ en fonction de $\{g_2, g_3\}$

10.1.1 Intégrales elliptiques

Fonction	Résultat
EllipticK [m]	int. ellip. compl. de prem. esp. $\tilde{K}(m)$
EllipticF [φ, m]	int. ellip. incompl. de prem. esp. $F(\varphi m)$
EllipticE [m]	int. ellip. compl. de deux. esp. $\tilde{E}(m)$
EllipticE [φ, m]	int. ellip. incompl. de deux. esp. $D(\varphi m)$
EllipticPi [n, m]	int. ellip. compl. de trois. esp. $\tilde{\Pi}(n m)$
EllipticPi [n, φ, m]	int. ellip. incompl. de trois. esp. $\Pi(n, \varphi m)$
JacobiZeta [φ, m]	fonction zêta de Jacobi $Z(\varphi m)$

10.1.2 Fonctions elliptiques

Fonction	Résultat
EllipticTheta [a, u, q]	$\theta_a(u, q); a = 1, 2, 3, 4$
EllipticThetaPrime [a, u, q]	$\theta'_a(u, q); a = 1, 2, 3, 4$
NevilleThetaS [u, m]	$\theta_s(u m)$
NevilleThetaC [u, m]	$\theta_c(u m)$
NevilleThetaD [u, m]	$\theta_d(u m)$
NevilleThetaN [u, m]	$\theta_n(u m)$

Fonction	Résultat
JacobiCN [u, m]	$\text{cn}(u m)$
JacobiSN [u, m]	$\text{sn}(u m)$
JacobiDN [u, m]	$\text{dn}(u m)$
JacobiCD [u, m]	$\text{cd}(u m)$
JacobiSD [u, m]	$\text{sd}(u m)$
JacobiND [u, m]	$\text{nd}(u m)$
JacobiDC [u, m]	$\text{dc}(u m)$
JacobiNC [u, m]	$\text{nc}(u m)$
JacobiSC [u, m]	$\text{sc}(u m)$
JacobiNS [u, m]	$\text{ns}(u m)$
JacobiDS [u, m]	$\text{ds}(u m)$
JacobiCS [u, m]	$\text{cs}(u m)$
JacobiAmplitude [u, m]	$\text{am}(u m)$

Fonction	Résultat
WeierstrassSigma [u, {g ₂ , g ₃ }]	$\sigma(u; g_2, g_3)$
WeierstrassZeta [u, {g ₂ , g ₃ }]	$\zeta(u; g_2, g_3)$
WeierstrassP [u, {g ₂ , g ₃ }]	$\wp(u; g_2, g_3)$
WeierstrassPPrime [u, {g ₂ , g ₃ }]	$\wp'(u; g_2, g_3)$

10.1.3 Fonctions elliptiques inverses

Fonction	Résultat
InverseJacobiCN [y, m]	$\text{cn}^{-1}(y m)$
InverseJacobiSN [y, m]	$\text{sn}^{-1}(y m)$
InverseJacobiDN [y, m]	$\text{dn}^{-1}(y m)$
InverseJacobiCD [y, m]	$\text{cd}^{-1}(y m)$
InverseJacobiSD [y, m]	$\text{sd}^{-1}(y m)$
InverseJacobiND [y, m]	$\text{nd}^{-1}(y m)$
InverseJacobiDC [y, m]	$\text{dc}^{-1}(y m)$
InverseJacobiNC [y, m]	$\text{nc}^{-1}(y m)$
InverseJacobiSC [y, m]	$\text{sc}^{-1}(y m)$
InverseJacobiNS [y, m]	$\text{ns}^{-1}(y m)$
InverseJacobiDS [y, m]	$\text{ds}^{-1}(y m)$
InverseJacobiCS [y, m]	$\text{cs}^{-1}(y m)$
InverseWeierstrassP [y, {g ₂ , g ₃ }]	donne u avec $\wp(u; g_2, g_3) = y$

10.1.4 Intégrales et fonctions elliptiques généralisées

Fonction	Résultat
ArithmeticGeometricMean [a, b]	moyenne arithmetico-géométrique de a et b
EllipticExp [u, {a, b}]	exp. géné. de la courbe ellipt. d'éq. $y^3 = x^3 + ax^2 + bx$
EllipticLog [{x, y}, {a, b}]	log. géné. de la courbe ellipt. d'éq. $y^3 = x^3 + ax^2 + bx$

10.1.5 Fonctions elliptiques modulaires

Fonction	Résultat
DedekindEta [τ]	fonction éta de Dedekind
KleinInvariantJ [τ]	fonction mod. de l'inva. de Klein $J(\tau)$
ModularLambda [τ]	fonction mod. lambda $\lambda(\tau)$

Remarque : il y a aussi SiegelTheta(Ω, s).

10.2 Maple

Maple utilise l'argument u , le module k de préférence au paramètre m , le "nome" q , l'amplitude φ (notée en fait ϕ), les invariants $\{g_2, g_3\}$, les demi-périodes $\{\omega_1, \omega_3\}$ (notées en fait ω, ω') et le rapport $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ (donc noté $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$).

10.2.1 Intégrales elliptiques

Fonction	Résultat
EllipticK(k)	int. ellip. compl. de prem. esp. $K(k)$
EllipticCK(k)	int. ellip. compl. complém. de prem. esp. $K(k')$
EllipticF(phi, k)	int. ellip. incompl. de prem. esp. $F(\varphi, k)$
EllipticE(k)	int. ellip. compl. de deux. esp. $E(k)$
EllipticCE(k)	int. ellip. compl. complém. de deux. esp. $E(k')$
EllipticE(phi, k)	int. ellip. incompl. de deux. esp. $D(\varphi, k)$
EllipticPi(n, k)	int. ellip. compl. de trois. esp. $\tilde{\Pi}(n, k)$
EllipticCPi(n, k)	int. ellip. compl. complém. de trois. esp. $\tilde{\Pi}(n, k')$
EllipticPi(n, phi, k)	int. ellip. incompl. de trois. esp. $\Pi(n, \varphi, k)$

10.2.2 Fonctions elliptiques

Fonction	Résultat
JacobiTheta1(u, q)	$\theta_1(u, q)$
JacobiTheta2(u, q)	$\theta_2(u, q)$
JacobiTheta3(u, q)	$\theta_3(u, q)$
JacobiTheta4(u, q)	$\theta_4(u, q)$

Fonction	Résultat
JacobiCN(u, k)	$\text{cn}(u k^2)$
JacobiSN(u, k)	$\text{sn}(u k^2)$
JacobiDN(u, k)	$\text{dn}(u k^2)$
JacobiCD(u, k)	$\text{cd}(u k^2)$
JacobiSD(u, k)	$\text{sd}(u k^2)$
JacobiND(u, k)	$\text{nd}(u k^2)$
JacobiDC(u, k)	$\text{dc}(u k^2)$
JacobiNC(u, k)	$\text{nc}(u k^2)$
JacobiSC(u, k)	$\text{sc}(u k^2)$
JacobiNS(u, k)	$\text{ns}(u k^2)$
JacobiDS(u, k)	$\text{ds}(u k^2)$
JacobiCS(u, k)	$\text{cs}(u k^2)$
JacobiAM(u, k)	$\text{am}(u, k^2)$

Fonction	Résultat
WeierstrassSigma(u, g ₂ , g ₃)	$\sigma(u; g_2, g_3)$
WeierstrassZeta(u, g ₂ , g ₃)	$\zeta(u; g_2, g_3)$
WeierstrassP(u, g ₂ , g ₃)	$\wp(u; g_2, g_3)$
WeierstrassPPrime(u, g ₂ , g ₃)	$\wp'(u; g_2, g_3)$

10.2.3 Principales Fonctions elliptiques inverses

Fonction	Résultat
InverseJacobiCN(y, k)	$\text{cn}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiSN(y, k)	$\text{sn}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiDN(y, k)	$\text{dn}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiCD(y, k)	$\text{cd}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiSD(y, k)	$\text{sd}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiND(y, k)	$\text{nd}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiDC(y, k)	$\text{dc}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiNC(y, k)	$\text{nc}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiSC(y, k)	$\text{sc}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiNS(y, k)	$\text{ns}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiDS(y, k)	$\text{ds}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiCS(y, k)	$\text{cs}^{-1}(y k^2)$
InverseJacobiAM(y, k)	$\text{am}^{-1}(y k^2)$

10.3 Matlab

10.3.1 Matlab de base

Matlab utilise l'argument u , le paramètre m de préférence au module k , le "nome" q , et l'amplitude φ .

Intégrales elliptiques

Fonction	Résultat
$K=\text{ellipke}(m)$	int. ellip. compl. de prem. esp. $\tilde{K}(m)$
$[K, E]=\text{ellipke}(m)$	int(s). ellip(s). compl(s). de prem. et deux. esp. $\tilde{K}(m)$ et $\tilde{E}(m)$
$[K, E]=\text{ellipke}(m, \text{tol})$	idem avec une précision tol

Fonctions elliptiques

Fonction	Résultat
$[SN, CN, DN]=\text{ellipj}(u, m)$	fonctions de Jacobi $\text{sn}(u m)$, $\text{cn}(u m)$ et $\text{dn}(u m)$,
$[SN, CN, DN]=\text{ellipj}(u, m, \text{tol})$	idem avec une précision tol

10.3.2 Matlab avec les fonctions MuPAD "MuPad Notebook Interface"

Intégrales elliptiques

Fonction	Résultat
$[K, E]=\text{ellipke}(m)$	int(s). ellip(s). compl(s). de prem. et deux. esp. $\tilde{K}(m)$ et $\tilde{E}(m)$
$\text{ellipticK}(m)$	int. ellip. compl. de prem. esp. $\tilde{K}(m)$
$\text{ellipticCK}(m)$	int. ellip. compl. complém. de prem. esp. $\tilde{K}(m_1)$
$\text{ellipticF}(\text{phi}, m)$	int. ellip. incompl. de prem. esp. $F(\varphi m)$
$\text{ellipticE}(m)$	int. ellip. compl. de deux. esp. $\tilde{E}(m)$
$\text{ellipticCE}(m)$	int. ellip. compl. complém. de deux. esp. $\tilde{E}(m_1)$
$\text{ellipticPi}(n, m)$	int. ellip. compl. de trois. esp. $\tilde{\Pi}(n m)$
$\text{ellipticPi}(n, \text{phi}, m)$	int. ellip. incompl. de trois. esp. $\Pi(n, \varphi m)$
$\text{ellipticCPi}(n, m)$	int. ellip. compl. complém. de trois. esp. $\tilde{\Pi}(n m_1)$
$\text{ellipticNome}(m)$	ellip. "nome" $q(m)$

Fonctions elliptiques

Fonction	Résultat
jacobiCN(u, m)	cn(u m)
jacobiSN(u, m)	sn(u m)
jacobiDN(u, m)	dn(u m)
jacobiCD(u, m)	cd(u m)
jacobiSD(u, m)	sd(u m)
jacobiND(u, m)	nd(u m)
jacobiDC(u, m)	dc(u m)
jacobiNC(u, m)	nc(u m)
jacobiSC(u, m)	sc(u m)
jacobiNS(u, m)	ns(u m)
jacobiDS(u, m)	ds(u m)
jacobiCS(u, m)	cs(u m)
jacobiAM(u, m)	am(u, m)
jacobiZeta(u, m)	Z(u, m)

10.3.3 Matlab avec la boîte à outils “Symbolic Math Toolbox”

- “package” agm.m : fonction [a,b,c,n]=agm(a0,b0,c0,tol). Calcule la moyenne arithmetico-géométrique de A et B [1]¹.
- “package” ellipj.m : fonction [sn,cn,dn,am]= ellipj(u,m,tol). Calcule les fonctions de Jacobi sn, cn, dn et l’amplitude de Jacobi am pour l’argument u (réel), le paramètre m et la précision tol. [1]².
- “package” ellipji.m : fonction [sni,cni,dni]=ellipji(u,m,tol). Calcule les fonctions de Jacobi sn, cn, dn pour l’argument u (complexe), le paramètre m et la précision tol. [1]³.
- “package” elliptic12.m : fonction [F,E,Z]=elliptic12(phi,m,tol). Calcule les intégrales elliptiques incomplètes de première, deuxième et troisième espèce et la fonction dzéta de Jacobi pour l’amplitude phi (réelle), le paramètre m et la précision tol.
- “package” elliptic12i.m : fonction [Fi,Ei,Zi]=elliptic12i(u,m,tol). Calcule les intégrales elliptiques incomplètes de première, deuxième et troisième

1. pp. 598-599 § 17.6

2. pp. 569-576 et p. 590

3. pp. 569-576 et p. 590

espèce et la fonction dzéta de Jacobi pour l'amplitude ϕ (complexe), le paramètre m et la précision tol .

- "package" `elliptic3.m` : fonction $\text{Pi} = \text{elliptic3}(\phi, m, n)$. Calcule l'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce pour l'amplitude ϕ (réelle), le paramètre m et le paramètre n ($0 < n < 1$) (voir chapitre sur les intégrales elliptiques ci-devant).

- "package" `inversenome.m` : fonction $m = \text{inversenome}(q)$. Calcule le paramètre m en fonction de "nome" q .

- "package" `jacobiThetaEta.m` : fonction $[\text{Th}, \text{H}] = \text{jacobiThetaEta}(u, m, \text{tol})$. Calcule les fonctions θ et η de Jacobi pour l'argument u , le paramètre m et la précision tol .

- "package" `nomeq.m` : fonction $\text{NomeQ} = \text{nomeq}(m, \text{tol})$. Calcule le "nome" q en fonction du paramètre m et de la précision tol .

- "package" `theta.m` : fonction $\text{Th} = \text{theta}(\text{type}, u, m, \text{tol})$. Calcule les 4 types de fonctions θ de Jacobi en fonction de l'argument u , du paramètre m et de la précision tol .

Chapitre 11

Annexe A

- 1 $\int_x^b \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) : 0 < x < b$
- 2 $\int_0^x \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{sn}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) ; x < b < a$
- 3 $\int_x^a \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{dn}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle| \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) : b < x < a$
- 4 $\int_x^b \frac{dt}{[(a^2-t^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{cd}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) ; x < b < a$
- 5 $\int_0^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(b^2-t^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sd}^{-1}\left[\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}x}{ab} \middle| \frac{b^2}{a^2+b^2}\right] : 0 < x < b$
- 6 $\int_b^x \frac{dt}{[(a^2-t^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{nd}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) : b < x < a$
- 7 $\int_a^x \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{dc}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) : b < a < x$
- 8 $\int_b^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{nc}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{a^2}{a^2+b^2}\right) : 0 < b < x$
- 9 $\int_0^x \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{sc}^{-1}\left(\frac{x}{b} \middle| \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) : b < a$
- 10 $\int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2-a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{ns}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle| \frac{b^2}{a^2}\right) : b < a < x$
- 11 $\int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2-b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{ds}^{-1}\left[\frac{x}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}} \middle| \frac{a^2}{a^2+b^2}\right] : 0 < b < x$
- 12 $\int_x^\infty \frac{dt}{[(t^2+a^2)(t^2+b^2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a} \operatorname{cs}^{-1}\left(\frac{x}{a} \middle| \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) : b < a$

Chapitre 12

Annexe B

$$T = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma); \gamma < \beta < \alpha$$

$$\nu = \frac{2}{(\alpha - \gamma)^{\frac{1}{2}}} \quad m = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \quad m_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$$

$$\bullet 1 \quad \int_{\alpha}^y \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{cn}^{-1}\left[\left(\frac{\alpha - \beta}{y - \beta}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m\right]$$

$$\bullet 2 \quad \int_y^{\alpha} \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{cn}^{-1}\left[\left(\frac{y - \beta}{\alpha - \beta}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m_1\right]$$

$$\bullet 3 \quad \int_y^{\gamma} \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{cn}^{-1}\left[\left(\frac{\beta - \gamma}{\beta - y}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m_1\right]$$

$$\bullet 4 \quad \int_y^{\infty} \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{sn}^{-1}\left[\left(\frac{\alpha - \gamma}{y - \gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m\right]$$

$$\bullet 5 \quad \int_{-\infty}^y \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{sn}^{-1}\left[\left(\frac{\alpha - \gamma}{\alpha - y}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m_1\right]$$

$$\bullet 6 \quad \int_{\gamma}^y \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{sn}^{-1}\left[\left(\frac{y - \gamma}{\beta - \gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m\right]$$

$$\bullet 7 \quad \int_y^{\beta} \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{dn}^{-1}\left[\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - y}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m\right]$$

$$\bullet 8 \quad \int_{\beta}^y \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \nu \operatorname{dn}^{-1}\left[\left(\frac{\beta - \gamma}{y - \gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \middle| m_1\right]$$

Chapitre 13

Annexe C

$$T = (t - \alpha)(t^2 - 2bt + c), c - b^2 > 0, H^2 = \alpha^2 - 2\alpha b + c$$

$$m = \frac{H - \alpha + b}{2H}, m_1 = \frac{H + \alpha - b}{2H}$$

- 1 $\int_y^\infty \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{y - H - \alpha}{y + H - \alpha} | m\right)$
- 2 $\int_{-\infty}^y \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{\alpha - H - y}{\alpha + H - y} | m_1\right)$
- 3 $\int_\alpha^y \frac{dt}{T^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{H + \alpha - y}{H - \alpha + y} | m\right)$
- 4 $\int_y^\alpha \frac{dt}{(-T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} \operatorname{cn}^{-1}\left(\frac{H - \alpha + y}{H + \alpha - y} | m_1\right)$

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz et I.A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover. New York. 9^e éd. 1972.
- [2] M. Audin. *Un cours sur les fonctions spéciales*. <http://www-irma.u-strasbg.fr/maudin>.
- [3] J.M. Borwein et P.B. Borwein. *Pi and the AGM. A study in analytical number theory and computational complexity*. John Wiley and Sons, Inc. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto. 1987.
- [4] A. Bouvier et M. George sous la direction de F. Le Lionnais. *Dictionnaire des mathématiques*. PUF. Paris. 1983.
- [5] G. Cagnac, E. Ramis et J. Commeau. *Nouveau cours de mathématiques spéciales. Tome 2. Analyse*. Masson et Cie. Paris. 1966.
- [6] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann. Paris. 1961.
- [7] R. Cazenave. *Intégrales et fonctions elliptiques usuelles*. Annales des télécommunications. Vol. 9. No. 4. Avril 1954.
- [8] E. van Fossen Conrad et Ph. Flajolet. *The Fermat cubic, elliptic functions, continued fractions, and a combinatorial excursion*. 54^e Séminaire Lotharingien de Combinatoire. Lucelle. Avril 2005.
- [9] O. Diao. *Introduction élémentaire aux fonctions thêta*. Groupe de travail sur les invariants. Université de Rennes 1. 9 mars 2012.
- [10] Y. Hellegouarch. *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*. Masson. Paris. 1997.
- [11] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM) by the Mathematical Society of Japan*. 2^e édition. The MIT Press. Cambridge, Massachusetts, Londres, Angleterre. 1960.
- [12] S. Lang. *Elliptic functions*. Springer-Verlag. New-York. 2^e édition. 1987.
- [13] D.F. Lawden. *Elliptic functions and applications*. Springer-Verlag. NewYork, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, hong Kong. 1989.

- [14] A. Lesfari. *Fonctions et intégrales elliptiques*. Surveys in Mathematics and its Applications. Vol. 3. pp. 27-65. 2008.
- [15] L.M. Milne-Thomson. *Jacobian elliptic function tables*. Dover. New-York. 1950.
- [16] J-P. Serre. *Cours d'arithmétique*. Collection Sup. PUF. Paris. 1970.
- [17] D.A. Stefen. *Les coefficients de Fourier de la forme modulaire Δ . La fonction de Ramanujan $\tau(n)$* . DMA EPFL. 1998. daniel.steffen@dma.epfl.ch.
- [18] G. Valiron. *Théorie des fonctions. Cours d'analyse mathématique*. Masson. Paris. 1990.
- [19] E. W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press. Boca Raton, Londres, New-York, Washington D.C.. 1999.
- [20] E.T. Whittaker et G.N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press. 1927.
- [21] Wikipedia.