



# Filtre de Kalman. Comparaison avec le filtre de Wiener.

Marc Renaud

► **To cite this version:**

Marc Renaud. Filtre de Kalman. Comparaison avec le filtre de Wiener.. Rapport LAAS n° 12168. 2012, 144p. <hal-01523417>

**HAL Id: hal-01523417**

**<https://hal.laas.fr/hal-01523417>**

Submitted on 16 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Filtre de Kalman**

## **Comparaison avec le filtre de Wiener**

Marc RENAUD

E-mail : renaud@laas.fr

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse,  
France

LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche  
31077 Toulouse Cedex 4 - France



# Introduction

Le but de ce rapport de recherche est de présenter, avec des notations unifiées, les *filtres discret et continu de Kalman* et de les comparer avec leurs versions asymptotiques : *les filtres de Wiener*.

Pour cela nous commençons par rappeler, dans un premier chapitre, les notions de vecteur aléatoire et de vecteur aléatoire conditionné à la réalisation d'un autre vecteur aléatoire que l'on peut qualifier d'observation. Nous rappelons, en particulier, les notions de densité de probabilité, de moyenne et de covariance pour les vecteurs aléatoires et nous les étendons aux vecteurs aléatoires conditionnés à la réalisation d'une observation. Nous indiquons les formules d'autocovariance et d'intercovariance conditionnelles utiles pour la suite. Finalement nous établissons, dans ce premier chapitre, le *principe d'orthogonalité* qui est à la base du calcul des filtres de Kalman et Wiener. Ce principe exprime la non-corrélation entre d'une part la différence d'un vecteur aléatoire et de sa moyenne conditionnelle à une observation et d'autre part une fonction quelconque de cette observation. Nous insistons plus particulièrement sur le cas où tous les vecteurs aléatoires sont gaussiens car c'est une hypothèse de calcul des filtres de Kalman et Wiener. Cependant, pour expliciter les notions précédentes, nous donnons un exemple, pour lequel les vecteurs aléatoires ne sont pas gaussiens mais pour lequel nous effectuons tous les calculs analytiques nécessaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'estimation d'un vecteur aléatoire connaissant une observation. Plus précisément nous présentons les estimateurs – aléatoires – qui dépendent de cette observation et les estimées – déterministes – qui dépendent de la réalisation de cette observation. Nous calculons les estimateurs optimaux et les estimées optimales, au sens des moindres carrés, dans le cas général puis dans le cas particulier où ils sont affines. Puis nous généralisons les résultats obtenus au cas des *signaux* vectoriels aléatoires, qui, par définition, dépendent du temps : nous calculons alors les estimateurs optimaux et les estimées optimales, qui dépendent alors du temps, toujours au sens des moindres carrés. Nous montrons que l'estimateur optimal satisfait la célèbre *équation intégrale de Wiener-Hopf* que nous rappelons. La résolution de cette équation, en général très difficile dans le cas de signaux vectoriels aléatoires quelconques, conduira, dans le cas où tous ces signaux sont gaussiens au filtre continu de Kalman (cf. cinquième chapitre). Nous terminons ce chapitre par un exemple de calcul des estimateurs optimaux et des estimées optimales, dans le cas général puis dans le cas particulier où ils sont affines, pour des signaux aléatoires non gaussiens.

Le troisième chapitre expose le calcul du filtre discret de Kalman qui consiste à estimer le signal vectoriel d'état aléatoire d'un processus discret à l'aide d'un signal vectoriel d'observation discret. Les signaux vectoriels d'état et d'observation sont supposés gaussiens. Ce filtre est obtenu grâce aux résultats du deuxième chapitre dans le cas de signaux vectoriels aléatoires gaussiens. Les équations du filtre discret pour les estimées sont obtenues tout d'abord sous deux formes légèrement différentes. Puis ces équations sont données sous une troisième forme avec des termes prédits grâce à la notion d'innovation.

Le quatrième chapitre explique le passage du filtre discret au filtre continu de Kalman. Nous avons repris l'excellent exposé de Kailath et al [5], bien entendu avec nos notations. Les équations du filtre continu pour les estimées sont obtenues sous deux formes différentes : avec termes non prédits et avec termes prédits.

Le cinquième chapitre expose le calcul du filtre continu de Kalman qui consiste à estimer le signal vectoriel d'état aléatoire d'un processus continu à l'aide d'un signal vectoriel d'observation continu. Les signaux vectoriels d'état et d'observation sont supposés gaussiens. Ce filtre est obtenu grâce à la résolution de l'équation intégrale de Wiener-Hopf obtenue dans le deuxième chapitre. Les équations du filtre continu pour les estimées sont évidemment identiques à celles du chapitre précédent et les deux formes obtenues, avec termes non prédits et avec termes prédits conduisent à deux schémas différents du processus, de l'observation et de l'estimation. Le calcul simplifié du filtre est également présenté dans le cas invariant et stationnaire pour un signal vectoriel d'état mais un signal scalaire d'observation<sup>1</sup> et son comportement asymptotique vers le filtre de Wiener établi. Un exemple de calcul numérique de ces deux filtres est donné. Finalement dans le cas où les signaux d'état et d'observation sont tous deux scalaires le calcul littéral général de ces deux filtres est donné.

Le sixième et dernier chapitre est consacré au calcul du filtre de Wiener pour des signaux scalaires, invariants et stationnaires. Il est montré que ce filtre correspond à la limite asymptotique du filtre de Kalman. Le calcul de ces filtres pour les exemples du chapitre précédent confirment cette affirmation.

## Remerciements

Ce rapport de recherche doit beaucoup à de très enrichissantes discussions avec Patrick Danès ; je le remercie chaleureusement.

---

1. Mais on pourrait généraliser sans difficulté à un signal vectoriel d'observation

# Chapitre 1

## Probabilités, Densités de probabilité, Fonctions de répartition, Moyennes, Covariances

### 1.1 Cadre de l'étude

Nous ne considérons que des quantités réelles; il n'y aurait aucune difficulté à généraliser à des quantités complexes. Il suffirait alors de remplacer les matrices transposées par des matrices adjointes (i.e. conjuguées transposées).

Les vecteurs sont considérés comme des matrices colonnes.

Les covecteurs sont considérés comme des matrices lignes.

### 1.2 Vecteurs *aléatoires* $x$ et $z$

Soient  $x$  et  $z$  deux vecteurs *aléatoires*, de dimensions respectives  $n$  et  $p$ ,  $p_x$  et  $p_z$  leurs densités de probabilité (d.d.p.), respectives,  $F_x$  et  $F_z$  leurs fonctions de répartition, respectives,  $\xi$  et  $\zeta$  leurs réalisations<sup>1</sup>, respectives, qui sont des vecteurs *déterministes*, de dimensions respectives  $n$  et  $p$ ,

$Pr(\xi \leq x < \xi + d\xi)$  et  $Pr(\zeta \leq z < \zeta + d\zeta)$  les probabilités respectives que  $x$  soit compris entre  $\xi$  (inclus) et  $\xi + d\xi$  (exclu) et que  $z$  soit compris entre  $\zeta$  (inclus) et  $\zeta + d\zeta$  (exclu),

$a$  et  $c$  des vecteurs muets, de dimensions respectives  $n$  et  $p$ .

---

1. ou tirages

Alors<sup>2</sup> :

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(a) da \triangleq 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} p_z(c) dc \triangleq 1 \text{ et}$$

$$F_x(\xi) \triangleq Pr(x < \xi) \triangleq \int_{-\infty}^{\xi} p_x(a) da \text{ et } F_z(\zeta) \triangleq Pr(z < \zeta) \triangleq \int_{-\infty}^{\zeta} p_z(c) dc.$$

### 1.2.1 Moyennes ou espérances mathématiques ou moments d'ordre 1

$$m_x \triangleq E_x\{x\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a p_x(a) da : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n,$$

$$m_z \triangleq E_z\{z\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} c p_z(c) dc : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } p.$$

**Remarque** : Soit  $f : z \mapsto f(z)$  une fonction vectorielle *déterministe* quelconque, de dimension  $n$ . Alors :

$$m_{f(z)} \triangleq E_z\{f(z)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(c) p_z(c) dc : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n.$$

**Définition** : un vecteur *aléatoire* est *centré* ssi<sup>3</sup> il est de moyenne nulle.

### 1.2.2 Autocovariances

$$R_{xx} \triangleq cov\{x, x\} \triangleq E_x\{(x - m_x)(x - m_x)^T\}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)(a - m_x)^T p_x(a) da : \text{matrice } \textit{déterministe}, \text{ d'ordre } n, \text{ symétrique}$$

$$(R_{xx}^T = R_{xx}). R_{xx} \text{ est semi-définie positive [13]}^4,$$

$$R_{zz} \triangleq cov\{z, z\} \triangleq E_z\{(z - m_z)(z - m_z)^T\}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (c - m_z)(c - m_z)^T p_z(c) dc : \text{matrice } \textit{déterministe}, \text{ d'ordre } p, \text{ symétrique}$$

$$(R_{zz}^T = R_{zz}). R_{zz} \text{ est semi-définie positive.}$$

**Démonstration de la semi-définie positivité pour  $x$  (elle est identique pour  $z$ )**

Soit  $x^*$  un covecteur *déterministe*, de dimension  $n$  et  $u = x^*(x - m_x)$  une variable aléatoire (donc scalaire) qui est centrée. Alors :

$$x^* R_{xx} x^{*T} = x^* E_x\{(x - m_x)(x - m_x)^T\} x^{*T} = E_x\{u^2\} \geq 0; \forall x^* \text{ QED.}$$

$$R_{f(z)f(z)} \triangleq cov\{f(z), f(z)\} \triangleq E_z\{[f(z) - m_{f(z)}][f(z) - m_{f(z)}]^T\}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [f(c) - m_{f(z)}][f(c) - m_{f(z)}]^T p_z(c) dc : \text{matrice } \textit{déterministe}, \text{ d'ordre } n,$$

$$\text{symétrique } [R_{f(z)f(z)}^T = R_{f(z)f(z)}]. R_{f(z)f(z)} \text{ est semi-définie positive (même démonstration que précédemment).}$$

2.  $p_x(a)$  signifie  $p_x(a_1, \dots, a_n)$  et  $da = da_1 \dots da_n$ , etc. et les intégrales utilisées sont multiples [et même chose pour  $p_z(c)$ ]

3. ssi signifie si et seulement si

4. p. 90

### 1.3 Vecteur *aléatoire* augmenté $s$

Soit  $s \triangleq \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  le vecteur *aléatoire* augmenté, de dimension  $n + p$  et  $p_s$  sa densité de probabilité (d.d.p.). Alors :

$$p_x(a) = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) dc \text{ et } p_z(c) = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) da. \text{ Et :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) da dc = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(a) da = \int_{-\infty}^{\infty} p_z(c) dc = 1.$$

#### 1.3.1 Moyenne ou espérance mathématique ou moment d'ordre 1

$$\begin{aligned} m_s &\triangleq E_s\{s\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} p_s(a, c) da dc \\ &= \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a p_s(a, c) da dc \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c p_s(a, c) da dc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} a [\int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) dc] da \\ \int_{-\infty}^{\infty} c [\int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) da] dc \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} a p_x(a) da \\ \int_{-\infty}^{\infty} c p_z(c) dc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x\{x\} \\ E_z\{z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_z \end{bmatrix} : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de} \\ &\text{dimension } n + p. \end{aligned}$$

#### 1.3.2 Intercovariances

$$\begin{aligned} R_{xz} &\triangleq \text{cov}\{x, z\} \triangleq E_s\{(x - m_x)(z - m_z)^T\} \\ &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)(c - m_z)^T p_s(a, c) da dc : \text{matrice } \textit{déterministe}, \text{ de} \\ &\text{dimension } n \times p \text{ et alors } R_{zx} = R_{xz}^T. \end{aligned}$$

**Remarque :**  $R_{xz} R_{xz}^T$  est semi-définie positive.

##### Démonstration

Soit  $x^*$  un covecteur, de dimension  $n$  et  $u = x^*(x - m_x)$  une variable aléatoire (donc scalaire) qui est centrée. Alors :

$$x^* R_{xz} R_{xz}^T x^{*T} = (x^* R_{xz})(x^* R_{xz})^T = \|x^* R_{xz}\|^2 \geq 0; \forall x^* \text{ QED.}$$

$$\begin{aligned} R_{xf(z)} &\triangleq \text{cov}\{x, f(z)\} \triangleq E_s\{(x - m_x)[f(z) - m_{f(z)}]^T\} \\ &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)[f(c) - m_{f(z)}]^T p_s(a, c) da dc : \text{matrice } \textit{déterministe}, \text{ de} \\ &\text{dimension } n \times p \text{ et alors } R_{f(z)x} = R_{xf(z)}^T. \end{aligned}$$

**Remarque :** de même  $R_{xf(z)} R_{xf(z)}^T$  est semi-définie positive (même démonstration que précédemment).



### 1.3.3 Autocovariance

$$R_{ss} \triangleq \text{cov}\{s, s\} \triangleq E_s \left\{ \begin{bmatrix} x - m_x \\ z - m_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - m_x)^T & (z - m_z)^T \end{bmatrix} \right\} \\ = E_s \left\{ \begin{bmatrix} (x - m_x)(x - m_x)^T & (x - m_x)(z - m_z)^T \\ (z - m_z)(x - m_x)^T & (z - m_z)(z - m_z)^T \end{bmatrix} \right\}.$$

Mais :

$$E_s \{(x - m_x)(x - m_x)^T\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)(a - m_x)^T p_s(a, c) da dc \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)(a - m_x)^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) dc \right] da \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)(a - m_x)^T p_x(a) da = R_{xx}.$$

Et de même :

$$E_s \{(z - m_z)(z - m_z)^T\} = R_{zz}.$$

Donc :

$$R_{ss} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xz} \\ R_{xz}^T & R_{zz} \end{bmatrix} : \text{matrice } \textit{d\u00e9terministe}, \text{ d'ordre } n + p, \text{ sym\u00e9trique} \\ (R_{ss}^T = R_{ss}).$$

## 1.4 G\u00e9n\u00e9ralisation : vecteur al\u00e9atoire $Z$

Soit  $Z$  un vecteur *al\u00e9atoire*, de dimension  $Np$  tel que :

$Z^T \triangleq [z_0^T \dots z_{N-1}^T]$ , dans lequel  $z_0, \dots, z_{N-1}$  sont des vecteurs *al\u00e9atoires*, de dimension  $p$ . Alors, d'apr\u00e8s ce qui pr\u00e9c\u00e8de :

$m_Z = [m_{z_0}^T \dots m_{z_{N-1}}^T]$  : vecteur *d\u00e9terministe*, de dimension  $Np$  et :

$$R_{ZZ} = \begin{bmatrix} R_{z_0 z_0} & \dots & R_{z_0 z_{N-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{z_0 z_{N-1}}^T & \dots & R_{z_{N-1} z_{N-1}} \end{bmatrix} : \text{matrice } \textit{d\u00e9terministe}, \text{ d'ordre } Np, \\ \text{sym\u00e9trique } (R_{ZZ}^T = R_{ZZ}).$$

## 1.5 Autre g\u00e9n\u00e9ralisation : vecteur al\u00e9atoire $S$

Soit  $S \triangleq \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  le vecteur *al\u00e9atoire*, de dimension  $n + Np$ .

Alors, d'apr\u00e8s ce qui pr\u00e9c\u00e8de :

$$m_S = \begin{bmatrix} E_x\{x\} \\ E_Z\{Z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_Z \end{bmatrix} : \text{vecteur } \textit{d\u00e9terministe}, \text{ de dimension } n + Np$$

et :

$R_{SS} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xZ} \\ R_{xZ}^T & R_{ZZ} \end{bmatrix}$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n + Np$ , symétrique ( $R_{SS}^T = R_{SS}$ ).

## 1.6 Matrice *aléatoire* $x f^T(z)$

Soit  $x f^T(z)$  la matrice *aléatoire*, d'ordre  $n$ , qui dépend du vecteur *aléatoire*  $s$ . Alors :

$m_{x f^T(z)} \triangleq E_s\{x f^T(z)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a f^T(c) p_s(a, c) da dc$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ .

## 1.7 Vecteur *aléatoire* $x|z = \zeta$

Soit  $x|z = \zeta$  le vecteur *aléatoire*  $x$  conditionné au fait que le vecteur *aléatoire*  $z$  – que l'on peut qualifier d'observatio – a pour réalisation le vecteur *déterministe*  $\zeta$  (ce que l'on note  $z = \zeta$ ), de dimension  $n$ .

La d.d.p. du vecteur  $x|z = \zeta$  est  $p_{x|z}(\cdot|\zeta)$ ; il s'agit d'une fonction du vecteur muet  $a$ , qui dépend du vecteur  $\zeta$ . C'est la raison pour laquelle on écrit  $a|\zeta$  la variable de cette fonction.

Étant donné que  $Pr(\xi \leq x < \xi + d\xi | z = \zeta) = \frac{Pr(\xi \leq x < \xi + d\xi \cdot z = \zeta)}{Pr(z = \zeta)}$  <sup>5</sup> en prenant les d.d.p. on obtient  $p_{x|z}(\xi|\zeta) = \frac{p_s(\xi, \zeta)}{p_z(\zeta)}$ . Il s'agit de la règle (ou formule) de Bayes, que l'on peut écrire avec les variables muettes :  $p_{x|z}(a|c) = \frac{p_s(a, c)}{p_z(c)}$  [22] <sup>6</sup> [20] <sup>7</sup>.

Alors  $\int_{-\infty}^{\infty} p_{x|z}(a|\zeta) da = 1, \forall \zeta$ .

### 1.7.1 Moyenne conditionnelle

$m_{x|z=\zeta} \triangleq E_x\{x|z = \zeta\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a p_{x|z}(a|\zeta) da$  est la moyenne conditionnelle de  $x$  connaissant  $z = \zeta$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ , qui dépend du vecteur *déterministe*  $\zeta$ .

5. dans cette expression « . » signifie « et »

6. pp. 101-102

7. éq. 3.1

## 1.7.2 Autocovariance conditionnelle

$$P(\zeta) \triangleq \text{cov}\{x, x|z = \zeta\} \triangleq \text{cov}\{x|z = \zeta, x|z = \zeta\}$$

$$\triangleq E_x\{[(x|z = \zeta) - m_{x|z=\zeta}][ (x|z = \zeta) - m_{x|z=\zeta}]^T\}$$

$$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_{x|z=\zeta})(a - m_{x|z=\zeta})^T p_{x|z}(a|\zeta) da$$
 [13]<sup>8</sup> autocovariance conditionnelle de  $x$  connaissant  $z = \zeta$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $P^T(\zeta) = P(\zeta)$ ], qui dépend du vecteur *déterministe*  $\zeta$ .

## 1.8 Généralisation : vecteur *aléatoire* $x|Z = \mathfrak{Z}$

Soit  $x|Z = \mathfrak{Z}$  le vecteur *aléatoire*  $x$  conditionné au fait que le vecteur *aléatoire*  $Z$  a pour réalisation le vecteur *déterministe*  $\mathfrak{Z}$  (ce que l'on note  $Z = \mathfrak{Z}$ ) ; il est de dimension  $n$  et tel que :

$\mathfrak{Z}^T = [\zeta_0^T \dots \zeta_{N-1}^T]$ , dans lequel  $\zeta_0, \dots, \zeta_{N-1}$  sont des réalisations de  $z_0, \dots, z_{N-1}$ , respectivement. Alors :

$m_{x|Z=\mathfrak{Z}} \triangleq E_x\{x|Z = \mathfrak{Z}\}$  est un vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ , qui dépend du vecteur *déterministe*  $\mathfrak{Z}$  et :

$$\mathcal{P}(\mathfrak{Z}) \triangleq \text{cov}\{x, x|Z = \mathfrak{Z}\} \triangleq \text{cov}\{x|Z = \mathfrak{Z}, x|Z = \mathfrak{Z}\}$$

$$\triangleq E_x\{[(x|Z = \mathfrak{Z}) - m_{x|Z=\mathfrak{Z}}][ (x|Z = \mathfrak{Z}) - m_{x|Z=\mathfrak{Z}}]^T\}$$
 est une matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $\mathcal{P}^T(\zeta) = \mathcal{P}(\zeta)$ ], qui dépend du vecteur *déterministe*  $\mathfrak{Z}$ .

## 1.9 Vecteur *aléatoire* $m_{x|z}$

$m_{x|z} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a p_{x|z}(a|z) da$  est la moyenne conditionnelle de  $x$  relativement à  $z$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , qui dépend du vecteur *aléatoire*  $z$ .

**Remarque** : la notation  $x|z$  n'a aucune signification ; il ne s'agit pas d'un vecteur *aléatoire* ; par contre les notations  $p_{x|z}$  et  $m_{x|z}$  (définies ci-devant) en ont une. En conséquence la notation  $Pr(x|z)$  n'en a pas non plus, contrairement à la notation  $Pr(x|z = \zeta)$ .

### 1.9.1 Calcul de la moyenne de $m_{x|z}$

$$m_{m_{x|z}} \triangleq E_z\{m_{x|z}\}$$
 vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .  
 Alors [13]<sup>9</sup> [20]<sup>10</sup> [5]<sup>11</sup> :

---

8. éq. 3-90-b

9. éq. 3-86 p. 96

10. éq. 7.10 p. 318

11. éq. 3.A.2 p. 113

$$\boxed{m_{m_{x|z}} = m_x}.$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} m_{m_{x|z}} &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} m_{x|c} p_z(c) dc = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} a p_{x|z}(a|c) da] p_z(c) dc \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a [\int_{-\infty}^{\infty} p_{x|z}(a|c) p_z(c) dc] da \end{aligned}$$

D'après la règle de Bayes :  $p_{x|z}(a|c) p_z(c) = p_s(a, c)$ . Donc :

$$m_{m_{x|z}} = \int_{-\infty}^{\infty} a [\int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) dc] da = \int_{-\infty}^{\infty} a p_x(a) da = m_x : \text{vecteur déterministe, de dimension } n \text{ QED.}$$

### 1.9.2 Calcul de l'autocovariance de $m_{x|z}$

$$\begin{aligned} R_{m_{x|z} m_{x|z}} &\triangleq E_z \{ (m_{x|z} - m_{m_{x|z}}) (m_{x|z} - m_{m_{x|z}})^T \} \\ &= E_z \{ (m_{x|z} - m_x) (m_{x|z} - m_x)^T \} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (m_{x|c} - m_x) (m_{x|c} - m_x)^T p_z(c) dc : \\ &\text{matrice déterministe, d'ordre } n, \text{ symétrique } (R_{m_{x|z} m_{x|z}}^T = R_{m_{x|z} m_{x|z}}). \end{aligned}$$

### 1.9.3 Formule de l'autocovariance conditionnelle

Considérons<sup>12</sup> :

$P(z) \triangleq \text{cov}\{x, x|z\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_{x|z}) (a - m_{x|z})^T p_{x|z}(a|z) da$  autocovariance conditionnelle de  $x$  relativement à  $z$  : matrice *aléatoire*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $P^T(z) = P(z)$ ], qui dépend du vecteur *aléatoire*  $z$ .

Alors :

$$\boxed{m_{P(z)} = R_{xx} - R_{m_{x|z} m_{x|z}}}.$$

Il s'agit de la formule de l'autocovariance conditionnelle aussi appelée formule de la variance conditionnelle [20].

### Démonstration

On peut écrire :

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} [(a - m_x) + (m_x - m_{x|z})] [(a - m_x) + (m_x - m_{x|z})]^T p_{x|z}(a|z) da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_{x|z}(a|z) da + (m_x - m_{x|z}) (m_x - m_{x|z})^T \int_{-\infty}^{\infty} p_{x|z}(a|z) da \\ &+ (m_x - m_{x|z}) \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x)^T p_{x|z}(a|z) da \\ &+ [\int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) p_{x|z}(a|z) da] (m_x - m_{x|z})^T. \end{aligned}$$

Par conséquent :

---

12. Attention :  $\text{cov}\{x|z, x|z\}$  n'a aucune signification car  $x|z$  n'en a pas

$$\begin{aligned}
P(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_{x|z}(a|z) da + (m_x - m_{x|z}) (m_x - m_{x|z})^T \\
&+ (m_x - m_{x|z}) (m_{x|z} - m_x)^T + (m_{x|z} - m_x) (m_x - m_{x|z})^T \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_{x|z}(a|z) da - (m_{x|z} - m_x) (m_{x|z} - m_x)^T. \text{ Mais :}
\end{aligned}$$

$m_{P(z)} \triangleq E_z\{P(z)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} P(c) p_z(c) dc$  est la moyenne de  $P(z)$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $m_{P(z)}^T = m_{P(z)}$ ]. On a donc :

$$\begin{aligned}
m_{P(z)} &= E_z\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_{x|z}(a|z) da\right\} \\
&- E_z\left\{(m_{x|z} - m_x) (m_{x|z} - m_x)^T\right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$m_{P(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_{x|z}(a|c) da \right] p_z(c) dc - R_{m_{x|z}m_{x|z}}.$$

D'après la règle de Bayes :  $p_{x|z}(a|c) p_z(c) = p_s(a, c)$  et, par conséquent :

$$\begin{aligned}
m_{P(z)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p_s(a, c) dc \right] da - R_{m_{x|z}m_{x|z}} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a - m_x) (a - m_x)^T p_x(a) da - R_{m_{x|z}m_{x|z}}. \text{ Finalement :}
\end{aligned}$$

$$m_{P(z)} = R_{xx} - R_{m_{x|z}m_{x|z}} \text{ QED.}$$

**Remarque** : on verra que lorsque le vecteur  $s$  est *gaussien* la matrice *a priori* aléatoire  $P(z)$  est en fait *indépendante* de  $z$  et devient déterministe. On l'écrit plus simplement  $P$  et on constate que la matrice déterministe  $P(\zeta)$  *a priori* dépendante de  $\zeta$  est constante et égale à  $P$ . Alors  $m_{P(z)} = P$  et on a la *formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$\boxed{P = R_{xx} - R_{m_{x|z}m_{x|z}}}.$$

Et on verra que  $R_{m_{x|z}m_{x|z}} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T$  si  $R_{zz}$  est définie positive.

### 1.9.4 Extension : formule de l'intercovariance conditionnelle

Soit  $y$  un autre vecteur aléatoire et <sup>13</sup> :

$cov\{x, y|z\}$  l'intercovariance conditionnelle de  $x$  et  $y$  relativement à  $z$  : matrice *aléatoire*, qui dépend du vecteur *aléatoire*  $z$ .

Alors :

$$\boxed{m_{cov\{x, y|z\}} = R_{xy} - R_{m_{x|z}m_{y|z}}}.$$

Il s'agit de la formule de l'intercovariance conditionnelle aussi appelée formule de la covariance conditionnelle [20].

13. Attention :  $cov\{x|z, y|z\}$  n'a aucune signification car  $x|z$  et  $y|z$  n'en ont pas

### Démonstration

Elle se calque sur celle de la formule de l'autocovariance conditionnelle [20]<sup>14</sup>.

**Remarque** : on verra que dans le cas où tous les vecteurs sont *gaussiens* la matrice a priori aléatoire  $cov\{x, y|z\}$  est en fait *indépendante* de  $z$  et devient déterministe. Alors  $m_{cov\{x, y|z\}} = cov\{x, y|z\}$  et on a la *formule de l'intercovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$cov\{x, y|z\} = R_{xy} - R_{m_x|z} m_{y|z}.$$

Et on verra que  $R_{m_x|z} m_{y|z} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{yz}^T$  si  $R_{zz}$  est définie positive.

## 1.10 Généralisation : vecteur *aléatoire* $m_x|Z$

### 1.10.1 Calcul de la moyenne de $m_x|Z$

Soit  $m_x|Z$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , qui dépend du vecteur *aléatoire*  $Z$ , de dimension  $Np$ .

$m_{m_x|Z} \triangleq E_Z\{m_x|Z\}$  vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .

De la même manière que précédemment on a :

$$m_{m_x|Z} = m_x.$$

### 1.10.2 Autocovariance de $m_x|Z$

$R_{m_x|Z} m_{m_x|Z} \triangleq E_Z\{(m_x|Z - m_{m_x|Z})(m_x|Z - m_{m_x|Z})^T\}$   
 $= E_Z\{(m_x|Z - m_x)(m_x|Z - m_x)^T\}$  matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique  
( $R_{m_x|Z}^T m_{m_x|Z} = R_{m_x|Z} m_{m_x|Z}$ ).

### 1.10.3 Formule de l'autocovariance conditionnelle

Considérons :

$\mathcal{P}(Z) \triangleq cov\{x, x|Z\}$  matrice *aléatoire*, d'ordre  $n$ , symétrique  
[ $\mathcal{P}^T(Z) = \mathcal{P}(Z)$ ], qui dépend du vecteur *aléatoire*  $Z$ .

De la même manière que précédemment la formule de l'autocovariance conditionnelle s'écrit :

---

14. pp. 352-353

$$m_{\mathcal{P}(Z)} = R_{xx} - R_{m_x|Z} m_x|Z.$$

Et la *formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$\mathcal{P} = R_{xx} - R_{m_x|Z} m_x|Z.$$

Et  $R_{m_x|Z} m_x|Z = R_{xZ} R_{ZZ}^{-1} R_{xZ}^T$  si  $R_{ZZ}$  est définie positive.

### 1.10.4 Extension : formule de l'intercovariance conditionnelle

Soit  $y$  un autre vecteur aléatoire et  $cov\{x, y|Z\}$  l'intercovariance conditionnelle de  $x$  et  $y$  relativement à  $Z$  : matrice *aléatoire*, qui dépend du vecteur *aléatoire*  $Z$ .

De la même manière que précédemment la formule de l'intercovariance conditionnelle s'écrit :

$$m_{cov\{x, y|Z\}} = R_{xx} - R_{m_x|Z} m_y|Z.$$

Et la *formule de l'intercovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$cov\{x, y|Z\} = R_{xx} - R_{m_x|Z} m_y|Z.$$

Et  $R_{m_x|Z} m_y|Z = R_{xZ} R_{ZZ}^{-1} R_{yZ}^T$  si  $R_{ZZ}$  est définie positive.

## 1.11 Matrice *aléatoire* $m_x f^T(z)|z$

$m_x f^T(z)|z \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a f^T(z) p_{x|z}(a|z) da$  est la moyenne conditionnelle de  $x f^T(z)$  relativement à  $z$  : matrice *aléatoire*, d'ordre  $n$ , qui dépend du vecteur *aléatoire*  $z$ . On a alors :

$$m_x f^T(z)|z = m_x|z f^T(z).$$

**Démonstration**

$$m_x f^T(z)|z = \left( \int_{-\infty}^{\infty} a p_{x|z}(a|z) da \right) f^T(z) = m_x|z f^T(z) \text{ QED.}$$

### 1.11.1 Calcul de la moyenne de $m_x f^T(z)|z$

$m_{m_x f^T(z)|z} \triangleq E_z\{m_x f^T(z)|z\}$  matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ . Alors :

$$m_{m_x f^T(z)|z} = m_x f^T(z).$$

### Démonstration

$$m_{m_x f^T(z)|z} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} m_{x f^T(c)|c} p_z(c) dc = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} a f^T(c) p_{x|z}(a|c) da] p_z(c) dc \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a f^T(c) p_{x|z}(a|c) p_z(c) da dc.$$

D'après la règle de Bayes :  $p_{x|z}(a|c) p_z(c) = p_s(a, c)$ . Donc :

$$m_{m_x f^T(z)|z} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a f^T(c) p_s(a, c) da dc = m_{x f^T(z)} : \text{matrice déterministe, d'ordre } n \text{ QED.}$$

**Remarque** : on a donc :

$$m_{m_x f^T(z)|z} = m_{m_{x|z} f^T(z)} = m_{x f^T(z)} \text{ (ce qui généralise le résultat précédent } m_{m_{x|z}} = m_x \text{) et on en déduit le principe d'orthogonalité :}$$

## 1.12 Principe d'orthogonalité

$$E_s\{(x - m_{x|z}) f^T(z)\} = 0; \forall f.$$

Par conséquent les vecteurs  $x - m_{x|z}$  et  $f(z)$  ne sont pas corrélés  $\forall f$ . On dit conventionnellement qu'ils sont orthogonaux.

### Démonstration

$$E_s\{(x - m_{x|z}) f^T(z)\} = E_s\{x f^T(z)\} - E_s\{m_{x|z} f^T(z)\} \\ = E_s\{x f^T(z)\} - E_z\{m_{x|z} f^T(z)\} = m_{x f^T(z)} - m_{m_{x|z} f^T(z)} = 0, \text{ d'après ce qui précède QED.}$$

## 1.13 Autre résultat concernant les évènements conditionnels

Soient  $x, y, z$  trois vecteurs *aléatoires* et  $\xi, \eta, \zeta$  certaines de leurs réalisations, respectivement. Posons  $x' \triangleq (x|y = \eta)$ ,  $z' \triangleq (z|y = \eta)$ ,  $s = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  (rappel) et  $s' = \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix}$ ; il s'agit de quatre vecteurs *aléatoires*. Alors :

$$(x | \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}) = (x' | (z' = \zeta)), \text{ soit :}$$

$$(x | \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}) = [(x|y = \eta) | (z|y = \eta) = \zeta].$$

### Démonstration

i) D'après la règle de Bayes :



$$\begin{aligned}
p \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (\xi, \eta, \zeta) &= p_{s|y}(\xi, \zeta|\eta) p_y(\eta) = p_{x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}}(\xi|\eta, \zeta) p \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}(\eta, \zeta) \\
&= p_{x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}}(\xi|\eta, \zeta) p_{z|y}(\zeta|\eta) p_y(\eta).
\end{aligned}$$

Donc :

$$p_{s|y}(\xi, \zeta|\eta) = p_{x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}}(\xi|\eta, \zeta) p_{z|y}(\zeta|\eta).$$

ii)  $Pr(z') = Pr(z|y = \eta)$ , soit en prenant les d.d.p.  $p_{z'}(\zeta) = p_{z|y}(\zeta|\eta)$ .

$Pr(s') = Pr(s|y = \eta)$ , soit en prenant les d.d.p.  $p_{s'}(\xi, \zeta) = p_{s|y}(\xi, \zeta|\eta)$ .

Donc :

$$p_{x'|z'}(\xi|\zeta) = \frac{p_{s'}(\xi, \zeta)}{p_{z'}(\zeta)} = \frac{p_{s|y}(\xi, \zeta|\eta)}{p_{z|y}(\zeta|\eta)} = p_{x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}}(\xi|\eta, \zeta) \text{ (d'après } i).$$

iii) Par conséquent ceci démontre que les vecteurs *aléatoires*

$$x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \text{ et } x'|z' = \zeta \text{ sont égaux ou que les vecteurs } \textit{aléatoires}$$

$$x| \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \text{ et } (x|y = \eta)|(z|y = \eta) = \zeta \text{ le sont QED.}$$

## 1.14 Cas où $s$ est gaussien et $R_{zz}$ définie positive

### 1.14.1 Cas où $s$ n'est pas nécessairement centré

Dans le cas général précédent où  $s$  n'est pas gaussien  $m_{x|z=\zeta}$  et  $cov\{x, x|z = \zeta\}$ , qui sont *déterministes*, dépendent du vecteur *déterministe*  $\zeta$  et  $m_{x|z}$  et  $cov\{x, x|z\}$ , qui sont *aléatoires*, dépendent du vecteur *aléatoire*  $z$ .

Mais si  $s = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  est gaussien alors  $x$  et  $z$  sont tous les deux gaussiens et si la matrice  $R_{zz}$  est définie positive ( $R_{zz} > 0$ ) on montre que [13] :

a)  $m_{x|z=\zeta} = m_x + K(\zeta - m_z)$  [13]<sup>15</sup> vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ , qui dépend, de manière *affine*, du vecteur *déterministe*  $\zeta$ , avec :

$$K \triangleq R_{xz} R_{zz}^{-1}, \text{ matrice } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n \times p.$$

On constate que si  $x$  et  $z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xz} = 0$  donc  $K = 0$  et  $m_{x|z=\zeta} = m_x$ .

---

15. éq. 3-113

b)  $m_{x|z} = m_x + K(z - m_z)$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , qui dépend, de manière *affine*, du vecteur *aléatoire* gaussien  $z$ ; donc ce vecteur est gaussien.

On constate que si  $x$  et  $z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xz} = 0$  donc  $K = 0$  et  $m_{x|z} = m_x$  est un vecteur *déterministe*.

c)  $P(\zeta) = P \triangleq R_{xx} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T = R_{xx} - K R_{xz}^T$  [13]<sup>16</sup> : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , *indépendante* de  $\zeta$ .

On constate que si  $x$  et  $z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xz} = 0$  donc  $K = 0$  et  $P(\zeta) = P = R_{xx}$ .

d)  $P(z) = P$ .

Donc la matrice a priori *aléatoire*  $P(z)$  est en fait *déterministe* et *indépendante* de toute réalisation  $\zeta$  de  $z$ .

On constate que si  $x$  et  $z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xz} = 0$  donc  $K = 0$  et  $P(z) = P = R_{xx}$ .

Par conséquent la *formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien* s'écrit :

$$P = R_{xx} - R_{m_{x|z}m_{x|z}}.$$

Soit, d'après la valeur de  $P$  précédente :

$$R_{m_{x|z}m_{x|z}} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T. \text{ De plus :}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{x, m_{x|z}\} &= \text{cov}\{x, m_x + R_{xz} R_{zz}^{-1} (z - m_z)\} \\ &= \text{cov}\{x, m_x\} + R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T - \text{cov}\{x, m_z\} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T \end{aligned}$$

$$\text{Mais } m_x \text{ et } m_z \text{ étant déterministes : } \text{cov}\{x, m_x\} = \text{cov}\{x, m_z\} = 0$$

$$\text{Donc } \text{cov}\{x, m_{x|z}\} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T = R_{m_{x|z}m_{x|z}}.$$

Si  $y$  est un autre vecteur *aléatoire* tel que  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  est gaussien la matrice a priori *aléatoire*  $\text{cov}\{x, y|z\}$  est en fait *indépendante* de  $z$  et devient *déterministe*. Alors

$m_{\text{cov}\{x, y|z\}} = \text{cov}\{x, y|z\}$  et on a la *formule de l'intercovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$\text{cov}\{x, y|z\} = R_{xy} - R_{m_{x|z}m_{y|z}} = R_{xy} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{yz}^T.$$

---

16. éq. 3-114

## 1.14.2 Cas particulier où $s$ est centré

Alors  $m_x = m_z = 0$ . On constate que :

$m_{x|z=\zeta} = K \zeta$  dépend du vecteur *déterministe*  $\zeta$  de manière *linéaire* et que  $m_{x|z} = K z$  dépend du vecteur *aléatoire*  $z$  de manière *linéaire*.

## 1.14.3 Généralisation : cas où $S$ est gaussien et $R_{ZZ}$ définie positive

### 1.14.3.1 Cas où $S$ n'est pas nécessairement centré

a)  $m_{x|Z=\mathfrak{z}} = m_x + \mathcal{K}(\mathfrak{z} - m_Z)$  vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ , qui dépend, de manière *affine*, du vecteur *déterministe*  $\mathfrak{z}$ , avec :

$\mathcal{K} \triangleq R_{xZ} R_{ZZ}^{-1}$ , matrice *déterministe*, de dimension  $n \times N p$ .

On constate que si  $x$  et  $Z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xZ} = 0$  donc  $\mathcal{K} = 0$  et  $m_{x|Z=\mathfrak{z}} = m_x$ .

b)  $m_{x|Z} = m_x + \mathcal{K}(Z - m_Z)$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , qui dépend, de manière *affine*, du vecteur *aléatoire*  $Z$ .

On constate que si  $x$  et  $Z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xZ} = 0$  donc  $\mathcal{K} = 0$  et  $m_{x|Z} = m_x$  est un vecteur *déterministe*.

c)  $\mathcal{P}(\mathfrak{z}) = \mathcal{P} \triangleq R_{xx} - R_{xZ} R_{ZZ}^{-1} R_{xZ}^T = R_{xx} - \mathcal{K} R_{xZ}^T$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , *indépendante* de  $\mathfrak{z}$ .

On constate que si  $x$  et  $Z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xZ} = 0$  donc  $\mathcal{K} = 0$  et  $\mathcal{P}(\mathfrak{z}) = \mathcal{P} = R_{xx}$ .

d)  $\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P}$ .

Donc la matrice a priori *aléatoire*  $\mathcal{P}(Z)$  est en fait *déterministe* et *indépendante* de toute réalisation  $\mathfrak{z}$  de  $Z$ .

On constate que si  $x$  et  $Z$  ne sont pas corrélés (donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens) alors  $R_{xZ} = 0$  donc  $\mathcal{K} = 0$  et  $\mathcal{P}(Z) = \mathcal{P} = R_{xx}$ .

Par conséquent la *formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien* s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P} = R_{xx} - R_{m_x|Z} m_x|Z}.$$

Soit, d'après la valeur de  $\mathcal{P}$  précédente :

$$R_{m_x|Z} m_x|Z = R_{xZ} R_{ZZ}^{-1} R_{xZ}^T = \mathcal{K} R_{xZ}^T.$$

$$\text{Et } cov\{x, m_x|Z\} = R_{m_x|Z} m_x|Z.$$

Si  $y$  est un autre vecteur *aléatoire* gaussien la matrice a priori aléatoire  $cov\{x, y|Z\}$  est en fait *indépendante* de  $Z$  et devient déterministe. Alors  $m_{cov\{x, y|Z\}} = cov\{x, y|Z\}$  et on a la *formule de l'intercovariance conditionnelle dans le cas gaussien* :

$$cov\{x, y|Z\} = R_{xy} - R_{m_x|Z} m_{y|Z} = R_{xy} - R_{xZ} R_{ZZ}^{-1} R_{yZ}^T.$$

### 1.14.3.2 Cas particulier où $S$ est centré

Alors  $m_x = m_z = 0$ . On constate que :

$m_{x|Z=3} = \mathcal{K}3$  dépend du vecteur *déterministe*  $3$  de manière *linéaire* et que :

$m_{x|Z} = \mathcal{K}Z$  dépend du vecteur *aléatoire*  $Z$  de manière *linéaire*.

## 1.15 Exemple non gaussien

Cet exemple, non gaussien, correspond à  $x$  scalaire ( $n = 1$ ) et  $z$  scalaire ( $p = 1$ ). Il offre l'avantage de permettre tous les calculs analytiques.

### 1.15.1 Définition de la d.d.p. conjointe et calculs des d.d.p. conditionnelles

Soit  $s = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$ , de dimension  $n + p = 2$  et  $p_s(a, c) = \frac{2e^{-(\frac{a}{2}+c)}}{\sqrt{\pi c}}$  ;  $a > 0$  et  $c > 0$ . On peut vérifier que  $p_s(a, c)$  est bien une d.d.p. (cf. Annexe de ce chapitre).

### 1.15.2 Calculs concernant la variable aléatoire $x$

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{3}{2} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre),} \\ m_{x^2} &= \frac{15}{2} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre) et} \\ \Pi &= R_{xx} = \frac{21}{4} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre).} \end{aligned}$$

### 1.15.3 Calculs concernant la variable aléatoire $z$

$$\begin{aligned} m_z &= \frac{3}{2} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre),} \\ m_{z^2} &= \frac{15}{4} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre) et :} \\ W_e &= R_{zz} = \frac{3}{2} \text{ (cf. Annexe de ce chapitre).} \end{aligned}$$

### 1.15.4 Calculs concernant le vecteur aléatoire $s$

$R_{xz} = \frac{3}{2}$  (cf. Annexe de ce chapitre) et :

$$m_s = \begin{bmatrix} m_x \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, R_{ss} = \begin{bmatrix} \Pi & R_{xz} \\ R_{xz} & W_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ (on vérifie que } R_{ss} \text{ est bien définie positive).}$$

Et donc  $K \triangleq R_{xz} R_{zz}^{-1} = 1$ .

### 1.15.5 Calculs concernant le vecteur aléatoire

$$x|z = \zeta$$

$p_{x|z}(a|c) = \frac{e^{-\frac{a}{c}}}{c}$  (cf. Annexe de ce chapitre).

$m_{x|z=\zeta} = \zeta$ ,  $m_{x^2|z=\zeta} = 2\zeta^2$  et  $P(\zeta) = \text{cov}\{x, x|z = \zeta\} = \zeta^2$  (cf. Annexe de ce chapitre).

**Remarque :** on constate que  $m_{x|z=\zeta} = m_x + K(\zeta - m_\zeta)$  bien que l'on ne soit pas dans le cas gaussien, mais que  $P(\zeta)$  dépend de  $\zeta$  contrairement au cas gaussien.

### 1.15.6 Calculs concernant le vecteur aléatoire $m_{x|z}$

$m_{x|z} = z$  (cf. Annexe de ce chapitre) et donc  $m_{m_{x|z}} = m_z = \frac{3}{2}$  et  $P(z) = \text{cov}\{x, x|z\} = z^2$  (cf. Annexe de ce chapitre).

**Remarque :** on constate que  $m_{x|z} = m_x + K(z - m_z)$  bien que l'on ne soit pas dans le cas gaussien, mais que  $P(z)$  dépend de  $z$  contrairement au cas gaussien.

Et alors :

$m_{P(z)} = m_{z^2} = \frac{15}{4}$  et  $R_{m_{x|z}m_{x|z}} = R_{zz} = \frac{3}{2}$  et on vérifie bien la formule de l'autocovariance conditionnelle :

$$m_{P(z)} = R_{xx} - R_{m_{x|z}m_{x|z}}.$$

Et on a, bien que l'on ne soit pas dans le cas gaussien :

$$R_{m_{x|z}m_{x|z}} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T = \frac{3}{2}.$$

## Annexe

### Calculs préliminaires

$$\bullet I_n \triangleq \int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}; n \in \mathbb{N} : \alpha > 0.$$

### Démonstration

Intégrons par parties en posant :

$$du = e^{-\alpha t} dt \text{ et on peut choisir } u = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

$$v = t^n \text{ soit } dv = n t^{n-1} dt. \text{ Alors :}$$

$$I_n = -\left[\frac{t^n e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^\infty + \frac{n}{\alpha} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}; n \geq 1 \text{ et :}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = -\left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Par conséquent } I_0 = \frac{1}{\alpha}, I_1 = \frac{1}{\alpha^2}, I_2 = \frac{2}{\alpha^3}, \dots, I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \text{ QED.}$$

Si on pose  $t = \sqrt{a}$  alors  $dt = \frac{da}{2\sqrt{a}}$  et :

$$I_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty a^{\frac{n-1}{2}} e^{-\alpha \sqrt{a}} da = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}; n \in \mathbb{N} : \alpha > 0.$$

$$\bullet J_n \triangleq \int_0^\infty t^n e^{-\beta t^2} dt = \frac{n-1}{2\beta} J_{n-2}; n \geq 2; \beta > 0,$$

$$\text{avec } J_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \text{ et } J_1 = \frac{1}{2\beta}.$$

$$\text{Soit } J_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_2 = \frac{1}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_4 = \frac{3}{8\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_6 = \frac{15}{16\beta^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \dots \text{ et :}$$

$$J_1 = \frac{1}{2\beta}, J_3 = \frac{1}{2\beta^2}, J_5 = \frac{1}{\beta^3}, J_7 = \frac{3}{\beta^4}, \dots$$

### Démonstration

Intégrons par parties en posant :

$$du = t e^{-\beta t^2} dt \text{ et on peut choisir } u = -\frac{e^{-\beta t^2}}{2\beta}$$

$$v = t^{n-1} \text{ soit } dv = (n-1) t^{n-2} dt. \text{ Alors :}$$

$$J_n = -\left[\frac{t^{n-1} e^{-\beta t^2}}{2\beta}\right]_0^\infty + \frac{n-1}{2\beta} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-\beta t^2} dt = \frac{n-1}{2\beta} J_{n-2}; n \geq 2 \text{ et :}$$

$$J_0 \triangleq \int_0^\infty e^{-\beta t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \text{ [9] }^{17} \text{ et :}$$

$$J_1 \triangleq \int_0^\infty t e^{-\beta t^2} dt = -\left[\frac{e^{-\beta t^2}}{2\beta}\right]_0^\infty = \frac{1}{2\beta}.$$

$$\text{Soit } J_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_2 = \frac{1}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_4 = \frac{3}{8\beta^2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, J_6 = \frac{15}{16\beta^3} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \dots \text{ et :}$$

$$J_1 = \frac{1}{2\beta}, J_3 = \frac{1}{2\beta^2}, J_5 = \frac{1}{\beta^3}, J_7 = \frac{3}{\beta^4}, \dots \text{ QED.}$$

Si on pose  $t = \sqrt{c}$  alors  $dt = \frac{dc}{2\sqrt{c}}$  et :

$J_n = \frac{1}{2} \int_0^\infty c^{\frac{n-1}{2}} e^{-\beta c} dc = \frac{n-1}{2\beta} J_{n-2}$ ;  $n \geq 2$ ;  $\beta > 0$ ,  
avec les valeurs de  $J_0$  et  $J_2$  ci devant .

### Calculs correspondant à l'exemple non gaussien de ce chapitre

On va utiliser :

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{a}{t^2} + t^2\right)} dt = \frac{\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{a}}}{2} \quad (0 \leq a) \quad [9]^{18}.$$

Le changement de variable  $c = t^2$  conduit à :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{a}{c} + c\right)}}{2\sqrt{c}} dc = \frac{\sqrt{\pi} e^{-2\sqrt{a}}}{2} \quad (0 \leq a).$$

Soit  $p_s(a, c) = \frac{2e^{-\left(\frac{a}{c} + c\right)}}{\sqrt{\pi c}}$  ( $a > 0$ ;  $c > 0$ ). Alors :

$p_x(a) \triangleq \int_0^\infty p_s(a, c) dc = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{a}{c} + c\right)}}{2\sqrt{c}} dc = 2e^{-2\sqrt{a}}$ , d'après la dernière intégrale ci-devant.

$p_z(c) \triangleq \int_0^\infty p_s(a, c) da = \frac{2e^{-c}}{\sqrt{\pi c}} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{c}} da = 2\sqrt{\frac{c}{\pi}} e^{-c}$ , d'après le calcul de  $I_0$  avec  $\alpha = \frac{1}{c}$ .

$\int_0^\infty p_x(a) da = 2 \int_0^\infty e^{-2\sqrt{a}} da = 1$ , d'après le calcul de  $I_1$  avec  $\alpha = 2$ .

$\int_0^\infty p_z(c) dc = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{c} e^{-c} dc = 1$ , d'après le calcul de  $J_2$  avec  $\beta = 1$ .

$m_x \triangleq \int_0^\infty a p_x(a) da = 2 \int_0^\infty a e^{-2\sqrt{a}} da = \frac{3}{2}$ , d'après le calcul de  $I_3$  avec  $\alpha = 2$ .

$m_z \triangleq \int_0^\infty c p_z(c) dc = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty c^{\frac{3}{2}} e^{-c} dc = \frac{3}{2}$ , d'après le calcul de  $J_4$  avec  $\beta = 1$ .

$m_{x^2} \triangleq \int_0^\infty a^2 p_x(a) da = 2 \int_0^\infty a^2 e^{-2\sqrt{a}} da = \frac{15}{2}$ , d'après le calcul de  $I_5$  avec  $\alpha = 2$ .

$m_{z^2} \triangleq \int_0^\infty c^2 p_z(c) dc = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty c^{\frac{5}{2}} e^{-c} dc = \frac{15}{4}$ , d'après le calcul de  $J_6$  avec  $\beta = 1$ .

$$\Pi = R_{xx} = \int_0^\infty \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 p_x(a) da = m_{x^2} - 3m_x + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}.$$

$$W_e = R_{zz} = \int_0^\infty \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 p_z(c) dc = m_{z^2} - 3m_z + \frac{9}{4} = \frac{3}{2}$$

Soit  $I \triangleq \int_0^\infty \int_0^\infty a c p_s(a, c) da dc$ . Alors  $I = \frac{15}{4}$ .

---

18. p. 1755

### Démonstration

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty [\int_0^\infty a e^{-\frac{a}{c}} da] \sqrt{c} e^{-c} dc.$$

Mais  $\int_0^\infty a e^{-\frac{a}{c}} da = c^2$  d'après le calcul de  $J_3$  avec  $\beta = \frac{1}{c}$ . Donc

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty c^{\frac{5}{2}} e^{-c} dc = \frac{15}{4}. \text{ d'après le calcul de } J_6 \text{ avec } \beta = 1 \text{ QED.}$$

$$R_{xz} \triangleq \int_0^\infty \int_0^\infty (a - \frac{3}{2})(c - \frac{3}{2}) p_s(a, c) da dc = \frac{3}{2}.$$

### Démonstration

$$R_{xz} = I - \frac{3}{2} m_x - \frac{3}{2} m_z + \frac{9}{4} = \frac{3}{2} \text{ QED.}$$

$$p_{x|z}(a|c) = \frac{p_s(a, c)}{p_z(c)} = \frac{e^{-\frac{a}{c}}}{c}.$$

$$m_{x|z=\zeta} \triangleq \int_0^\infty a p_{x|z}(a|\zeta) da = \int_0^\infty a \frac{e^{-\frac{a}{\zeta}}}{\zeta} da = \zeta \text{ d'après le calcul de } I_1 \text{ avec } \alpha = \frac{1}{\zeta}.$$

$$m_{x^2|z=\zeta} \triangleq \int_0^\infty a^2 p_{x|z}(a|\zeta) da = \int_0^\infty a^2 \frac{e^{-\frac{a}{\zeta}}}{\zeta} da = 2z^2 \text{ d'après le calcul de } I_2 \text{ avec } \alpha = \frac{1}{\zeta}.$$

$$\begin{aligned} P(\zeta) &\triangleq \text{cov}\{x, x|z = \zeta\} \triangleq \int_0^\infty (a - m_{x|z=\zeta})^2 p_{x|z}(a|\zeta) da \\ &= \int_0^\infty (a - \zeta)^2 p_{x|z}(a|\zeta) da \\ &= \int_0^\infty a^2 p_{x|z}(a|\zeta) da - 2\zeta \int_0^\infty a p_{x|z}(a|\zeta) da + \zeta^2 \int_0^\infty p_{x|z}(a) da = \zeta^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$m_{x|z} = z.$$

$$P(z) = z^2.$$





## Chapitre 2

# Estimation d'un vecteur aléatoire connaissant un autre vecteur aléatoire

### 2.1 Estimateur quelconque $\hat{X}$ et estimateur optimal $\hat{X}_0$ , au sens des moindres carrés, d'une variable aléatoire $X$

Nous utilisons la présentation de Kalman et Bucy [8].

#### 2.1.1 Définitions

Soit  $X$  une variable *aléatoire* (donc scalaire) appartenant à un espace vectoriel  $\mathcal{X}$ , de dimension 1 ( $X \in \mathcal{X}$ ). Si  $X'$  est une autre variable *aléatoire* ( $X' \in \mathcal{X}$ ) définissons dans  $\mathcal{X}$  le produit (noté  $\cdot$ ) :  $X \cdot X' \triangleq E\{X X'\}$ <sup>1</sup>.

Il s'agit d'un produit scalaire car il est *scalaire* (le résultat est un nombre réel), *linéaire*, *reflexif* et *non dégénéré*. Il définit donc une norme ; en effet :

$$\|X\|^2 \triangleq X \cdot X \geq 0 \text{ et } \|X\| = 0 \Rightarrow X = 0 \text{ (démonstration facile).}$$

Soit  $\hat{\mathcal{X}}$  un sous espace vectoriel de  $\mathcal{X}$ , de dimension 1.  $\hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  est, par définition, un *estimateur quelconque* de  $X$  et  $\tilde{X} \triangleq X - \hat{X}$  est *l'erreur de cet estimateur quelconque* ( $\tilde{X} \in \mathcal{X}$ ). On recherche dans  $\hat{\mathcal{X}}$  *l'estimateur optimal*  $\hat{X}_0$ , au sens des moindres carrés, de  $X$ , tel que, si  $\tilde{X}_0 \triangleq X - \hat{X}_0$  est *l'erreur de cet estimateur optimal* ( $\tilde{X}_0 \in \mathcal{X}$ ) on ait :

---

1. Si  $X \cdot X' = 0$  on dit que  $X$  et  $X'$  sont *orthogonales*

$\|\tilde{X}\| \geq \|\tilde{X}_0\|$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  (ou, ce qui est équivalent,  $\|\tilde{X}\|^2 \geq \|\tilde{X}_0\|^2$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$ ).

## 2.1.2 Lemme de projection orthogonale

$\|\tilde{X}\| \geq \|\tilde{X}_0\|$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  (ou  $\|\tilde{X}\|^2 \geq \|\tilde{X}_0\|^2$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$ ) ssi  $\tilde{X}_0 \cdot \hat{X} = 0$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  i.e. ssi  $\tilde{X}_0$  et  $\hat{\mathcal{X}}$  sont orthogonales.

### 2.1.2.1 Démonstration de la condition suffisante

Supposons que  $\tilde{X}_0 \cdot \hat{X} = 0$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$ . Alors :

$$\|\tilde{X}\|^2 = \|X - \hat{X}_0 + \hat{X}_0 - \hat{X}\|^2 = \|\tilde{X}_0\|^2 + 2\tilde{X}_0 \cdot (\hat{X}_0 - \hat{X}) + \|\hat{X}_0 - \hat{X}\|^2.$$

Mais  $\hat{X}_0 \in \hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  donc  $\hat{X}_0 - \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  et alors par hypothèse  $\tilde{X}_0 \cdot (\hat{X}_0 - \hat{X}) = 0$ . Par conséquent :

$$\|\tilde{X}\|^2 = \|\tilde{X}_0\|^2 + \|\hat{X}_0 - \hat{X}\|^2 \geq \|\tilde{X}_0\|^2; \forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}} \text{ QED.}$$

### 2.1.2.2 Démonstration de la condition nécessaire

Supposons que  $\|\tilde{X}\| \geq \|\tilde{X}_0\|$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  (ou  $\|\tilde{X}\|^2 \geq \|\tilde{X}_0\|^2$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$ ) et qu'il existe  $\hat{X}_1$  ( $\hat{X}_1 \in \hat{\mathcal{X}}$ ) tel que  $\tilde{X}_0 \cdot \hat{X}_1 = \alpha \neq 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} \|X - \hat{X}_0 - \beta \hat{X}_1\|^2 &= \|\tilde{X}_0\|^2 - 2\beta \tilde{X}_0 \cdot \hat{X}_1 + \beta^2 \|\hat{X}_1\|^2 \\ &= \|\tilde{X}_0\|^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \|\hat{X}_1\|^2. \end{aligned}$$

On peut alors toujours trouver  $\beta$  tel que  $\|X - \hat{X}_0 - \beta \hat{X}_1\|^2 < \|\tilde{X}_0\|^2$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ et donc  $\tilde{X}_0 \cdot \hat{X} = 0$ ;  $\forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}$  QED.

### 2.1.2.3 Unicité de $\hat{X}_0$

Si  $\hat{X}_0$  existe il est unique.

#### Démonstration

Supposons qu'il existe  $\hat{X}_0$  et  $\hat{X}'_0$  tels que :

$$\|\tilde{X}\| \geq \|\tilde{X}_0\|; \forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}} \text{ et } \|\tilde{X}\| \geq \|\tilde{X}'_0\|; \forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}} \text{ (avec } \tilde{X}'_0 \triangleq X - \hat{X}'_0).$$

Alors  $\|\tilde{X}_0\| \geq \|\tilde{X}'_0\| \geq \|\tilde{X}_0\|$ ; soit  $\|\tilde{X}_0\| = \|\tilde{X}'_0\|$ .

Mais  $\tilde{X}_0 = X - \hat{X}'_0 + \hat{X}'_0 - \hat{X}_0$ ; donc :

$$\|\tilde{X}_0\|^2 = \|\tilde{X}'_0\|^2 + 2\tilde{X}'_0 \cdot (\hat{X}'_0 - \hat{X}_0) + \|\hat{X}'_0 - \hat{X}_0\|^2 \text{ soit } \|\hat{X}'_0 - \hat{X}_0\| = 0 \text{ car :}$$

$$\|\tilde{X}_0\| = \|\tilde{X}'_0\| \text{ et } \tilde{X}'_0 \cdot (\hat{X}'_0 - \hat{X}_0) = 0 \text{ puisque } \hat{X}'_0 - \hat{X}_0 \in \hat{\mathcal{X}}.$$

Finalement  $\hat{X}'_0 - \hat{X}_0 = 0$  QED.

## 2.2 Estimateurs et erreurs des estimateurs d'un vecteur aléatoire $x$ connaissant le vecteur aléatoire $z$

### 2.2.1 Définitions d'un estimateur quelconque $\hat{x}$ et de son erreur $\tilde{x}$

Soit  $f$  une fonction vectorielle quelconque, de dimension  $n$  (déterministe).

$\hat{x} \triangleq f(z)$  est un *estimateur quelconque* de  $x$  : c'est un vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , fonction du vecteur *aléatoire*  $z$ , de dimension  $p$ , représentant une *observation*.

$\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} = x - f(z)$  est l'*erreur de l'estimateur quelconque* ; c'est une fonction vectorielle *aléatoire*, de dimension  $n$ , du vecteur *aléatoire*  $s \triangleq \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  (rappel), de dimension  $n + p$ .

#### 2.2.1.1 Moyennes de l'estimateur quelconque $\hat{x}$ et de son erreur $\tilde{x}$

$m_{\hat{x}} = m_{f(z)}$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .

$m_{\tilde{x}} = m_x - m_{f(z)}$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .

#### 2.2.1.2 Autocovariances de l'estimateur quelconque $\hat{x}$ et de son erreur $\tilde{x}$

$R_{\hat{x}\hat{x}} \triangleq R_{f(z)f(z)}$  et :

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}} \triangleq R_{[x-f(z)][x-f(z)]} = R_{xx} - R_{xf(z)}^T - R_{xf(z)} + R_{f(z)f(z)}.$$

### 2.2.2 Définitions de l'estimateur optimal $\hat{x}_0$ et de son erreur $\tilde{x}_0$ , au sens des moindres carrés

Nous allons définir l'*estimateur optimal*  $\hat{x}_0 \triangleq f_0(z)$  et l'*erreur de l'estimateur optimal*  $\tilde{x}_0 \triangleq x - \hat{x}_0 = x - f_0(z)$ , au sens des moindres carrés.

Pour tout covecteur *déterministe*  $x^*$ , de dimension  $n$ , considérons la variable *aléatoire* (donc scalaire)  $X = x^*x$ , Alors  $X$  appartient à un espace vectoriel  $\mathcal{X}$ , de dimension 1 ( $X \in \mathcal{X}$ ).

Considérons également les variables *aléatoires* :  
 $\hat{X} \triangleq x^*\hat{x} = x^*f(z)$  et  $\hat{X}_0 \triangleq x^*\hat{x}_0 = x^*f_0(z)$ .  
 Elles appartiennent à un sous espace vectoriel  $\hat{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$ .

En effet si  $\widehat{X}' \triangleq x^* f'(z)$  et si  $\widehat{X}'' \triangleq x^* f''(z)$  alors  $\widehat{X}' - \widehat{X}'' = x^* f(z)$ , avec  $f(z) \triangleq f'(z) - f''(z)$  et donc  $\widehat{X}' - \widehat{X}'' \in \widehat{\mathcal{X}}$ .

Considérons de plus :

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &\triangleq X - \widehat{X} = x^*(x - \widehat{x}) = x^*[x - f(z)] = x^*\widetilde{x} \text{ et :} \\ \widetilde{X}_0 &\triangleq X - \widehat{X}_0 = x^*(x - \widehat{x}_0) = x^*[x - f_0(z)] = x^*\widetilde{x}_0.\end{aligned}$$

$\widehat{x}_0 = f_0(z)$  est tel que, par définition,  $\widehat{X}_0$  est l'estimateur optimal, au sens des moindres carrés de  $X$ ;  $\forall x^*$ .

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(1) \quad & \|\widetilde{X}\|^2 \geq \|\widetilde{X}_0\|^2; \forall \widehat{X} \in \widehat{\mathcal{X}} \iff (2) \quad \widetilde{X}_0 \cdot \widehat{X} = 0; \forall \widehat{X} \in \widehat{\mathcal{X}}. \text{ Soit :} \\ (1) \quad & E_s\{x^*\widetilde{x}\widetilde{x}^T x^{*T}\} \geq E_s\{x^*\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T x^{*T}\}; \forall x^*; \forall f, \text{ ou :} \\ (2) \quad & E_s\{x^*\widetilde{x}_0 f^T(z) x^{*T}\} = 0; \forall x^*; \forall f.\end{aligned}$$

### 2.2.2.1 Conséquences de (1)

$$(1) \text{ s'écrit : } x^*(E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\} - E_s\{\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T\})x^{*T} \geq 0; \forall x^* \text{ et } \forall f.$$

Donc il faut et il suffit que la matrice  $E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\} - E_s\{\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T\}$  soit semi-définie positive  $\forall f$ , ce que l'on écrit  $E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\} - E_s\{\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T\} \geq 0; \forall f$  ou  $E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\} \geq E_s\{\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T\}; \forall f$ .

En ce sens on dit que l'estimateur optimal, au sens des moindres carrés,  $\widehat{x}_0 = f_0(z)$  minimise l'autocovariance  $E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\}$  (qui est une matrice semi-définie positive). Donc est tel que :

$$\boxed{E_s\{\widetilde{x}\widetilde{x}^T\} \geq E_s\{\widetilde{x}_0\widetilde{x}_0^T\} \geq 0; \forall f}.$$

### 2.2.2.2 Conséquence de (2)

$$(2) \text{ s'écrit : } x^* E_s\{\widetilde{x}_0 f^T(z)\} x^{*T} = 0; \forall x^*; \forall f.$$

Donc il faut et il suffit (démonstration quasi-évidente) que :

$$\boxed{E_s\{\widetilde{x}_0 f^T(z)\} = 0; \forall f}.$$

Il s'agit du *principe d'orthogonalité*. Ce principe signifie que l'erreur de l'estimateur optimal est non-corrélée à toute fonction de l'observation (on dit conventionnellement que cette erreur et cette fonction sont orthogonales).

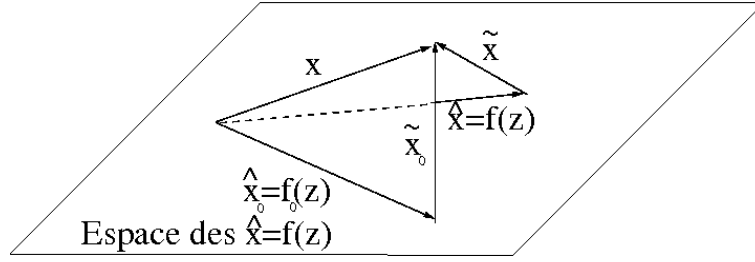


Figure 1. Principe d'orthogonalité :  $\tilde{x}_0$  et  $f(z)$  sont orthogonales.

### 2.2.2.3 Unicité de l'estimateur optimal et de son erreur

L'estimateur optimal  $\hat{x}_0 = f_0(z)$  et son erreur  $\tilde{x}_0$  sont uniques.

#### Démonstration

Supposons que  $\hat{x}'_0$  soit un autre estimateur optimal et soit  $\hat{X}'_0 = x^* \hat{x}'_0$ . On a vu que  $\hat{X}'_0 = \hat{X}_0$ ;  $\forall x^*$ . On en déduit donc que  $\hat{x}'_0 = \hat{x}_0$  et donc que l'estimateur optimal  $\hat{x}_0 = f_0(z)$  ainsi que son erreur  $\tilde{x}_0$  sont uniques QED.

### 2.2.2.4 Calcul de cet estimateur optimal

Cet estimateur optimal est :

$$\boxed{\hat{x}_0 = f_0(z) = m_{x|z}}.$$

#### Démonstration

Soit  $\hat{x} \triangleq m_{x|z}$  un estimateur de  $x$  et  $\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} = x - m_{x|z}$  son erreur. On a vu, dans le premier chapitre, que d'après le principe d'orthogonalité :

$$E_s\{\tilde{x} f^T(z)\} = 0; \forall f.$$

Par conséquent  $\tilde{x}$  est l'erreur de l'estimateur optimal et d'après l'unicité de cette erreur on a  $\tilde{x} = \tilde{x}_0$  et donc  $\hat{x} = \hat{x}_0$ , soit finalement  $\hat{x}_0 = f_0(z) = m_{x|z}$  QED.

### 2.2.2.5 Moyennes de l'estimateur optimal $\hat{x}_0$ et de son erreur $\tilde{x}_0$

$m_{\hat{x}_0} = m_{m_{x|z}} = m_x$  d'après les résultats du premier chapitre. On dit que  $\hat{x}_0$  est un estimateur sans biais.

$$m_{\tilde{x}_0} = m_x - m_{\hat{x}_0} = 0. \text{ Donc } \tilde{x}_0 \text{ est centré.}$$

### 2.2.2.6 Autocovariances de l'estimateur optimal $\hat{x}_0$ et de son erreur $\tilde{x}_0$

$$R_{\hat{x}_0 \hat{x}_0} = R_{m_{x|z} m_{x|z}}.$$

$$R_{\tilde{x}_0 \tilde{x}_0} = R_{(x-m_{x|z})(x-m_{x|z})} = R_{xx} - R_{xm_{x|z}}^T - R_{xm_{x|z}} + R_{m_{x|z} m_{x|z}}.$$

### 2.2.2.7 Remarques

**Remarque 1** : en général l'estimateur optimal ne s'exprime pas de manière *affine* en fonction de l'observation  $z$  (cf. Exemple suivant pour lequel  $s$  n'est pas gaussien).

**Remarque 2** :  $\hat{x}_0 = f_0(z) = m_{x|z}$  minimise également le critère scalaire  $J \triangleq E_s\{\tilde{x}^T \tilde{x}\}$ .

#### Démonstration

L'estimateur précédent minimise  $x^* E_s\{\tilde{x} \tilde{x}^T\} x^{*T}$ ;  $\forall x^*$  donc minimise  $E_s\{\tilde{x}_1^2\}$  (en choisissant  $x^* = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$ ), ... et minimise  $E_s\{\tilde{x}_n^2\}$  (en choisissant  $x^* = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ ) donc minimise  $E_s\{\tilde{x}^T \tilde{x}\} = E_s\{\tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_n^2\}$  QED.

**Remarque 3** : autre calcul de l'estimateur optimal  $\hat{x}_0$ .

Il convient parfois d'exprimer l'estimateur optimal  $\hat{x}_0$  en fonction de la d.d.p.  $p_{z|x}$ .

$$\hat{x}_0 = m_{x|z} = \int_{-\infty}^{\infty} a p_{x|z}(a|z) da$$

Mais d'après la règle de Bayes :

$$p_{x|z}(a|z) = \frac{p_s(a, z)}{p_z(z)} \text{ et } p_{z|x}(z|a) = \frac{p_s(a, z)}{p_x(a)}; \text{ donc } p_{x|z}(a|z) = \frac{p_{z|x}(z|a) p_x(a)}{p_z(z)}.$$

Il s'en suit que :

$$\hat{x}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} a \frac{p_{z|x}(z|a) p_x(a)}{p_z(z)} da = \frac{1}{p_z(z)} \int_{-\infty}^{\infty} a p_{z|x}(z|a) p_x(a) da. \text{ Soit :}$$

$$\hat{x}_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a p_{z|x}(z|a) p_x(a) da}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{z|x}(z|a) p_x(a) da}.$$

### 2.2.2.8 Cas particulier où $s$ est gaussien et où $R_{zz}$ est définie positive

Si  $s = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  est gaussien et si  $R_{zz}$  est définie positive ( $R_{zz} > 0$ ) on a vu, d'après les résultats du premier chapitre, que :

$\hat{x}_0 \triangleq m_{x|z} = m_x + K(z - m_z)$ , avec  $K = R_{xz} R_{zz}^{-1}$  et que, par conséquent,  $\hat{x}_0$  s'exprime de manière *affine* en fonction de l'observation  $z$ .

De plus  $R_{m_{x|z}m_{x|z}} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T$ ,  $R_{xm_{x|z}}^T = R_{xm_{x|z}} = R_{m_{x|z}m_{x|z}}$  et donc :  
 $R_{\tilde{x}_0\tilde{x}_0} = R_{xx} - R_{m_{x|z}m_{x|z}} = P$  (rappel  $P \triangleq \text{cov}\{x, x|z\}$ ).

Par conséquent dans le cas gaussien on a :

$$\boxed{P \triangleq \text{cov}\{x, x|z\} = R_{\tilde{x}_0\tilde{x}_0}}.$$

*Cas particulier où  $s$  est centré*

$\hat{x} = K z$  s'exprime de manière *linéaire* en fonction de l'observation  $z$ .

### 2.2.3 Estimateur optimal affine $\hat{x}_1$ et son erreur $\tilde{x}_1$ , au sens des moindres carrés

#### 2.2.3.1 Définitions

Soient  $L$  une matrice *déterministe*, de dimension  $n \times p$  et  $l$  un vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ . Alors  $\hat{x} = f(z) \triangleq Lz + l$  est un *estimateur affine quelconque* et  $\tilde{x} \triangleq x - \hat{x} \triangleq x - Lz - l$  l'*erreur de cet estimateur affine quelconque*. Alors l'*estimateur optimal affine*  $\hat{x}_1 = f_1(z) = Kz + k$  et son *erreur*  $\tilde{x}_1 \triangleq x - \hat{x}_1 \triangleq x - Kz - k$ , au sens des moindres carrés, sont, par définition, tels que  $x^* E_s \{\tilde{x} \tilde{x}^T\} x^{*T} \geq x^* E_s \{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T\} x^{*T}$  ;  $\forall x^*$ ,  $\forall L$  et  $\forall l$ .

#### 2.2.3.2 Calcul de cet estimateur optimal *affine*

Cet estimateur optimal affine est tel que :

$$\boxed{K R_{zz} = R_{xz} \text{ et } k = m_x - K m_z}. \text{ Et :}$$

$$\boxed{E_s \{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T\} = R_{xx} - R_{xz} K^T = R_{xx} - K R_{xz}^T}.$$

**Remarque** : l'équation  $K R_{zz} = R_{xz}$  est dite *normale*.

Si, de plus, la matrice  $R_{zz}$  est définie-positive ( $R_{zz} > 0$ ) on a :

$$\boxed{K = R_{xz} R_{zz}^{-1} \text{ et } k = m_x - R_{xz} R_{zz}^{-1} m_z}. \text{ Et :}$$

$$\boxed{E_s \{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T\} = R_{xx} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T}.$$



## Démonstrations

Posons  $Q = x^* E_s \{ \tilde{x} \tilde{x}^T \} x^{*T} = x^* E_s \{ [x - L z - l] [x - L z - l]^T \} x^{*T}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } Q &= x^* E_x \{ x x^T \} x^{*T} - (x^* L) E_s^T \{ x z^T \} x^{*T} - (x^* l) E_x^T \{ x \} x^{*T} \\ &- x^* E_s \{ x z^T \} (x^* L)^T + (x^* L) E_z \{ z z^T \} (x^* L)^T + (x^* l) E_z^T \{ z \} (x^* L)^T \\ &- x^* E_x \{ x \} (x^* l)^T + (x^* L) E_z \{ z \} (x^* l)^T + (x^* l) (x^* l)^T \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial Q}{\partial (x^* L)} = 2 [-E_s^T \{ x z^T \} + E_z \{ z z^T \} L^T + E_z \{ z \} l^T] x^{*T},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial (x^* l)} = 2 [-E_x^T \{ x \} + E_z^T \{ z \} L^T + l^T] x^{*T},$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial (x^* L)^2} = 2 E_z \{ z z^T \} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial (x^* l)^2} = 2 I > 0 \text{ (} I \text{ matrice unité).}$$

Les conditions nécessaires de minimisation de  $Q$  sont :

$$\left[ \frac{\partial Q}{\partial (x^* L)} \right]_{L=K} \text{ et } l=k = 0; \forall x^* \text{ et } \left[ \frac{\partial Q}{\partial (x^* l)} \right]_{L=K} \text{ et } l=k = 0; \forall x^*.$$

Et les conditions suffisantes sont (en plus) :

$$\left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial (x^* L)^2} \right]_{L=K} \text{ et } l=k \geq 0; \forall x^* \text{ et } \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial (x^* l)^2} \right]_{L=K} \text{ et } l=k \geq 0; \forall x^*.$$

Les conditions nécessaires donnent ;

$$\begin{aligned} -E_s^T \{ x z^T \} + E_z \{ z z^T \} K^T + E_z \{ z \} k^T &= 0 \text{ et :} \\ -E_x^T \{ x \} + E_z^T \{ z \} K^T + k^T &= 0. \end{aligned}$$

Et on vérifie que les conditions suffisantes sont satisfaites. Donc :

$$\begin{aligned} k &= E_x \{ x \} - K E_z \{ z \} = m_x - K m_z \text{ et :} \\ [E_z \{ z z^T \} - E_z \{ z \} E_z^T \{ z \}] K^T &= E_s^T \{ x z^T \} - E_z \{ z \} E_x^T \{ x \}. \end{aligned}$$

$$\text{Mais } R_{zz} = E_z \{ z z^T \} - E_z \{ z \} E_z^T \{ z \} \text{ et } R_{xz}^T = E_s^T \{ x z^T \} - E_z \{ z \} E_x^T \{ x \}.$$

$$\text{Donc } R_{zz} K^T = R_{xz}^T \text{ ou } K R_{zz} = R_{xz} \text{ (équation normale) [5]}^2 \text{ et } k = m_x - K m_z .$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } E_s \{ \tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T \} &= E_s \{ [x - K z - k] [x - K z - k]^T \} \\ &= E_s \{ [(x - m_x) - K(z - m_z)] [(x - m_x) - K(z - m_z)]^T \} \\ &= R_{xx} - K R_{xz}^T - R_{xz} K^T + K R_{zz} K^T = R_{xx} - K (R_{xz}^T - R_{zz} K^T) - R_{xz} K^T \\ &= R_{xx} - R_{xz} K^T \text{ [5]}^3 \end{aligned}$$

ou

---

2. éq. 3.2.4 p. 81

3. éq. 3.2.5 p. 81

$$E_s\{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T\} = R_{xx} - K R_{xz}^T - (R_{xz} - K R_{zz}) K^T = R_{xx} - K R_{xz}^T \quad [5]^4 \text{ QED.}$$

Si, de plus,  $R_{zz} > 0$  on a :

$$K = R_{xz} R_{zz}^{-1}, k = m_x - R_{xz} R_{zz}^{-1} m_z \text{ et}$$

$$E_s\{\tilde{x}_1 \tilde{x}_1^T\} = R_{xx} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T \text{ QED.}$$

### 2.2.3.3 Corollaire : principe d'orthogonalité

$$\boxed{E_s\{\tilde{x}_1 z^T\} = 0.}$$

Ce principe signifie que l'erreur de l'estimateur optimal affine est non corrélée à l'observation (on dit conventionnellement que cette erreur et cette observation sont orthogonales).

#### Démonstration

L'équation normale  $R_{xz} = K R_{zz}$  s'écrit :

$$E_s\{(x - m_x)(z - m_z)^T\} = K E_s\{(z - m_z)(z - m_z)^T\}; \text{ soit :}$$

$$E_s\{(x - m_x - K z + K m_z)(z - m_z)^T\} = 0; \text{ soit :}$$

$$E_s\{(x - \hat{x}_1)(z - m_z)^T\} = 0; \text{ soit } E_s\{\tilde{x}_1 z^T\} - m_{\tilde{x}_1} m_z^T = 0; \text{ soit } E_s\{\tilde{x}_1 z^T\} = 0$$

car  $m_{\tilde{x}_1} = 0$  QED.

**Remarque :** On a aussi  $E_s\{\tilde{x}_1 (Lz + l)^T\} = E\{\tilde{x}_1 z^T\} L^T + m_{\tilde{x}_1} l^T = 0$ . Mais, en général  $E_s\{\tilde{x}_1 f^T(z)\} \neq 0$  pour des fonctions  $f$  non affines [12]<sup>5</sup> contrairement à  $E_s\{\tilde{x}_0 f^T(z)\} = 0; \forall f(z)$ .

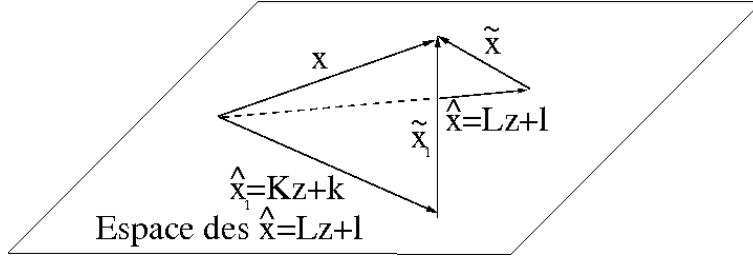


Figure 2. Principe d'orthogonalité :  $\tilde{x}_1$  et  $Lz + l$  sont orthogonales.

### 2.2.3.4 Moyennes de l'estimateur optimal affine $\hat{x}_1$ et de son erreur $\tilde{x}_1$

$m_{\hat{x}_1} = m_{Kz+k} = K m_z + k = K m_z + m_x - K m_z = m_x$ . Donc l'estimateur optimal *affine*  $\hat{x}_1$  est sans biais.

$$m_{\tilde{x}_1} = m_x - m_{\hat{x}_1} = 0. \text{ Donc } \tilde{x}_1 \text{ est centré.}$$

4. p. 81

5. Ex. 2.1.a p. 17

### 2.2.3.5 Autocovariances de l'estimateur optimal affine $\hat{x}_1$ et de son erreur $\tilde{x}_1$

$R_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = R_{xz} K^T = K R_{xz}^T$  et  $R_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} = R_{xx} - R_{xz} K^T = R_{xx} - K R_{xz}^T$  et si  $R_{zz}$  est définie positive ( $R_{zz} > 0$ )  $R_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T$  et :

$$R_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} = R_{xx} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T.$$

#### Démonstration

$R_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = E_s\{(\hat{x}_1 - m_{\hat{x}_1})(\hat{x}_1 - m_{\hat{x}_1})^T\}$   
 $= E_s\{(Kz + k - m_x)(Kz + k - m_x)^T\} = E_s\{(Kz - Km_z)(Kz - Km_z)^T\}$   
 $= K E_z\{(z - m_z)(z - m_z)^T\} K^T = K R_{zz} K^T = R_{xz} K^T = K R_{xz}^T$  et si  $R_{zz}$  est définie positive ( $R_{zz} > 0$ )  $R_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T$  QED.

Et  $R_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} = R_{xx} - R_{xz} K^T = R_{xx} - K R_{xz}^T$  (déjà vu) et si  $R_{zz}$  est définie positive ( $R_{zz} > 0$ )  $R_{\tilde{x}_1\tilde{x}_1} = R_{xx} - R_{xz} R_{zz}^{-1} R_{xz}^T$  (déjà vu).

### 2.2.3.6 Cas particulier où $s$ est gaussien et $R_{zz}$ définie positive

On constate que  $\hat{x}_1 = \hat{x}_0$  et donc  $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0$ .

### 2.2.3.7 Exemple

cf. Annexe de ce chapitre.

## 2.3 Estimée $\hat{\xi}$ du vecteur aléatoire $x$ connaissant la réalisation $\zeta$ du vecteur aléatoire $z$

Si  $\zeta$  est une réalisation de  $z$  alors  $\hat{\xi} = f(\zeta)$  est une *estimée quelconque* de  $x$  : c'est un vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ , fonction du vecteur *déterministe*  $\zeta$ , de dimension  $p$ .

### 2.3.1 Estimée optimale $\hat{\xi}_0$ , au sens des moindres carrés

$\hat{\xi}_0 = f_0(\zeta) = m_{x|z=\zeta}$  est l'*estimée optimale* de  $x$ , au sens des moindres carrés.

### 2.3.2 Estimée optimale affine $\hat{\xi}_1$ , au sens des moindres carrés

$\hat{\xi}_1 = f_1(\zeta) = K\zeta + k$  est l'*estimée optimale affine* de  $x$ , au sens des moindres carrés.

## 2.4 Estimateur du vecteur *aléatoire* $x$ connaissant le vecteur *aléatoire* $Z$

Tout ce qui a été dit, dans la section précédente, concernant l'estimateur  $\hat{x}$  et l'erreur de l'estimateur  $\tilde{x}$  du vecteur *aléatoire*  $x$  connaissant le vecteur *aléatoire*  $z$  est, bien entendu, valable connaissant le vecteur *aléatoire*  $Z$  qui joue le même rôle que le vecteur *aléatoire*  $z$ , mais avec une dimension augmentée de  $p$  à  $Np$ .

Il suffit de remplacer :

$z$  par  $Z$ ,  $f$  par  $F$ ,  $f_0$  par  $F_0$ ,  $f_1$  par  $F_1$ ,  $s$  par  $S$ ,  $K$  par  $\mathcal{K}$ ,  $k$  par  $\kappa$ ,  
 $L$  par  $\mathcal{L}$ ,  $l$  par  $\ell$ ,  $P$  par  $\mathcal{P}$ .

## 2.5 Estimée $\hat{\xi}$ du vecteur *aléatoire* $x$ connaissant la réalisation $\mathfrak{Z}$ du vecteur *aléatoire* $Z$

Tout ce qui a été dit, dans l'avant dernière section précédente, concernant l'estimée  $\hat{\xi}$  du vecteur *aléatoire*  $x$  connaissant la réalisation  $\zeta$  du vecteur *aléatoire*  $z$  est, bien entendu, valable connaissant la réalisation  $\mathfrak{Z}$  du vecteur *aléatoire*  $Z$  qui joue le même rôle que le vecteur  $\zeta$ , mais avec une dimension augmentée de  $p$  à  $Np$ .

Il suffit de remplacer :

$z$  par  $Z$ ,  $f$  par  $F$ ,  $f_0$  par  $F_0$ ,  $f_1$  par  $F_1$ ,  $s$  par  $S$ ,  $K$  par  $\mathcal{K}$ ,  $k$  par  $\kappa$ ,  
 $L$  par  $\mathcal{L}$ ,  $l$  par  $\ell$ ,  $P$  par  $\mathcal{P}$  et  $\zeta$  par  $\mathfrak{Z}$ .

## 2.6 Estimateur optimal $\hat{x}_0(t)$ et son erreur $\tilde{x}_0(t)$ , au sens des moindres carrés, du signal vectoriel *aléatoire* centré $x(t)$ , connaissant $z[t_0 t] \stackrel{\Delta}{=} \{z(\tau) | \tau \in [t_0 t]\}$ où $z(\tau)$ est un signal vectoriel *aléatoire* centré

Soit  $t_0$  un instant qualifié d'instant initial et :

- $x(t)$  un signal vectoriel *aléatoire*, de dimension  $n$ , *centré* (i.e. tel que  $m_{x(t)} = 0$ ).
- $z(t)$  un signal vectoriel *aléatoire*, de dimension  $p$  *centré* (i.e. tel que  $m_{z(t)} = 0$ ), tel que  $z(t) = 0$ ;  $t < t_0$

Si  $t_0 < t$  on suppose l'application  $z : \tau \mapsto z(\tau)$  continue sur  $]t_0, t[$  [18]<sup>6</sup>

Considérons  $\hat{x}(t)$  un estimateur *quelconque* de l'état  $x(t)$  tel que :

$$\hat{x}(t) \triangleq \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \text{ où :}$$

$H : (t, \tau) \mapsto H(t, \tau)$  est une application matricielle, de dimension  $n \times p$ , supposée continuellement différentiable;  $\forall t; \forall \tau$ .

Par conséquent  $\hat{x}(t) = 0; t \leq t_0$ .

Soit le filtre *causal* (cf. Annexe B) ayant pour matrice de réponse impulsionnelle  $\tilde{H}$ , de dimension  $n \times p$ , telle que :

$$\tilde{H}(t, \tau) = \begin{cases} H(t, \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}.$$

On constate que l'application matricielle, de dimension  $n \times p$  :

$\tilde{H} : (t, \tau) \mapsto \tilde{H}(t, \tau)$  n'est pas continue.

On peut alors considérer que  $\hat{x}(t)$  est la réponse de ce filtre pour l'entrée  $z(t)$  :

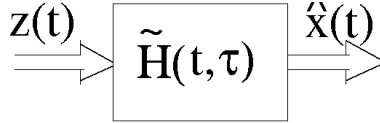


Figure 3. Filtre linéaire causal de matrice de réponse impulsionnelle  $\tilde{H}(t, \tau)$

### Démonstration

• Par définition (cf. Annexe B) :

$$\hat{x}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(t, \tau) z(\tau) d\tau.$$

• Mais ce filtre étant causal on a  $\tilde{H}(t, \tau) = 0; t < \tau$  et, par conséquent :

$$\hat{x}(t) \triangleq \int_{-\infty}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau.$$

• De plus :  $z(\tau) = 0; \tau < t_0$  et, par conséquent :

$$\hat{x}(t) \triangleq \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \text{ QED.}$$

Et soit  $\hat{x}_0(t)$  l'estimateur *optimal*, au sens des moindres carrés, (défini ci-après) de l'état  $x(t)$  tel que :

$$\hat{x}_0(t) \triangleq \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau \text{ où :}$$

---

6. p. 36 éq. 2.1.8; il s'agit de la continuité en moyenne quadratique

$H_0 : (t, \tau) \mapsto H_0(t, \tau)$  est une application matricielle, de dimension  $n \times p$ , supposée continuellement différentiable;  $\forall t; \forall \tau$ .

Par conséquent  $\widehat{x}_0(t) = 0; t \leq t_0$ .

Soit le filtre *causal* (cf. Annexe B) ayant pour matrice de réponse impulsionnelle  $\widetilde{H}_0$ , de dimension  $n \times p$ , telle que :

$$\widetilde{H}_0(t, \tau) = \begin{cases} H_0(t, \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} .$$

On constate que l'application matricielle, de dimension  $n \times p$  :  $\widetilde{H}_0 : (t, \tau) \mapsto \widetilde{H}_0(t, \tau)$  n'est pas continue.

On peut alors également considérer que  $\widehat{x}_0(t)$  est la réponse de ce filtre pour l'entrée  $z(t)$  :

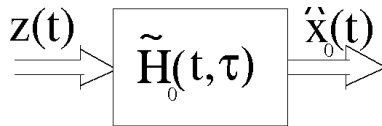


Figure 4. Filtre linéaire causal de matrice de réponse impulsionnelle  $\widetilde{H}_0(t, \tau)$ .

**Remarque :**

Soit pour  $t_0 < t : z[t_0 t] \triangleq \{z(\tau) | \tau \in [t_0 t]\}$ .

D'après ce qui précède on peut dire que :

$$\widehat{x}_0(t) = \begin{cases} m_{x(t)|z[t_0 t]} & \text{si } t_0 < t \\ 0 & \text{si } t \leq t_0 \end{cases} .$$

Pour tout covecteur *déterministe*  $x^*$ , de dimension  $n$ , et à tout instant  $t$ , considérons la variable *aléatoire* (donc scalaire)  $X \triangleq x^*x(t)$ . Alors  $X$  appartient à un espace vectoriel  $\mathcal{X}$ , de dimension 1 ( $X \in \mathcal{X}$ ).

Considérons également les variables *aléatoires* (donc scalaires) :

$$\begin{aligned} \widehat{X} &\triangleq x^*\widehat{x}(t) = x^* \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \text{ et} \\ \widehat{X}_0 &\triangleq x^*\widehat{x}_0(t) = x^* \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Elles appartiennent à un sous espace vectoriel  $\widehat{\mathcal{X}}$  de  $\mathcal{X}$ .

En effet si  $\widehat{X}' \triangleq x^* \int_{t_0}^t H'(t, \tau) z(\tau) d\tau$  et  $\widehat{X}'' \triangleq x^* \int_{t_0}^t H''(t, \tau) z(\tau) d\tau$  alors  $\widehat{X}' - \widehat{X}'' = x^* \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau$  avec  $H(t, \tau) = H'(t, \tau) - H''(t, \tau)$  et  $\widehat{X}' - \widehat{X}'' \in \widehat{\mathcal{X}}$ .

Considérons de plus

$$\begin{aligned}\tilde{X} &\triangleq X - \hat{X} = x^*[x(t) - \hat{x}(t)] = x^*\tilde{x}(t) \text{ et} \\ \tilde{X}_0 &\triangleq X - \hat{X}_0 = x^*[x(t) - \hat{x}_0(t)] = x^*\tilde{x}_0(t).\end{aligned}$$

$\hat{x}_0(t)$  est tel que, par définition,  $\hat{X}_0$  est l'estimateur optimal, au sens des moindres carrés, de  $X$ ,  $\forall x^*$ .

Par conséquent

$$(1) \|\tilde{X}\|^2 \geq \|\tilde{X}_0\|^2; \forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}} \iff (2) \tilde{X}_0 \cdot \hat{X} = 0; \forall \hat{X} \in \hat{\mathcal{X}}. \text{ Soit :}$$

$$(1) E\{x^*\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)x^{*T}\} \geq E\{x^*\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)x^{*T}\}; \forall x^*; \forall H, \text{ ou :}$$

$$(2) E\{x^*\tilde{x}_0(t) [\int_{t_0}^t z^T(\tau) H^T(t, \tau) d\tau] x^{*T}\} = 0; \forall x^*; \forall H.$$

### 2.6.1 Conséquences de (1)

$$(1) \text{ s'écrit : } x^*[E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} - E\{\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)\}] x^{*T} \geq 0; \forall x^* \text{ et } \forall H.$$

Donc il faut et il suffit que la matrice  $E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} - E\{\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)\}$  soit semi-définie positive  $\forall H$ , ce que l'on écrit :

$$\begin{aligned}E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} - E\{\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)\} &\geq 0; \forall H \text{ ou :} \\ E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} &\geq E\{\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)\}; \forall H.\end{aligned}$$

En ce sens on dit que l'estimateur optimal, au sens des moindres carrés,  $\hat{x}_0(t)$  minimise l'autocovariance  $E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\}$  (qui est une matrice semi-définie positive). Donc est tel que :

$$\boxed{E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\} \geq E\{\tilde{x}_0(t)\tilde{x}_0^T(t)\} \geq 0; \forall H.}$$

### 2.6.2 Conséquence de (2)

$$(2) \text{ s'écrit : } x^*[\int_{t_0}^t E\{\tilde{x}_0(t)z^T(\tau)\} H^T(t, \tau) d\tau] x^{*T} = 0; \forall x^*; \forall H.$$

#### Remarque

Si  $t < t_0$  alors  $\tau < t_0$  et  $z(\tau) = 0$  et l'équation (2) est triviale.

Si  $t = t_0$  l'équation (2) est également triviale.

Supposons donc maintenant que  $t_0 < t$ .

### 2.6.2.1 Principe d'orthogonalité

Pour  $t_0 < t$  l'équation (2) est équivalente à :

$$E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} = 0; t_0 < \tau < t.$$

Il s'agit du principe d'orthogonalité qui signifie que l'erreur de l'estimateur optimal  $\tilde{x}_0(t)$ ;  $t_0 < t$  est non corrélée à l'observation  $z(\tau)$ ;  $\forall \tau : t_0 < \tau < t$  (on dit conventionnellement que cette erreur et cette observation sont orthogonales) :

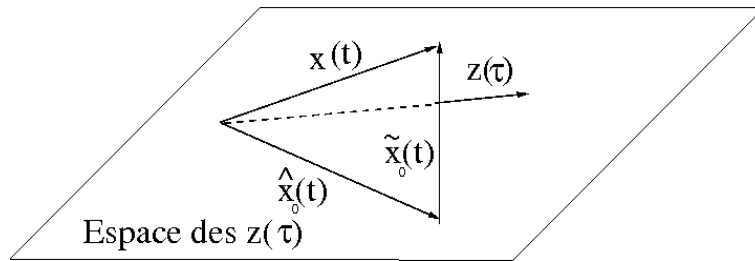


Figure 5. Principe d'orthogonalité :  $\tilde{x}_0(t)$  et  $z(\tau)$  sont orthogonales.

#### Démonstration de la condition suffisante

C'est évident QED.

#### Démonstration de la condition nécessaire

Pour  $t_0 < t$  choisissons une application matricielle  $H$  telle que  $H(t, \tau) = E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\}$ ;  $t_0 < \tau < t$ . Alors l'équation (2) s'écrit :

$$x^* [\int_{t_0}^t E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} E^T\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} d\tau] x^{*T} = 0; \forall x^*.$$

$$\int_{t_0}^t \|x^* E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\}\|^2 d\tau = 0; \forall x^*.$$

Étant donné que l'intégrande est une fonction de  $\tau$  continue et positive On en déduit que :  $x^* E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} = 0; \forall x^*; t_0 < \tau < t$  et par conséquent que  $E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} = 0; t_0 < \tau < t$  QED.

**Remarque** : le principe d'orthogonalité n'est pas, a priori, valable pour  $\tau = t_0$  et  $\tau = t$ .

### 2.6.2.2 Corollaire

$$E\{\tilde{x}_0(t) \hat{x}_0^T(t)\} = 0; t_0 \leq t.$$



### Démonstration

$E\{\tilde{x}_0(t_0) \hat{x}_0^T(t_0)\} = 0$  car  $\hat{x}_0(t_0) = 0$  et :

$$\begin{aligned} E\{\tilde{x}_0(t) \hat{x}_0^T(t)\} &= E\{\tilde{x}_0(t) [\int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau]^T\} \\ &= \int_{t_0}^t E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} H_0^T(t, \tau) d\tau = 0; t_0 < t \text{ d'après le principe d'orthogonalité QED.} \end{aligned}$$

### 2.6.2.3 Unicité de l'estimateur optimal et de son erreur

l'estimateur optimal  $\hat{x}_0(t) = \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau$  et son erreur  $\tilde{x}_0(t)$  sont uniques.

### Démonstration

Supposons que  $\hat{x}'_0(t)$  soit un autre estimateur optimal.

Soit  $\hat{X}'_0 = x^* \hat{x}'_0(t)$ . On a vu que  $\hat{X}'_0 = \hat{X}_0; \forall x^*$ . On en déduit donc que  $\hat{x}'_0(t) = \hat{x}_0(t)$  et donc que l'estimateur optimal  $\hat{x}_0(t) = \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau$  ainsi que son erreur  $\tilde{x}_0(t) = x(t) - \hat{x}_0(t)$  sont uniques QED.

### 2.6.3 Équation intégrale de Wiener-Hopf

$\hat{x}_0(t) = \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau$  est l'estimateur optimal ssi on a l'équation intégrale de Wiener-Hopf :

$$\boxed{\int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) E\{z(\sigma) z^T(\tau)\} d\sigma = E\{x(t) z^T(\tau)\}; t_0 < \tau < t.}$$

#### 2.6.3.1 Démonstration de la condition nécessaire

$E\{x(t) z^T(\tau)\} = E\{\tilde{x}_0(t) z^T(\tau)\} + E\{\hat{x}_0(t) z^T(\tau)\}$  et donc d'après le principe d'orthogonalité :  $E\{x(t) z^T(\tau)\} = E\{\hat{x}_0(t) z^T(\tau)\}; t_0 < \tau < t$ . Soit :

$$\begin{aligned} E\{x(t) z^T(\tau)\} &= E\{[\int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) z(\sigma) d\sigma] z^T(\tau)\} \\ &= \int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) E\{z(\sigma) z^T(\tau)\} d\sigma; t_0 < \tau < t \text{ QED.} \end{aligned}$$

#### 2.6.3.2 Démonstration de la condition suffisante

Soit  $H_0$  tel que  $\int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) E\{z(\sigma) z^T(\tau)\} d\sigma = E\{x(t) z^T(\tau)\}; t_0 < \tau < t$ .

Considérons l'estimateur  $\hat{x}(t) \triangleq \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau$ . On peut écrire :

$$E\{\hat{x}(t) z^T(\tau)\} = E\left\{\left[\int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) z(\sigma) d\sigma\right] z^T(\tau)\right\}$$

$$= \int_{t_0}^t H_0(t, \sigma) E\{z(\sigma) z^T(\tau)\} d\sigma = E\{x(t) z^T(\tau)\}; t_0 < \tau < t, \text{ d'après l'équation}$$

intégrale de Wiener-Hopf.

Par conséquent si  $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  est l'erreur de cet estimateur on a :

$$E\{\tilde{x}(t) z^T(\tau)\} = E\{x(t) z^T(\tau)\} - E\{\hat{x}(t) z^T(\tau)\} = 0; t_0 < \tau < t. \text{ Et d'après le}$$

principe d'orthogonalité et l'unicité de l'estimateur optimal on a  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_0(t)$  et  $\hat{x}(t) = \hat{x}_0(t)$  QED.

### 2.6.3.3 Résolution de l'équation intégrale de Wiener-Hopf

La résolution de l'équation intégrale de Wiener-Hopf fournit  $H_0(t, \tau)$  et par conséquent l'estimateur optimal  $\hat{x}_0(t) = \int_{t_0}^t H_0(t, \tau) z(\tau) d\tau$ . Mais cette résolution est en général très difficile (cf. Chapitre 5).



### Annexe : exemple pour lequel $s$ n'est pas gaussien

Cet exemple cité par [12]<sup>7</sup> est dû à [14].

Soit  $s = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$  un vecteur *aléatoire*, de dimension 2, ayant pour d.d.p. :

$p_s(a, c) = \frac{e^{-c}}{a}$  si  $(a, c) \in D$  et  $p_s(a, c) = 0$  si  $(a, c) \notin D$  où  $D$  est le domaine suivant du plan  $(a, c)$  :

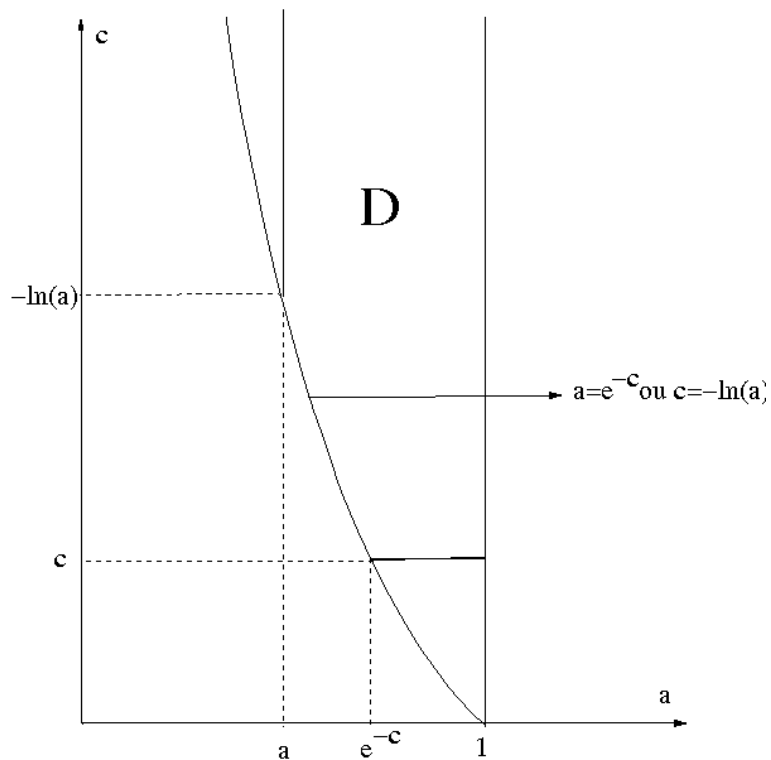


Figure 6. Visualisation du domaine  $D$ .

#### 2.6.4 Calcul de $p_x(a)$

$p_x(a) = \int_0^\infty p_s(a, c) dc = \int_{-\ln a}^\infty \frac{e^{-c}}{a} dc = \frac{1}{a} [-e^{-c}]_{-\ln a}^\infty = 1; a \in (0, 1)$ .  
Donc  $x$  est uniformément distribué sur  $(0, 1)$ .

On vérifie que  $\int_0^1 p_x(a) da = \int_0^1 da = 1$ .

---

7. Ex. 1.1 p. 8

### 2.6.5 Calcul de $p_z(c)$

$$p_z(c) = \int_0^1 p_s(a, c) da = \int_{e^{-c}}^1 \frac{e^{-c}}{a} da = e^{-c} [\ln a]_{e^{-c}}^1 = c e^{-c}; c \in (0, \infty).$$

$$\text{On vérifie que } \int_0^\infty p_z(c) dc = \int_0^\infty c e^{-c} dc = 1.$$

### 2.6.6 Calcul de $p_{x|z}(a|c)$

D'après la règle de Bayes  $p_{x|z}(a|c) = \frac{p_s(a,c)}{p_z(c)}$ . Donc

$$p_{x|z}(a|c) = \frac{1}{ac} \text{ si } (a, c) \in D \text{ et } p_{x|z}(a|c) = 0 \text{ si } (a, c) \notin D.$$

$$\text{On vérifie que } \int_0^1 p_{x|z}(a|c) da = \int_{e^{-c}}^1 \frac{1}{ac} da = \frac{1}{c} [\ln a]_{e^{-c}}^1 = 1; c \in (0, \infty).$$

### 2.6.7 Calcul de $p_{z|x}(c|a)$

D'après la règle de Bayes  $p_{z|x}(c|a) = \frac{p_s(a,c)}{p_x(a)}$ . Donc

$$p_{z|x}(c|a) = \frac{e^{-c}}{a} \text{ si } (a, c) \in D \text{ et } p_{z|x}(c|a) = 0 \text{ si } (a, c) \notin D.$$

$$\text{Donc en fait } p_{z|x}(c|a) = p_s(a, c).$$

$$\text{On vérifie que } \int_0^\infty p_{z|x}(c|a) dc = \int_0^\infty p_s(a, c) dc = p_x(a) = 1; a \in (0, 1).$$

### 2.6.8 Calcul de $m_x$

$$m_x = \int_0^1 a p_x(a) da = \int_0^1 a da = \frac{1}{2}.$$

### 2.6.9 Calcul de $m_z$

$$m_z = \int_0^\infty c p_z(c) dc = \int_0^\infty c^2 e^{-c} dc = 2.$$

### 2.6.10 Calcul de $\hat{x}_0 = m_{x|z}$

$\hat{x}_0 = m_{x|z} = \int_0^1 a p_{x|z}(a|z) da = \int_{e^{-z}}^1 \frac{1}{z} da = \frac{1-e^{-z}}{z}$ . Il s'agit d'une variable aléatoire.

### 2.6.11 Calcul de $m_{\hat{x}_0} = m_{m_{x|z}}$ et de $m_{\tilde{x}_0}$

$$m_{m_{x|z}} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-c}}{c} p_z(c) dc = \int_0^\infty (1-e^{-c}) e^{-c} dc = \frac{1}{2}.$$

On a bien  $m_{\hat{x}_0} = m_{m_{x|z}} = m_x$  et  $\hat{x}_0$  est un estimateur non biaisé. De plus  $m_{\tilde{x}_0} = 0$  et  $\tilde{x}_0$  est une erreur centrée.

### 2.6.12 Calcul de $R_{xx}$

$$R_{xx} = \text{cov}\{x, x\} = E_x\{(x - m_x)^2\} = \int_0^1 (a - \frac{1}{2})^2 p_x(a) da = \int_0^1 (a - \frac{1}{2})^2 da.$$

Soit  $R_{xx} = \frac{1}{12}$ .

### 2.6.13 Calcul de $R_{zz}$

$$R_{zz} = \text{cov}\{z, z\} = E_z\{(z - m_z)^2\} = \int_0^\infty (c - 2)^2 p_z(c) dc = \int_0^\infty (c - 2)^2 c e^{-c} dc.$$

Soit  $R_{zz} = 2$ .

### 2.6.14 Calcul de $R_{xz}$

$$R_{xz} = \text{cov}\{x, z\} = E_x\{(x - m_x)(z - m_z)\} = \int_0^1 \int_0^\infty (a - \frac{1}{2})(c - 2) p_s(a, c) da dc$$

On peut calculer analytiquement cette intégrale double par rapport à  $a$  puis par rapport à  $c$  ou par rapport à  $c$  puis par rapport à  $a$ . On obtient :

$$R_{xz} = -\frac{1}{4}.$$

### 2.6.15 Calcul de $\hat{x}_1 = K z + k$

$$K = R_{xz} R_{zz}^{-1} = -\frac{1}{8} \text{ et } k = m_x - R_{xz} R_{zz}^{-1} m_z = \frac{3}{4}$$
$$\hat{x}_1 = -\frac{1}{8} z + \frac{3}{4} \quad [12]^8$$

### 2.6.16 Calcul de $m_{\hat{x}_1}$ et de $m_{\tilde{x}_1}$

$$m_{\hat{x}_1} = -\frac{1}{8} m_z + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a bien  $m_{\hat{x}_1} = m_x$  et  $\hat{x}_1$  est un estimateur non biaisé. De plus  $m_{\tilde{x}_1} = 0$  et  $\tilde{x}_1$  est une erreur centrée.

### 2.6.17 Calcul de $E_s\{\tilde{x}_0^2\}$

$$E_s\{\tilde{x}_0^2\} = \int_0^1 \int_0^\infty (a - \frac{1-e^{-c}}{c})^2 p_s(a, c) da dc.$$

Le calcul analytique semble hors de portée. Un calcul numérique (avec Maple) donne  $E_s\{\tilde{x}_0^2\} = 0,04565\dots$

### 2.6.18 Calcul de $E_s\{\tilde{x}_1^2\}$

$$E_s\{\tilde{x}_1^2\} = \int_0^1 \int_0^\infty (a + \frac{1}{8} c - \frac{3}{4})^2 p_s(a, c) da dc.$$

On peut calculer analytiquement cette intégrale double par rapport à  $a$  puis par rapport à  $c$  ou par rapport à  $c$  puis par rapport à  $a$ . On obtient :

$$E_s\{\tilde{x}_1^2\} = \frac{5}{96} = 0,05208\dots$$

---

8. p. 18

### 2.6.19 Comparaison de $E_s\{\tilde{x}_0^2\}$ et $E_s\{\tilde{x}_1^2\}$

On a bien  $E_s\{\tilde{x}_1^2\} > E_s\{\tilde{x}_0^2\}$ .

### 2.6.20 Remarque

En fait  $x$  est une variable *aléatoire* uniformément distribuée sur  $(0, 1)$  et  $z = \ln(\frac{1}{x}) + w$  où  $w$  est une variable *aléatoire* de d.d.p.  $p_w(\omega) = e^{-\omega}$  si  $\omega > 0$  et  $p_w(\omega) = 0$  si  $\omega < 0$ , indépendante de  $x$ .

Dans ces conditions :

$$p_{z|x}(c|a) = p_w[c - \ln(\frac{1}{a})] \quad [17].$$

Soit  $p_{z|x}(c|a) = e^{-[c - \ln(\frac{1}{a})]} = \frac{e^{-c}}{a}$  si  $c > \ln(\frac{1}{a})$  et  $p_{z|x}(c|a) = 0$  si  $c < \ln(\frac{1}{a})$ .  
ou  $p_{z|x}(c|a) = \frac{e^{-c}}{a}$  si  $(a, c) \in D$  et  $p_{z|x}(c|a) = 0$  si  $(a, c) \notin D$ .

Et donc, d'après la règle de Bayes :  $p_s(a, c) = p_{z|x}(c|a) p_x(a)$  ; soit :

$$p_s(a, c) = \frac{e^{-c}}{a} \text{ si } (a, c) \in D \text{ et } p_s(a, c) = 0 \text{ si } (a, c) \notin D.$$

On retrouve bien les hypothèses précédentes.

# Chapitre 3

## Filtre discret de Kalman

Pour le filtre discret de Kalman [6] [5]<sup>1</sup> considérons des instants discrets  $t_0, t_1 = t_0 + \Delta, t_2 = t_0 + 2\Delta, \dots$

### 3.1 Définitions

a)  $x_i = x(t_i); i = 0, 1, \dots$  état du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$

On verra que  $x_i$  est gaussien et centré.

$\Pi_i \triangleq R_{x_i x_i} \triangleq \text{cov}\{x_i, x_i\}; i = 0, 1, \dots$  autocovariance de  $x_i$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $\Pi_i^T = \Pi_i$ ).

b)  $v_{di} = v_d(t_i); i = 0, 1, \dots$  bruit du processus ou bruit d'état : bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ ; donc tel que :

$m_{v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$   
 $R_{v_{di} v_{dj}} \triangleq \text{cov}\{v_{di}, v_{dj}\} = V_{di} \delta_{ij}^2$  intercovariance de  $v_{di}$  et  $v_{dj}; i = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots$  avec :

$V_{di}; i = 0, 1, \dots$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $V_{di}^T = V_{di}$ ).

c)  $y_i = y(t_i); i = 0, 1, \dots$  observation non bruitée de l'état du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ .

Bien entendu cette observation non bruitée n'est pas disponible.

On verra que  $y_i$  est gaussien et centré.

d)  $w_{di} = w_d(t_i); i = 0, 1, \dots$  bruit d'observation : bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ , donc tel que :

---

1. leçon 17. pp. 242-258  
2.  $\delta_{ij}$  symbole de Kronecker



$m_{w_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$   
 $R_{w_{di}w_{dj}} \triangleq \text{cov}\{w_{di}, w_{dj}\} = W_{di} \delta_{ij}; i = 0, 1, \dots$  intercovariance de  $w_{di}$  et  $w_{dj}; j = 0, 1, \dots$  avec :  
 $W_{di}; i = 0, 1, \dots$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $p$ , symétrique ( $W_{di}^T = W_{di}$ ), définie positive ( $W_{di} > 0$ ).

e)  $z_i = z(t_i); i = 0, 1, \dots$  observation bruitée du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ .

Cette observation est disponible.

On verra que  $z_i$  est gaussien et centré.

f)  $Z_{i-1} \triangleq [z_0^T \dots z_{i-1}^T]^T; i = 1, 2, \dots$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $ip$ .

On verra que  $Z_{i-1}$  est gaussien et centré car on verra que  $z_0, \dots, z_{i-1}$  sont gaussiens et centrés.

g)  $Z_i \triangleq [z_0^T \dots z_i^T]^T = [Z_{i-1}^T z_i^T]^T; i = 0, 1, \dots$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $(i+1)p$ .

On verra que  $Z_i$  est gaussien et centré car on verra que  $z_0, \dots, z_i$  sont gaussiens et centrés.

h)  $\mathfrak{Z}_{i-1} \triangleq [\zeta_0^T \dots \zeta_{i-1}^T]^T; i = 1, 2, \dots$  une réalisation de  $Z_{i-1}$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $ip$ .

i)  $\mathfrak{Z}_i \triangleq [\zeta_0^T \dots \zeta_i^T]^T = [\mathfrak{Z}_{i-1}^T \zeta_i^T]^T; i = 0, 1, \dots$  une réalisation de  $Z_i$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $(i+1)p$ .

j)  $x_0^- \triangleq x_0$  et  $x_i^- \triangleq (x_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}); i = 1, 2, \dots$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ .

On verra que  $x_i^-; i = 0, 1, \dots$  est gaussien car on verra que  $x_i$  et  $Z_{i-1}$  sont gaussiens (et centrés).

k)  $x_i^+ \triangleq (x_i | Z_i = \mathfrak{Z}_i); i = 0, 1, \dots$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ .

On verra que  $x_i^+; i = 0, 1, \dots$  est gaussien car on verra que  $x_i$  et  $Z_i$  sont gaussiens (et centrés).

l)  $z_0 \triangleq z_0$  et  $z_i \triangleq (z_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}); i = 1, 2, \dots$  vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ .

On verra que  $z_i; i = 0, 1, \dots$  est gaussien car on verra que  $z_i$  et  $Z_{i-1}$  sont gaussiens (et centrés).

m)  $W_{ed0} \triangleq R_{z_0z_0} \triangleq \text{cov}\{z_0, z_0\} = R_{z_0z_0} \triangleq \text{cov}\{z_0, z_0\}$  autocovariance de  $z_0$  et  $W_{edi} \triangleq R_{z_i z_i} \triangleq \text{cov}\{z_i, z_i\} = \text{cov}\{z_i, z_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}\}; i = 1, 2, \dots$  autocovariance de  $z_i$  matrice *déterministe*, d'ordre  $p$ , symétrique ( $W_{edi}^T = W_{edi}$ ).

On verra que  $W_{edi}$  est *indépendante* de  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  car on verra que  $z_i$  et  $Z_{i-1}$  sont gaussiens et que, par conséquent,  $W_{edi} = cov\{z_i, z_i|Z_{i-1}\}$ ;  $i = 1, 2, \dots$

n)  $P_0^- \triangleq R_{x_0^- x_0^-} \triangleq cov\{x_0^-, x_0^-\} = R_{x_0 x_0} = \Pi_0$  autocovariance de  $x_0^-$  et  $P_i^- \triangleq R_{x_i^- x_i^-} \triangleq cov\{x_i^-, x_i^-\} = cov\{x_i, x_i|Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}\}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  autocovariance de  $x_i^-$  matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $P_i^{-T} = P_i^-$ ). On verra que  $P_i^-$  est *indépendante* de  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  car on verra que  $x_i$  et  $Z_{i-1}$  sont gaussiens [13]<sup>3</sup> et que, par conséquent,  $P_i^- = cov\{x_i, x_i|Z_{i-1}\}$ ;  $i = 1, 2, \dots$

o)  $P_i^+ \triangleq R_{x_i^+ x_i^+} \triangleq cov\{x_i^+, x_i^+\} = cov\{x_i, x_i|Z_i = \mathfrak{Z}_i\}$ ;  $i = 0, 1, \dots$  autocovariance de  $x_i^+$  matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $P_i^{+T} = P_i^+$ ). On verra que  $P_i^+$  est *indépendante* de  $\mathfrak{Z}_i$  car on verra que  $x_i$  et  $Z_i$  sont gaussiens [13]<sup>4</sup> et que, par conséquent,  $P_i^+ = cov\{x_i, x_i|Z_i\}$ ;  $i = 0, 1, \dots$

p)  $R_{x_i^- z_i} \triangleq cov\{x_i^-, z_i\} = cov\{x_i, z_i|Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}\}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  intercovariance de  $x_i^-$  et de  $z_i$  matrice *déterministe*, de dimension  $n \times p$ .

On verra que  $R_{x_i^- z_i}$  est *indépendante* de  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  car on verra que  $x_i, z_i$  et  $Z_{i-1}$  sont gaussiens et que, par conséquent,  $R_{x_i^- z_i} = cov\{x_i, z_i|Z_{i-1}\}$ ;  $i = 1, 2, \dots$

## 3.2 Conditions initiales

On suppose que  $m_{x_0} = 0$  et que  $\Pi_0$  est connue.

## 3.3 Hypothèses

On suppose que :

- $x_0$  est gaussien.
- $R_{v_{di} w_{dj}} \triangleq cov\{v_{di}, w_{dj}\} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$ ;  $j = 0, 1, \dots$  intercovariance de  $v_{di}$  et  $w_{dj}$  (on pourrait ne pas le supposer : [5]<sup>5</sup>).
- $R_{x_0 v_{dj}} \triangleq cov\{x_0, v_{dj}\} = 0$ ;  $j = 0, 1, \dots$  intercovariance de  $x_0$  et  $v_{dj}$  ( $x_0$  et  $v_{dj}$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens).
- $R_{x_0 w_{dj}} \triangleq cov\{x_0, w_{dj}\} = 0$ ;  $j = 0, 1, \dots$  intercovariance de  $x_0$  et  $w_{dj}$  ( $x_0$  et  $w_{dj}$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens).

---

3. éq. 5-16

4. éq. 5-32

5. ch. 9. p. 310 et suivantes

## 3.4 État discret du processus

### 3.4.1 Équation discrète stochastique d'état

On suppose que l'évolution de l'état du processus est donné par l'équation discrète :

$$x_{i+1} = A_{di} x_i + v_{di}; i = 0, 1, \dots \quad [13]^6.$$

$A_{di}$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , supposée stable, ou de Hurwitz, i.e. telle que ses valeurs propres sont situées strictement dans le demi-plan complexe gauche.

### 3.4.2 Vecteur $x_i; i = 0, 1, \dots$

#### 3.4.2.1 Le vecteur $x_i; i = 0, 1, \dots$ est gaussien

**Démonstration**

$x_0$  est gaussien

$x_1 = A_{d0} x_0 + v_{d0}$  est gaussien par combinaison linéaire de vecteurs gaussiens.

$x_2 = A_{d1} x_1 + v_{d1}$  est gaussien pour la même raison et, par conséquent, de proche en proche on démontre que  $x_i$  est gaussien QED.

#### 3.4.2.2 Le vecteur $x_i; i = 0, 1, \dots$ est centré

$m_{x_i} = 0; i = 0, 1, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$  et  $x_i$  est bien centré.

**Démonstration**

$$m_{x_{i+1}} = m_{A_{di} x_i + v_{di}} = A_{di} m_{x_i} + m_{v_{di}} = A_{di} m_{x_i}.$$

Donc puisque  $m_{x_0} = 0 : m_{x_1} = 0, m_{x_2} = 0, \dots$  QED.

### 3.4.3 Calcul de $R_{x_i v_{dj}} \triangleq cov\{x_i, v_{dj}\}$ pour $i \leq j$

$$R_{x_i v_{dj}} = 0; i = 0, 1, \dots; j = i, i + 1, \dots$$

**Démonstration**

$$R_{x_1 v_{dj}} = A_{d0} R_{x_0 v_{dj}} + R_{v_{d0} v_{dj}} = 0; j = 1, 2, \dots$$

$$R_{x_2 v_{dj}} = A_{d1} R_{x_1 v_{dj}} + R_{v_{d1} v_{dj}} = 0; j = 2, 3, \dots$$

---

6. éq. 5-1b (en supposant l'entrée nulle)

Finalement, de proche en proche :  
 $R_{x_i v_{dj}} = 0; i = 0, 1, \dots; j = i, i + 1, \dots$  QED.

### 3.4.4 Calcul de $R_{x_i w_{dj}} \triangleq cov\{x_i, w_{dj}\}; i = 0, 1, \dots;$ $j = 0, 1, \dots$

$$R_{x_i w_{dj}} = 0; i = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

$$R_{x_1 w_{dj}} = R_{(A_{d0} x_0 + v_{d0}) w_{dj}} = A_{d0} R_{x_0 w_{dj}} + R_{v_{d0} w_{dj}} = 0.$$

$$R_{x_2 w_{dj}} = R_{(A_{d1} x_1 + v_{d1}) w_{dj}} = A_{d1} R_{x_1 w_{dj}} + R_{v_{d1} w_{dj}} = 0.$$

Finalement, de proche en proche :

$$R_{x_i w_{dj}} = 0; i = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots$$
 QED.

### 3.4.5 Calcul de l'équation discrète déterministe vérifiée par l'autocovariance de l'état

$$\Pi_{i+1} = A_{di} \Pi_i A_{di}^T + V_{di}; i = 0, 1, \dots, \text{ avec la condition initiale } \Pi_0 \text{ connue.}$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1} &\triangleq R_{x_{i+1} x_{i+1}} = R_{(A_{di} x_i + v_{di}) (A_{di} x_i + v_{di})} \\ &= A_{di} R_{x_i x_i} A_{di}^T + R_{v_{di} v_{di}} + A_{di} R_{x_i v_{di}} + R_{x_i v_{di}}^T A_{di}^T = A_{di} \Pi_i A_{di}^T + V_{di}; i = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

QED.

## 3.5 Observation discrète du processus

### 3.5.1 Équation discrète stochastique d'observation bruitée

On suppose que l'observation bruitée disponible  $z_i$  est telle que :

$$\boxed{z_i = C_i x_i + w_{di}; i = 0, 1, \dots}. [13]^7$$

avec  $C_i$ , supposée connue, matrice *déterministe*, de dimension  $p \times n$ .

**Remarque :**  $y_i = C_i x_i; i = 0, 1, \dots$  est l'observation non bruitée non disponible.

---

7. éqs. 5-4 et 5-20

### 3.5.2 Vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

#### 3.5.2.1 Le vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$ est gaussien

##### Démonstration

$z_i = C_i x_i + w_{di}$  est gaussien par combinaison linéaire de vecteurs gaussiens [13] QED (et bien sur  $y_i$  est gaussien).

#### 3.5.2.2 Le vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$ est centré

$m_{z_i} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$  et  $z_i$  est bien centré (et bien sur  $y_i$  est centré :  $m_{y_i} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$ ).

##### Démonstration

$$m_{z_i} = m_{C_i x_i + w_{di}} = C_i m_{x_i} + m_{w_{di}} = 0 \text{ QED.}$$

### 3.5.3 Vecteurs $Z_{i-1}$ ; $i = 1, 2, \dots$ et $Z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

#### 3.5.3.1 Les vecteurs $Z_{i-1}$ ; $i = 1, 2, \dots$ et $Z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$ sont gaussiens

##### Démonstrations

$Z_{i-1} = [z_0^T \dots z_{i-1}^T]^T$  et  $z_0, \dots, z_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  sont gaussiens QED.

$Z_i = [z_0^T \dots z_i^T]^T$  et  $z_0, \dots, z_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  sont gaussiens QED.

#### 3.5.3.2 Les vecteurs $Z_{i-1}$ ; $i = 1, 2, \dots$ et $Z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$ sont centrés

$m_{Z_{i-1}} = [0^T \dots 0^T]^T$ ;  $i = 1, 2, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $i p$  et  $Z_{i-1}$  est bien centré.

$m_{Z_i} = [0^T \dots 0^T]^T$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $(i + 1) p$  et  $Z_i$  est bien centré.

##### Démonstrations

$m_{Z_{i-1}} = [m_{z_0}^T \dots m_{z_{i-1}}^T]^T = [0 \dots 0]^T$ ;  $i = 1, 2, \dots$  QED.

$m_{Z_i} = [m_{z_0}^T \dots m_{z_i}^T]^T = [0 \dots 0]^T$ ;  $i = 0, 1, \dots$  QED.

### 3.5.4 Calculs de $m_{x_i|Z_{i-1}}$ ; $i = 1, 2, \dots$ et $m_{x_i|Z_i}$ ; $i = 0, 1, \dots$

On verra plus tard que ces deux vecteurs sont les *estimateurs* de  $x_i$ .

$$m_{x_i|Z_{i-1}} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}; i = 1, 2, \dots$$

$$m_{x_i|Z_i} = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i; i = 0, 1, \dots$$

### Démonstrations

$x_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{x_i|Z_{i-1}} = m_{x_i} + R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} (Z_{i-1} - m_{Z_{i-1}})$$

$$= R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}; i = 1, 2, \dots \text{ QED.}$$

$x_i$  et  $Z_i$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{x_i|Z_i} = m_{x_i} + R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} (Z_i - m_{Z_i}) = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

### 3.5.5 Calcul de $m_{z_i|Z_{i-1}}; i = 1, 2, \dots$

On verra plus tard que ce vecteur est l'estimateur de  $z_i$ .

$$m_{z_i|Z_{i-1}} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}; i = 1, 2, \dots$$

#### Démonstration

$z_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{z_i|Z_{i-1}} = m_{z_i} + R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} (Z_{i-1} - m_{Z_{i-1}})$$

$$= R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}; i = 1, 2, \dots \text{ QED.}$$

### 3.5.6 Calcul de $R_{z_i v_{dj}} \triangleq \text{cov}\{z_i, v_{dj}\}$ pour $0 \leq i \leq j$

$$R_{z_i v_{dj}} = 0; i = 0, 1, \dots; j = i, i+1, \dots$$

#### Démonstration

$$R_{z_i v_{dj}} = R_{(C_i x_i + w_{di}) v_{dj}} = C_i R_{x_i v_{dj}} + R_{w_{di} v_{dj}} = 0;$$

$$i = 0, 1, \dots; j = i, i+1, \dots \text{ QED.}$$

#### 3.5.6.1 Corollaires

$$R_{v_{di} Z_{i-1}} \triangleq \text{cov}\{v_{di}, Z_{i-1}\} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$R_{v_{di} Z_i} \triangleq \text{cov}\{v_{di}, Z_i\} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$m_{v_{di}|Z_{i-1}} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$m_{v_{di}|Z_i} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$\text{cov}\{v_{di}, v_{di}|Z_{i-1}\} = V_{di}; i = 1, 2, \dots$$

$$\text{cov}\{v_{di}, v_{di}|Z_i\} = V_{di}; i = 0, 1, \dots$$

$$\text{cov}\{x_i, v_{di}|Z_{i-1}\} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$\text{cov}\{x_i, v_{di}|Z_i\} = 0; i = 0, 1, \dots$$

## Démonstrations

$R_{v_{di}z_0} = R_{z_0v_{di}}^T = 0, \dots, R_{v_{di}z_{i-1}} = R_{z_{i-1}v_{di}}^T = 0, R_{v_{di}z_i} = R_{z_iv_{di}}^T = 0$ . Donc  $v_{di}$  n'est pas corrélé avec  $z_0, \dots, z_{i-1}$  (i.e. n'est pas corrélé avec  $Z_{i-1}$ ) et n'est pas corrélé avec  $z_0, \dots, z_i$  (i.e. n'est pas corrélé avec  $Z_i$ ). Donc  $R_{v_{di}Z_{i-1}} = 0; i = 1, 2, \dots$  QED et  $R_{v_{di}Z_i} = 0; i = 0, 1, \dots$  QED.

$v_{di}, Z_{i-1}$  et  $Z_i$  étant gaussiens :

•  $m_{v_{di}|Z_{i-1}} = m_{v_{di}} + R_{v_{di}Z_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} (Z_{i-1} - m_{Z_{i-1}}) = 0; i = 1, 2, \dots$  QED.

•  $m_{v_{di}|Z_i} = m_{v_{di}} + R_{v_{di}Z_i} R_{Z_iZ_i}^{-1} (Z_i - m_{Z_i}) = 0; i = 0, 1, \dots$  QED.

•  $cov\{v_{di}, v_{di}|Z_{i-1}\} = R_{v_{di}v_{di}} - R_{v_{di}Z_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} R_{v_{di}Z_{i-1}}^T = V_{di}; i = 1, 2, \dots$  QED.

•  $cov\{v_{di}, v_{di}|Z_i\} = R_{v_{di}v_{di}} - R_{v_{di}Z_i} R_{Z_iZ_i}^{-1} R_{v_{di}Z_i}^T = V_{di}; i = 0, 1, \dots$  QED.

$x_i, v_{di}$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens :

•  $cov\{x_i, v_{di}|Z_{i-1}\} = R_{x_iv_{di}} - R_{x_iZ_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} R_{v_{di}Z_{i-1}}^T = 0; i = 1, 2, \dots$  QED.

$x_i, v_{di}$  et  $Z_i$  étant gaussiens :

•  $cov\{x_i, v_{di}|Z_i\} = R_{x_iv_{di}} - R_{x_iZ_i} R_{Z_iZ_i}^{-1} R_{v_{di}Z_i}^T = 0; i = 0, 1, \dots$  QED.

### 3.5.7 Calcul de $R_{z_iw_{dj}} \triangleq cov\{z_i, w_{dj}\}; i = 0, 1, \dots$ ; $j = 0, 1, \dots$

$$R_{z_iw_{dj}} = W_{di} \delta_{ij}; i = 0, 1, \dots; j = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

$$R_{z_iw_{dj}} = R_{(C_i x_i + w_{di})w_{dj}} = C_i R_{x_iw_{dj}} + R_{w_{di}w_{dj}} = W_{di} \delta_{ij} \text{ QED.}$$

#### 3.5.7.1 Corollaires

$$R_{w_{di}Z_{i-1}} \triangleq cov\{w_{di}, Z_{i-1}\} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$m_{w_{di}|Z_{i-1}} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$cov\{w_{di}, w_{di}|Z_{i-1}\} = W_{di}; i = 1, 2, \dots,$$

$$cov\{x_i, w_{di}|Z_{i-1}\} = 0; i = 1, 2, \dots$$

$$W_{edi} = C_i P_i^- C_i^T + W_{di}; i = 0, 1, \dots [13]^8 \text{ et } [5]^9.$$

---

8. éq. 5-25

9. éq. 9-2-18

### Démonstrations

$R_{w_{di}z_0} = R_{z_0w_{di}}^T = 0, \dots, R_{w_{di}z_{i-1}} = R_{z_{i-1}w_{di}}^T = 0$ . Donc  $w_{di}$  n'est pas corrélé avec  $z_0, \dots, z_{i-1}$  (i.e. n'est pas corrélé avec  $Z_{i-1}$ ). Donc  $R_{w_{di}Z_{i-1}} = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots$  QED.

$w_{di}$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens :

•  $m_{w_{di}|Z_{i-1}} = m_{w_{di}} + R_{w_{di}Z_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} (Z_{i-1} - m_{Z_{i-1}}) = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots$  QED.

•  $cov\{w_{di}, w_{di}|Z_{i-1}\} = R_{w_{di}w_{di}} - R_{w_{di}Z_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^T = W_{di}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  QED.

$x_i, w_{di}$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens :

•  $cov\{x_i, w_{di}|Z_{i-1}\} = R_{x_iw_{di}} - R_{x_iZ_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^T = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots$  QED.

• Si  $i = 0$  :  $W_{ed0} = R_{z_0z_0} = R_{(C_0x_0+w_{d0})(C_0x_0+w_{d0})} = C_0 R_{x_0x_0} C_0^T + R_{w_{d0}w_{d0}} + C_0 R_{x_0w_{d0}} + R_{x_0w_{d0}}^T C_0^T = C_0 P_0^- C_0^T + W_{d0}$  QED.

• Si  $i = 1, 2, \dots$  :  $W_{edi} \triangleq cov\{z_i, z_i|Z_{i-1}\} = cov\{(C_i x_i + w_{di}), (C_i x_i + w_{di})|Z_{i-1}\} = C_i cov\{x_i, x_i|Z_{i-1}\} C_i^T + cov\{w_{di}, w_{di}|Z_{i-1}\} + C_i cov\{x_i, w_{di}|Z_{i-1}\} + cov^T\{x_i, w_{di}|Z_{i-1}\} C_i^T = C_i P_i^- C_i^T + W_{di}$  QED.

### 3.5.8 Vecteurs $x_i^-$ et $x_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$

#### 3.5.8.1 Les vecteurs $x_i^-$ et $x_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$ sont gaussiens

##### Démonstrations

$x_0^- = x_0$  est gaussien QED

$x_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens :

$x_i^- = (x_i|Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1})$ ;  $i = 1, 2, \dots$  est gaussien QED

$x_i$  et  $Z_i$  étant gaussiens :

$x_i^+ = (x_i|Z_i = \mathfrak{Z}_i)$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est gaussien QED.

#### 3.5.8.2 Moyennes des vecteurs $x_i^-$ et $x_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$

On verra plus tard que ces deux moyennes sont les *estimées* de  $x_i$ .

$m_{x_0^-} = 0$

$m_{x_i^-} = R_{x_iZ_{i-1}} R_{Z_{i-1}Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .

$m_{x_i^+} = R_{x_iZ_i} R_{Z_iZ_i}^{-1} \mathfrak{Z}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .



### Démonstrations

$$m_{x_0^-} = m_{x_0} = 0 \text{ QED}$$

$x_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{x_i^-} = m_{x_i} + R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} (\mathfrak{Z}_{i-1} - m_{Z_{i-1}}) = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1};$$
$$i = 1, 2, \dots \text{ QED}$$

$x_i$  et  $Z_i$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{x_i^+} = m_{x_i} + R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} (\mathfrak{Z}_i - m_{Z_i}) = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} \mathfrak{Z}_i; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

### 3.5.9 Vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

#### 3.5.9.1 Le vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$ est gaussien

##### Démonstrations

$z_0 = z_0$  est gaussien QED

$z_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens :

$z_i = (z_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1})$  ;  $i = 1, 2, \dots$  est gaussien QED.

#### 3.5.9.2 Moyenne du vecteur $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

On verra plus tard que cette moyenne est l'*estimée* de  $z_i$ .

$$m_{z_0} = 0$$

$m_{z_i} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1}$  ;  $i = 1, 2, \dots$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ .

##### Démonstrations

$$m_{z_0} = m_{z_0} = 0 \text{ QED}$$

$z_i$  et  $Z_{i-1}$  étant gaussiens et centrés :

$$m_{z_i} = m_{z_i} + R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} (\mathfrak{Z}_{i-1} - m_{Z_{i-1}}) = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1};$$
$$i = 1, 2, \dots \text{ QED}$$

#### 3.5.9.3 Autocovariance du vecteur $z_i$ ; $i = 1, 2, \dots$

$$W_{edi} = R_{z_i z_i} - R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{z_i Z_{i-1}}^T.$$

##### Démonstration

$$W_{edi} \triangleq R_{z_i z_i} = \text{cov}\{z_i, z_i | Z_{i-1}\}.$$

Et d'après la formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien :

$$W_{edi} = R_{z_i z_i} - R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{Z_i Z_{i-1}}^T \text{ QED.}$$

### 3.5.10 Calcul de $R_{x_i^- z_i}$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$R_{x_i^- z_i} = P_i^- C_i^T ; i = 0, 1, \dots$$

**Démonstration**

Si  $i = 0$  :

$$R_{x_0^- z_0} = R_{x_0 z_0} = R_{x_0(C_0 x_0 + w_{d0})} = R_{x_0 x_0} C_0^T + R_{x_0 w_{d0}} = P_0^- C_0^T \text{ QED.}$$

Si  $i = 1, 2, \dots$  :

$$\begin{aligned} R_{x_i^- z_i} &= \text{cov}\{x_i, z_i | Z_{i-1}\} = \text{cov}\{x_i, C_i x_i + w_{di} | Z_{i-1}\} \\ &= \text{cov}\{x_i, x_i | Z_{i-1}\} C_i^T + \text{cov}\{x_i, w_{di} | Z_{i-1}\} = P_i^- C_i^T \text{ QED.} \end{aligned}$$

### 3.5.11 Calcul de $x_i^+$ en fonction de $x_i^-$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$x_i^+ = (x_i^- | z_i = \zeta_i) ; i = 0, 1, \dots$$

**Démonstration**

Si  $i = 0$  :

$$x_0^+ \triangleq (x_0 | Z_0 = \mathfrak{Z}_0) = (x_0 | z_0 = \zeta_0) = (x_0^- | z_0 = \zeta_0) \text{ QED.}$$

On a vu que :

$$(x | \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}) = [(x | y = \eta) | (z | y = \eta) = \zeta].$$

Si  $i = 1, 2, \dots$  posons  $x \triangleq x_i$ ,  $y \triangleq Z_{i-1}$ ,  $\zeta \triangleq \zeta_i$  ; alors  $\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = Z_i$  et  $\eta \triangleq \mathfrak{Z}_{i-1}$ ,  $z \triangleq z_i$  ; alors  $\begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_i$ . Il s'en suit que :

$$(x_i | Z_i = \mathfrak{Z}_i) = [(x_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}) | (z_i | Z_{i-1} = \mathfrak{Z}_{i-1}) = \zeta_i].$$

Soit  $x_i^+ = (x_i^- | z_i = \zeta_i) ; i = 0, 1, \dots$  QED.

### 3.5.12 Gain de Kalman $K_{di}$ ; $i = 0, 1, \dots$

Posons :

$K_{di} \triangleq R_{x_i^- z_i} R_{z_i z_i}^{-1} = P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} ; i = 0, 1, \dots$  : matrice *déterministe*, de dimension  $n \times p$ , appelée *gain de Kalman* [13]<sup>10</sup>.

10. éq. 5-38

### 3.5.13 Calcul de $P_i^+$ en fonction de $P_i^-$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$\boxed{P_i^+ = (I - K_{di} C_i) P_i^- = P_i^- - K_{di} W_{edi} K_{di}^T; i = 0, 1, \dots} \text{ [15]}^{11} \text{ et [13]}^{12}.$$

#### Démonstration

Étant donné que  $x_i^+ = (x_i^- | z_i = \zeta_i) : P_i^+ = R_{x_i^+ x_i^+} = \text{cov}\{x_i^-, x_i^- | z_i = \zeta_i\}$

Étant donné que  $x_i^-$  et  $z_i$  sont gaussiens :

$$\begin{aligned} P_i^+ &= \text{cov}\{x_i^-, x_i^- | z_i\} = R_{x_i^- x_i^-} - R_{x_i^- z_i} R_{z_i z_i}^{-1} R_{x_i^- z_i}^T \\ &= P_i^- - (P_i^- C_i^T) W_{edi}^{-1} (C_i P_i^-) = (I - K_{di} C_i) P_i^- \\ &= P_i^- - (P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1}) W_{edi} (W_{edi}^{-1} C_i P_i^-) = P_i^- - K_{di} W_{edi} K_{di}^T; i = 0, 1, \dots \\ &\text{QED.} \end{aligned}$$

**Remarque 1** : on a aussi  $P_i^+ = [(P_i^-)^{-1} + C_i^T W_{di}^{-1} C_i]^{-1}$ ;  $i = 0, 1, \dots$  [13]<sup>13</sup>

#### Démonstration

Le lemme d'inversion matricielle (cf. Annexe A), valable pour  $P_i^-$  et  $W_{di}$  définies positives ( $P_i^- > 0$  et  $W_{di} > 0$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} [(P_i^-)^{-1} + C_i^T W_{di}^{-1} C_i]^{-1} &= P_i^- - P_i^- C_i^T [C_i P_i^- C_i^T + W_{di}]^{-1} C_i P_i^- \\ &= P_i^- - P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} C_i P_i^- = P_i^+; i = 0, 1, \dots \text{ QED.} \end{aligned}$$

**Remarque 2** : on a aussi  $P_i^+ (P_i^-)^{-1} = I - K_{di} C_i; i = 0, 1, \dots$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} P_i^+ (P_i^-)^{-1} &= (P_i^- - P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} C_i P_i^-) (P_i^-)^{-1} = I - P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} C_i \\ &= I - K_{di} C_i; i = 0, 1, \dots \text{ QED.} \end{aligned}$$

**Remarque 3** : on a aussi  $K_{di} = P_i^+ C_i^T W_{di}^{-1}; i = 0, 1, \dots$

#### Démonstration

Le lemme d'inversion matricielle (cf. Annexe A), valable pour  $P_i^-$  et  $W_{di}$  définies positives ( $P_i^- > 0$  et  $W_{di} > 0$ ) s'écrit

$$\begin{aligned} W_{edi}^{-1} &= (C_i P_i^- C_i^T + W_{di})^{-1} \\ &= W_{di}^{-1} - W_{di}^{-1} C_i [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}]^{-1} C_i^T W_{di}^{-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

---

11. éq 17-12  
12. éq. 5-35  
13. éq. 5-32

$$\begin{aligned}
K_{di} &= P_i^- C_i^T W_{di}^{-1} - P_i^- C_i^T W_{di}^{-1} C_i [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}]^{-1} C_i^T W_{di}^{-1} \\
&= P_i^- \{I - (C_i^T W_{di}^{-1} C_i) [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}]^{-1}\} C_i^T W_{di}^{-1} \\
&= P_i^- \{I - [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}] [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}]^{-1} \\
&\quad + (P_i^-)^{-1} [C_i^T W_{di}^{-1} C_i + (P_i^-)^{-1}]^{-1}\} C_i^T W_{di}^{-1} \\
&= [(P_i^-)^{-1} + C_i^T W_{di}^{-1} C_i]^{-1} C_i^T W_{di}^{-1} = P_i^+ C_i^T W_{di}^{-1}; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}
\end{aligned}$$

## 3.6 Estimations optimales, au sens des moindres carrés

Étant donné que nous ne considérons que des estimations optimales, au sens des moindres carrés et afin d'alléger l'écriture, nous notons  $\hat{x}_i^-$ ,  $\hat{x}_i^+$  et  $\hat{z}_i$  les estimateurs optimaux de  $x_i$  et  $z_i$ , définis ci-après et  $\tilde{x}_i^-$ ,  $\tilde{x}_i^+$  et  $e_i$  leurs erreurs respectives, sans utiliser d'indice 0 contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent.

De même nous notons  $\hat{\xi}_i^-$ ,  $\hat{\xi}_i^+$  et  $\hat{\zeta}_i$  les estimées optimales, au sens des moindres carrés et afin d'alléger l'écriture, de  $x_i$  et  $z_i$ , définies ci-après, sans utiliser d'indice 0 contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent. Nous allons donc considérer :

Les estimateurs optimaux  $\hat{x}_i^-$  et  $\hat{x}_i^+$  du vecteur aléatoire gaussien et centré  $x_i$  connaissant les vecteurs aléatoires gaussiens et centrés  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$ , respectivement et l'estimateur optimal  $\hat{z}_i$  du vecteur aléatoire gaussien et centré  $z_i$  connaissant le vecteur aléatoire gaussien et centré  $Z_{i-1}$ .

Les estimées optimales  $\hat{\xi}_i^-$  et  $\hat{\xi}_i^+$  du vecteur aléatoire gaussien et centré  $x_i$  connaissant les réalisations  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  et  $\mathfrak{Z}_i$  des vecteurs aléatoires gaussiens et centrés  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$ , respectivement et l'estimée optimale, au sens des moindres carrés,  $\hat{\zeta}_i$  du vecteur aléatoire gaussien et centré  $z_i$  connaissant la réalisation  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  du vecteur aléatoire gaussien et centré  $Z_{i-1}$ .

### 3.6.1 Estimateurs et erreurs des estimateurs

#### 3.6.1.1 Estimateurs $\hat{x}_i^-$ et $\hat{x}_i^+$ de $x_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

$\hat{x}_0^- \triangleq m_{x_0} = 0$  vecteur déterministe, de dimension  $n$  et  
 $\hat{x}_i^- \triangleq m_{x_i|Z_{i-1}} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  : vecteur aléatoire, de dimension  $n$  [13]<sup>14</sup> et [5]<sup>15</sup>.

14. p. 228 mais qui ne le définit jamais

15. p. 114

$\widehat{x}_i^+ \triangleq m_{x_i|Z_i} = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$  [13]<sup>16</sup>.

**Les vecteurs  $\widehat{x}_i^-$  et  $\widehat{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  sont gaussiens**

**Démonstrations**

$\widehat{x}_0^- = 0$  est gaussien QED.

$Z_{i-1}$  étant gaussien :

$\widehat{x}_i^- = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  est gaussien QED

$Z_i$  étant gaussien :

$\widehat{x}_i^+ = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est gaussien QED.

**Les vecteurs  $\widehat{x}_i^-$  et  $\widehat{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  sont centrés**

$m_{\widehat{x}_i^-} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$

$m_{\widehat{x}_i^+} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$

**Démonstrations**

$\widehat{x}_0^- = 0$  donc  $m_{\widehat{x}_0^-} = 0$  QED

$m_{\widehat{x}_i^-} = m_{R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} m_{Z_{i-1}} = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots$

QED

$m_{\widehat{x}_i^+} = m_{R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i} = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} m_{Z_i} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$  QED.

**Autocovariances des estimateurs  $\widehat{x}_i^-$  et  $\widehat{x}_i^+$  de  $x_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$**

Soient :  $\Sigma_i^- \triangleq R_{\widehat{x}_i^- \widehat{x}_i^-}$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $\Sigma_i^{-T} = \Sigma_i^-$ ) [5]<sup>17</sup>.

$\Sigma_i^+ \triangleq R_{\widehat{x}_i^+ \widehat{x}_i^+}$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique ( $\Sigma_i^{+T} = \Sigma_i^+$ ).

Alors :

$$\Sigma_0^- = 0$$

$$\Sigma_i^- = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{x_i Z_{i-1}}^T; i = 1, 2, \dots$$

$$\Sigma_i^+ = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{x_i Z_i}^T; i = 0, 1, \dots$$

$$P_i^- = \Pi_i - \Sigma_i^-; i = 0, 1, \dots [5]^{18},$$

$$P_i^+ = \Pi_i - \Sigma_i^+; i = 0, 1, \dots$$

---

16. p. 226

17. éq. 9-2-26

18. éq. 9-2-29

### Démonstrations

$$\Sigma_0^- = 0 \text{ car } \widehat{x}_0^- = 0 \text{ QED}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_i^- &= R_{\widehat{x}_i^- \widehat{x}_i^-} = R_{R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1} R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}} \\ &= R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{x_i Z_{i-1}}^T = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{x_i Z_{i-1}}^T ; \\ i &= 1, 2, \dots \text{ QED} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_i^+ &= R_{\widehat{x}_i^+ \widehat{x}_i^+} = R_{R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i} \\ &= R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{Z_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{x_i Z_i}^T = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{x_i Z_i}^T ; i = 0, 1, \dots \text{ QED} \end{aligned}$$

$$P_0^- = \Pi_0 - \Sigma_0^- \text{ car } \Sigma_0^- = 0 \text{ QED.}$$

Et, d'après la formule de l'autocovariance conditionnelle dans le cas gaussien :

$$\text{cov}\{x_i, x_i | Z_{i-1}\} = R_{x_i x_i} - R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{x_i Z_{i-1}}^T \text{ soit } P_i^- = \Pi_i - \Sigma_i^- ; \\ i = 1, 2, \dots \text{ QED}$$

$$\text{cov}\{x_i, x_i | Z_i\} = R_{x_i x_i} - R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{x_i Z_i}^T \text{ soit } P_i^+ = \Pi_i - \Sigma_i^+ ; i = 0, 1, \dots \\ \text{QED}$$

### Remarque

Du calcul de  $P_i^+$  en fonction de  $P_i^-$  on déduit que :

$$\Sigma_i^+ = \Sigma_i^- + P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} C_i P_i^- ; i = 0, 1, \dots$$

**Calculs de  $R_{x_i \widehat{x}_i^-}$  et de  $R_{x_i \widehat{x}_i^+}$  ;  $i = 0, 1, \dots$**

$$R_{x_i \widehat{x}_i^-} = \Sigma_i^- ; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{x_i \widehat{x}_i^+} = \Sigma_i^+ ; i = 0, 1, \dots$$

### Démonstrations

$$R_{x_0 \widehat{x}_0^-} = \Sigma_0^- = 0 \text{ (car } \widehat{x}_0^- = 0) \text{ QED}$$

$$R_{x_i \widehat{x}_i^-} = R_{x_i (R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1})} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{x_i Z_{i-1}}^T = \Sigma_i^- ; \\ i = 1, 2, \dots \text{ QED.}$$

$$R_{x_i \widehat{x}_i^+} = R_{x_i (R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} Z_i)} = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} R_{x_i Z_i}^T = \Sigma_i^+ ; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

**Calculs de  $R_{\widehat{x}_i^- v_{di}}$  et de  $R_{\widehat{x}_i^- w_{di}}$  ;  $i = 0, 1, \dots$**

$$R_{\widehat{x}_i^- v_{di}} = 0 ; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{\widehat{x}_i^- w_{di}} = 0 ; i = 0, 1, \dots$$

### Démonstrations

$$R_{\widehat{x}_0^- v_{di}} = 0 \text{ (car } \widehat{x}_0^- = 0) \text{ QED}$$

$$R_{\widehat{x}_i^- v_{di}} = R_{(R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}) v_{di}} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{v_{di} Z_{i-1}}^T = 0;$$

$i = 1, 2, \dots$  QED.

$$R_{\widehat{x}_i^- w_{di}} = R_{(R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}) w_{di}} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{w_{di} Z_{i-1}}^T = 0;$$

$i = 0, 1, \dots$  QED.

### 3.6.1.2 Erreurs $\widetilde{x}_i^-$ et $\widetilde{x}_i^+$ des estimateurs de $x_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

$\widetilde{x}_i^- \triangleq x_i - \widehat{x}_i^-$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$  ( $\widetilde{x}_0^- = x_0$ ).  
 $\widetilde{x}_i^+ \triangleq x_i - \widehat{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ .

**Les vecteurs  $\widetilde{x}_i^-$  et  $\widetilde{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  sont gaussiens**

#### Démonstrations

$x_i$  et  $\widehat{x}_i^-$  étant gaussiens :  $\widetilde{x}_i^- = x_i - \widehat{x}_i^-$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est gaussien QED

$x_i$  et  $\widehat{x}_i^+$  étant gaussiens :  $\widetilde{x}_i^+ = x_i - \widehat{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est gaussien QED.

**Les vecteurs  $\widetilde{x}_i^-$  et  $\widetilde{x}_i^+$ ;  $i = 0, 1, \dots$  sont centrés**

$$m_{\widetilde{x}_i^-} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$m_{\widetilde{x}_i^+} = 0; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstrations

$$m_{\widetilde{x}_i^-} = m_{x_i} - m_{\widehat{x}_i^-} = 0 \text{ et } m_{\widetilde{x}_i^+} = m_{x_i} - m_{\widehat{x}_i^+} = 0; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

**Autocovariances des erreurs  $\widetilde{x}_i^-$  et  $\widetilde{x}_i^+$  des estimateurs de  $x_i$ ;**  
 $i = 0, 1, \dots$

$$R_{\widetilde{x}_i^- \widetilde{x}_i^-} = P_i^-; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{\widetilde{x}_i^+ \widetilde{x}_i^+} = P_i^+; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstrations

$$\begin{aligned} R_{\widetilde{x}_i^- \widetilde{x}_i^-} &= R_{(x_i - \widehat{x}_i^-)(x_i - \widehat{x}_i^-)} = R_{x_i x_i} + R_{\widehat{x}_i^- \widehat{x}_i^-} - R_{x_i \widehat{x}_i^-} - R_{\widehat{x}_i^- x_i}^T \\ &= \Pi_i + \Sigma_i^- - \Sigma_i^- - \Sigma_i^- = \Pi_i - \Sigma_i^- = P_i^-; i = 0, 1, \dots \text{ QED.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\widetilde{x}_i^+ \widetilde{x}_i^+} &= R_{(x_i - \widehat{x}_i^+)(x_i - \widehat{x}_i^+)} = R_{x_i x_i} + R_{\widehat{x}_i^+ \widehat{x}_i^+} - R_{x_i \widehat{x}_i^+} - R_{\widehat{x}_i^+ x_i}^T \\ &= \Pi_i + \Sigma_i^+ - \Sigma_i^+ - \Sigma_i^+ = \Pi_i - \Sigma_i^+ = P_i^+; i = 0, 1, \dots \text{ QED.} \end{aligned}$$

**Calculs de  $R_{\widetilde{x}_i^- v_{di}}$  et de  $R_{\widetilde{x}_i^- w_{di}}$ ;  $i = 0, 1, \dots$**

$$R_{\widetilde{x}_i^- v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{\widetilde{x}_i^- w_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

### Démonstrations

$$R_{\widehat{x}_i^- v_{di}} = R_{x_i v_{di}} - R_{\widehat{x}_i^- v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots \text{ QED}$$

$$R_{\widehat{x}_i^- w_{di}} = R_{x_i w_{di}} - R_{\widehat{x}_i^- w_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

#### 3.6.1.3 Estimateur $\widehat{z}_i$ de $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

$\widehat{z}_0 \triangleq m_{z_0} = 0$  vecteur *déterministe*, de dimension  $p$  et

$\widehat{z}_i \triangleq m_{z_i | Z_{i-1}} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ .

**Le vecteur  $\widehat{z}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est gaussien**

#### Démonstration

$\widehat{z}_0 = 0$  est gaussien QED.

$Z_{i-1}$  étant gaussien :

$\widehat{z}_i = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}$ ;  $i = 1, 2, \dots$  est gaussien QED

**Le vecteur  $\widehat{z}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  est centré**

$m_{\widehat{z}_i} = 0$ ;  $i = 0, 1, \dots$

#### Démonstration

$\widehat{z}_0 = 0$  donc  $m_{\widehat{z}_0} = 0$  QED

$m_{\widehat{z}_i} = m_{R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} m_{Z_{i-1}} = 0$ ;  $i = 1, 2, \dots$

QED

**Autocovariance de l'estimateur  $\widehat{z}_i$  de  $x_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$**

$$R_{\widehat{z}_0 \widehat{z}_0} = 0$$

$$R_{\widehat{z}_i \widehat{z}_i} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{z_i Z_{i-1}}^T; i = 1, 2, \dots$$

#### Démonstrations

$R_{\widehat{z}_0 \widehat{z}_0} = 0$  car  $\widehat{z}_0 = 0$  QED

$$\begin{aligned} R_{\widehat{z}_i \widehat{z}_i} &= R_{R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1} R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} Z_{i-1}} \\ &= R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{z_i Z_{i-1}}^T = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} R_{z_i Z_{i-1}}^T; i = \\ &1, 2, \dots \text{ QED} \end{aligned}$$

**Calcul de  $R_{\widehat{z}_i v_{di}}$ ;  $i = 0, 1, \dots$**

$$R_{\widehat{z}_i v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

$R_{\widehat{z}_0 v_{di}} = 0$  (car  $\widehat{z}_0 = 0$ ) QED



$$R_{\widehat{z}_i v_{di}} = R_{(R_{z_i z_{i-1}} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} z_{i-1}) v_{di}} = R_{z_i z_{i-1}} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} R_{v_{di} z_{i-1}}^T = 0;$$

$i = 0, 1, \dots$  QED.

#### 3.6.1.4 Erreur $e_i$ de l'estimateur de $z_i$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$e_i \triangleq z_i - \widehat{z}_i; i = 0, 1, \dots : \text{vecteur aléatoire, de dimension } n \text{ (} e_0 = z_0 \text{)}.$$

Cette erreur est appelée *innovation* et par certains auteurs *résiduel* (cf. la section : Introduction de l'innovation).

**Le vecteur  $e_i$  est gaussien;  $i = 0, 1, \dots$**

**Démonstration**

$z_i$  et  $\widehat{z}_i$  étant gaussiens :  $e_i = z_i - \widehat{z}_i; i = 0, 1, \dots$  est gaussien QED

**Le vecteur  $e_i; i = 0, 1, \dots$  est centré :  $m_{e_i} = 0; i = 0, 1, \dots$**

**Démonstration**

$$m_{e_i} = m_{z_i} - m_{\widehat{z}_i} = 0; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

**Calcul de  $R_{e_i v_{di}}; i = 0, 1, \dots$**

$$R_{e_i v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

**Démonstration**

$$R_{e_i v_{di}} = R_{z_i v_{di}} - R_{\widehat{z}_i v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

#### 3.6.1.5 Calcul de $\widehat{z}_i$ en fonction de $\widehat{x}_i^-; i = 0, 1, \dots$

$$\widehat{z}_i = C_i \widehat{x}_i^-; i = 0, 1, \dots$$

**Démonstration**

$$\widehat{z}_i = m_{z_i | Z_{i-1}} = m_{C_i x_i + w_{di} | Z_{i-1}} = C_i m_{x_i | Z_{i-1}} + m_{w_{di} | Z_{i-1}} = C_i \widehat{x}_i^-;$$

$i = 0, 1, \dots$  QED.

#### 3.6.1.6 Calcul de $e_i$ en fonction de $\widetilde{x}_i^-; i = 0, 1, \dots$

$$e_i = C_i \widetilde{x}_i^- + w_{di}; i = 0, 1, \dots$$

**Démonstration**

$$e_i = z_i - \widehat{z}_i = C_i x_i + w_{di} - C_i \widehat{x}_i^- = C_i \widetilde{x}_i^- + w_{di}; i = 0, 1, \dots \text{ QED.}$$

### 3.6.1.7 Autocovariance de l'erreur $e_i$ de l'estimateur de $z_i$

$$R_{e_i e_i} = W_{edi}; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

Étant donné que  $e_i = C_i \tilde{x}_i^- + w_{di}$  on a  $R_{e_i e_i} = R_{(C_i \tilde{x}_i^- + w_{di})(C_i \tilde{x}_i^- + w_{di})}$   
 $= C_i R_{\tilde{x}_i^- \tilde{x}_i^-} C_i^T + R_{w_{di} w_{di}} + C_i R_{\tilde{x}_i^- w_{di}} + R_{\tilde{x}_i^- w_{di}}^T C_i^T = C_i P_i^- C_i^T + W_{di} = W_{edi};$   
 $i = 0, 1, \dots$  QED.

### 3.6.1.8 Calcul de $R_{e_i \tilde{x}_i^-}; i = 0, 1, \dots$

$$R_{e_i \tilde{x}_i^-} = C_i P_i^-; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

$$R_{e_i \tilde{x}_i^-} = R_{(C_i \tilde{x}_i^- + w_{di}) \tilde{x}_i^-} = C_i R_{\tilde{x}_i^- \tilde{x}_i^-} + R_{\tilde{x}_i^- w_{di}}^T = C_i P_i^-; i = 0, 1, \dots$$
 QED.

### 3.6.1.9 Calcul de l'estimateur $\hat{x}_i^+$ en fonction de l'estimateur $\hat{x}_i^-; i = 0, 1, \dots$

$$\hat{x}_i^+ = \hat{x}_i^- + K_{di} e_i = (I - K_{di} C_i) \hat{x}_i^- + K_{di} z_i; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

$$\hat{x}_i^+ = R_{x_i z_i} R_{z_i z_i}^{-1} z_i. \text{ Mais :}$$

$$R_{x_i z_i} = \begin{bmatrix} R_{x_i z_{i-1}} & R_{x_i z_i} \end{bmatrix}, R_{z_i z_i} = \begin{bmatrix} R_{z_{i-1} z_{i-1}} & R_{z_i z_{i-1}}^T \\ R_{z_i z_{i-1}} & R_{z_i z_i} \end{bmatrix}, z_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ z_i \end{bmatrix}.$$

De plus le lemme d'inversion matricielle (cf. Annexe A) permet d'écrire :

$$R_{z_i z_i}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} + R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} R_{z_i z_{i-1}}^T R_{z_i z_{i-1}}^{-1} R_{z_i z_{i-1}} & -R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} R_{z_i z_{i-1}}^T R_{z_i z_i}^{-1} \\ -R_{z_i z_{i-1}} R_{z_i z_{i-1}}^{-1} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} & R_{z_i z_i}^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$(\text{rappel : } R_{z_i z_i} = R_{z_i z_i} - R_{z_i z_{i-1}} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} R_{z_i z_{i-1}}^T)$$

Alors le calcul de  $\hat{x}_i^+$  conduit à :

$$\hat{x}_i^+ = \hat{x}_i^- + (R_{x_i z_i} - R_{x_i z_{i-1}} R_{z_{i-1} z_{i-1}}^{-1} R_{z_i z_{i-1}}^T) R_{z_i z_i}^{-1} e_i$$

Soit  $\hat{x}_i^+ = \hat{x}_i^- + R_{x_i^- z_i} R_{z_i z_i}^{-1} (z_i - \hat{z}_i)$ . Et finalement :

$$\hat{x}_i^+ = \hat{x}_i^- + K_{di} e_i = (I - K_{di} C_i) \hat{x}_i^- + K_{di} z_i; i = 0, 1, \dots$$
 QED.

**3.6.1.10** Calcul de l'erreur  $\tilde{x}_i^+$  en fonction de l'erreur  $\tilde{x}_i^-$  ;  
 $i = 0, 1, \dots$

$$\tilde{x}_i^+ = (I - K_{di} C_i) \tilde{x}_i^- - K_{di} w_{di} ; i = 0, 1, \dots [15]^{19}.$$

**Démonstration**

$$\tilde{x}_i^+ = x_i - \hat{x}_i^+ = x_i - \hat{x}_i^- - K_{di} (C_i \tilde{x}_i^- + w_{di}) = (I - K_{di} C_i) \tilde{x}_i^- - K_{di} w_{di} ;$$

$i = 0, 1, \dots$  QED.

## 3.6.2 Estimées

**3.6.2.1** Estimées  $\hat{\xi}_i^-$  et  $\hat{\xi}_i^+$  de  $x_i$  ;  $i = 0, 1, \dots$

$$\hat{\xi}_0^- \triangleq m_{x_0^-} = 0 \text{ vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n \text{ et}$$

$$\hat{\xi}_i^- \triangleq m_{x_i^-} = R_{x_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1} ; i = 1, 2, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe},$$

de dimension  $n$  [13]<sup>20</sup>.

$$\hat{\xi}_i^+ \triangleq m_{x_i^+} = R_{x_i Z_i} R_{Z_i Z_i}^{-1} \mathfrak{Z}_i ; i = 0, 1, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de di-}$$

mension  $n$  [13]<sup>21</sup>.

**3.6.2.2** Erreurs  $\tilde{\xi}_i^-$  et  $\tilde{\xi}_i^+$  des estimées de  $x_i$  ;  $i = 0, 1, \dots$

$$\tilde{\xi}_i^- = \xi_i - \hat{\xi}_i^- ; i = 0, 1, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n$$

( $\tilde{\xi}_0^- = \xi_0$ ),

$$\tilde{\xi}_i^+ = \xi_i - \hat{\xi}_i^+ ; i = 0, 1, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n.$$

**3.6.2.3** Estimée  $\hat{\zeta}_i$  de  $z_i$  ;  $i = 0, 1, \dots$

$$\hat{\zeta}_0 \triangleq m_{z_0} = 0 \text{ vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n \text{ et}$$

$$\hat{\zeta}_i \triangleq m_{z_i} = R_{z_i Z_{i-1}} R_{Z_{i-1} Z_{i-1}}^{-1} \mathfrak{Z}_{i-1} ; i = 1, 2, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de}$$

dimension  $p$ .

**3.6.2.4** Erreur  $\varepsilon_i$  de l'estimée de  $z_i$  ;  $i = 0, 1, \dots$

$$\varepsilon_i = \zeta_i - \hat{\zeta}_i ; i = 0, 1, \dots : \text{vecteur } \textit{déterministe}, \text{ de dimension } n (\varepsilon_0 = \zeta_0),$$

---

19. éq. 17-10

20. éq. 5-14

21. éq. 5-9

### 3.6.2.5 Calcul de $\widehat{\zeta}_i$ en fonction de $\widehat{\xi}_i^-$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$\widehat{\zeta}_i = C_i \widehat{\xi}_i^-; i = 0, 1, \dots$$

#### Démonstration

Les estimées sont les valeurs des estimateurs pour la réalisation  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  de  $Z_{i-1}$  QED.

### 3.6.2.6 Calcul de $\widehat{\xi}_i^+$ en fonction de $\widehat{\xi}_i^-$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$\widehat{\xi}_i^+ = \widehat{\xi}_i^- + K_{di} \varepsilon_i [13]^{22}, \text{ ou } \widehat{\xi}_i^+ = (I - K_{di} C_i) \widehat{\xi}_i^- + K_{di} \zeta_i [13]^{23}$$

#### Démonstration

Les estimées sont les valeurs des estimateurs pour les réalisations  $\mathfrak{Z}_{i-1}$  et  $\mathfrak{Z}_i$  de  $Z_{i-1}$  et  $Z_i$  respectivement QED.

## 3.7 Transition de $t_i^+$ à $t_{i+1}^-$ ; $i = 0, 1, \dots$

### 3.7.1 Calcul de $P_{i+1}^-$ en fonction de $P_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$

$$\boxed{P_{i+1}^- = A_{di} P_i^+ A_{di}^T + V_{di}; i = 0, 1, \dots}$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} P_{i+1}^- &= \text{cov}\{x_{i+1}, x_{i+1} | Z_i\} = \text{cov}\{A_{di} x_i + v_{di}, A_{di} x_i + v_{di} | Z_i\} \\ &= A_{di} \text{cov}\{x_i, x_i | Z_i\} A_{di}^T + \text{cov}\{v_{di}, v_{di} | Z_i\} \\ &+ A_{di} \text{cov}\{x_i, v_{di} | Z_i\} + \text{cov}^T\{x_i, v_{di} | Z_i\} A_{di}^T = A_{di} P_i^+ A_{di}^T + V_{di} \text{ QED.} \end{aligned}$$

### 3.7.2 Calcul de $\widehat{x}_{i+1}^-$ en fonction de $\widehat{x}_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$ (transition pour les estimateurs)

$$\boxed{\widehat{x}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{x}_i^+; i = 0, 1, \dots}$$

#### Démonstration

$$\widehat{x}_{i+1}^- \triangleq m_{x_{i+1} | Z_i} = m_{A_{di} x_i + v_{di} | Z_i} = A_{di} m_{x_i | Z_i} + m_{v_{di} | Z_i} = A_{di} \widehat{x}_i^+ \text{ QED.}$$

---

22. éq 5-34

23. p. 215

### 3.7.3 Calcul de $\widehat{\xi}_{i+1}^-$ en fonction de $\widehat{\xi}_i^+$ ; $i = 0, 1, \dots$ (transition pour les estimées)

$$\boxed{\widehat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{\xi}_i^+ ; i = 0, 1, \dots}. [13]^{24}$$

#### Démonstration

Les estimées sont les valeurs des estimateurs pour la réalisation  $\mathfrak{Z}_i$  de  $Z_i$   
QED.

---

24. éq. 5-15

### 3.8 Équations du filtre de Kalman pour les estimées

#### Initialisation

$$\widehat{\xi}_0^- = 0 \text{ [13]}^{25}$$

$$P_0^- = \Pi_0 \text{ (rappel : } \Pi_0 \text{ supposé connu) [13]}^{26}$$

#### Première forme avec calcul de $W_{edi}$

Pour  $i = 0, 1, \dots$  :

$$W_{edi} = C_i P_i^- C_i^T + W_{di} \text{ (rappel : } W_{di} \text{ supposé connu)}$$

$$K_{di} = P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} \text{ [13]}^{27}$$

$$P_i^+ = (I - K_{di} C_i) P_i^- \text{ [13]}^{28} \text{ ou } P_i^+ = P_i^- - K_{di} W_{edi} K_{di}^T$$

$$\widehat{\xi}_i^+ = \widehat{\xi}_i^- + K_{di} (\zeta_i - C_i \widehat{\xi}_i^-) \text{ ou } \widehat{\xi}_i^+ = (I - K_{di} C_i) \widehat{\xi}_i^- + K_{di} \zeta_i \text{ [13]}^{29}$$

$$P_{i+1}^- = A_{di} P_i^+ A_{di}^T + V_{di} \text{ [13]}^{30}$$

$$\widehat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{\xi}_i^+ \text{ [13]}^{31}$$

Fin pour.

#### Seconde forme sans calcul de $W_{edi}$

Pour  $i = 0, 1, \dots$  :

$$P_i^+ = [(P_i^-)^{-1} + C_i^T W_{di}^{-1} C_i]^{-1}$$

$$K_{di} = P_i^+ C_i^T W_{di}^{-1}$$

$$\widehat{\xi}_i^+ = \widehat{\xi}_i^- + K_{di} (\zeta_i - C_i \widehat{\xi}_i^-) \text{ ou } \widehat{\xi}_i^+ = (I - K_{di} C_i) \widehat{\xi}_i^- + K_{di} \zeta_i \text{ [13]}^{32}$$

$$P_{i+1}^- = A_{di} P_i^+ A_{di}^T + V_{di} \text{ [13]}^{33}$$

$$\widehat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{\xi}_i^+ \text{ [13]}^{34}$$

Fin pour.

**Remarque** : dans [13] l'agencement des équations du filtre est différent car la première mesure est considérée à  $t_1$  et non, comme ici, à  $t_0$ .

---

25. éq. 5-41

26. éq. 5-42

27. éq. 5-38

28. éq. 5-40

29. éq. 5-39

30. éq. 5-37

31. éq. 5-36

32. éq. 5-39

33. éq. 5-37

34. éq. 5-36

## 3.9 Introduction de l'innovation

### 3.9.1 Procédure recursive de Gram-Schmidt

Pour cette procédure cf. [5]<sup>35</sup>.

Soit, à partir des  $(i + 1)$  vecteurs *aléatoires*  $z_0, \dots, z_i$ , de dimensions  $p$ , les  $(i + 1)$  vecteurs *aléatoires*  $e_0, \dots, e_i$ <sup>36</sup>, de dimensions  $p$ , tels que :

$$\begin{aligned} e_0 &= z_0 \\ e_1 &= z_1 - R_{z_1 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 \\ e_2 &= z_2 - R_{z_2 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 - R_{z_2 e_1} R_{e_1 e_1}^{-1} e_1 \\ &\vdots \\ e_{i-1} &= z_{i-1} - R_{z_{i-1} e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 - \dots - R_{z_{i-1} e_{i-2}} R_{e_{i-2} e_{i-2}}^{-1} e_{i-2} \\ e_i &= z_i - R_{z_i e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 - \dots - R_{z_i e_{i-1}} R_{e_{i-1} e_{i-1}}^{-1} e_{i-1}. \end{aligned}$$

En effet on va montrer que  $R_{e_0 e_0}, \dots, R_{e_{i-1} e_{i-1}}$  sont définies positives ( $R_{e_0 e_0} > 0, \dots, R_{e_{i-1} e_{i-1}} > 0$ ) donc inversibles.

Alors :  $\{z_0, \dots, z_i\} \in \mathcal{L}(e_0, \dots, e_i)$  (espace linéaire engendré par les vecteurs  $e_0, \dots, e_i$ ).

#### Démonstration

$$\begin{aligned} z_0 &= e_0 \in \mathcal{L}(e_0) \\ z_1 &= R_{z_1 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 + e_1 \in \mathcal{L}(e_0, e_1) \\ &\vdots \\ z_i &= R_{z_i e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} e_0 + \dots + R_{z_i e_{i-1}} R_{e_{i-1} e_{i-1}}^{-1} e_{i-1} + e_i \in \mathcal{L}(e_0, \dots, e_i) \text{ QED.} \end{aligned}$$

Et :

$$\{e_0, \dots, e_i\} \in \mathcal{L}(z_0, \dots, z_i).$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned} e_0 &= z_0 \in \mathcal{L}(z_0) \\ e_1 &= z_1 - R_{z_1 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} z_0 \in \mathcal{L}(z_0, z_1) \\ e_2 &= z_2 - R_{z_2 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} z_0 - R_{z_2 e_1} R_{e_1 e_1}^{-1} (z_1 - R_{z_1 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} z_0) \in \mathcal{L}(z_0, z_1, z_2) \\ &\vdots \\ &\text{et, de proche en proche, } e_i \in \mathcal{L}(z_0, \dots, z_i) \text{ QED.} \end{aligned}$$

---

35. § 4.2.1 pp. 125-127

36. nous verons plus loin que  $e_i$  est effectivement l'innovation introduite précédemment

Par conséquent :

$$\mathcal{L}(e_0, \dots, e_i) = \mathcal{L}(z_0, \dots, z_i)$$

L'intérêt de cette procédure est que  $R_{e_j e_k} = 0$ ;  $j = 0, \dots, i$ ;  $k = 0, \dots, i$ ;  $j \neq k$  alors que  $R_{z_j z_k} \neq 0$ , dans les mêmes conditions d'indices.

### Démonstration

i)  $j = 1$

$$R_{e_1 e_0} = R_{z_1 e_0} - R_{z_1 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} R_{e_0 e_0} = 0 \text{ et donc } R_{e_0 e_1} = R_{e_1 e_0}^T = 0$$

ii)  $j = 2$

$$R_{e_2 e_0} = R_{z_2 e_0} - R_{z_2 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} R_{e_0 e_0} - R_{z_2 e_1} R_{e_1 e_1}^{-1} R_{e_1 e_0} = 0 \text{ et donc } R_{e_0 e_2} = R_{e_2 e_0}^T = 0$$

$$R_{e_2 e_1} = R_{z_2 e_1} - R_{z_2 e_0} R_{e_0 e_0}^{-1} R_{e_0 e_1} - R_{z_2 e_1} R_{e_1 e_1}^{-1} R_{e_1 e_1} = 0 \text{ et donc } R_{e_1 e_2} = R_{e_2 e_1}^T = 0$$

⋮

Et ainsi, de proche en proche,  $R_{e_j e_k} = 0$ ;  $j = 0, \dots, i$ ;  $k = 0, \dots, i$ ;  $j \neq k$  QED.

Soient :

$E_{i-1} \triangleq [e_0^T \dots e_{i-1}^T]^T$ ;  $i = 1, 2, \dots$  vecteur *aléatoire* gaussien et centré, de dimension  $ip$ .

$E_i \triangleq [e_0^T \dots e_i^T]^T = [E_{i-1}^T e_i^T]^T$ ;  $i = 0, 1, \dots$  vecteur *aléatoire* gaussien et centré, de dimension  $(i+1)p$ .

## 3.9.2 Estimateurs

### 3.9.2.1 Calcul des estimateurs avec les innovations

Étant donné que  $\mathcal{L}(e_0, \dots, e_{i-1}) = \mathcal{L}(z_0, \dots, z_{i-1})$  et que  $\mathcal{L}(e_0, \dots, e_i) = \mathcal{L}(z_0, \dots, z_i)$  on en déduit que :

$$\widehat{x}_i^- = m_{x_i|Z_{i-1}} \Rightarrow \widehat{x}_i^- = m_{x_i|E_{i-1}},$$

$$\widehat{x}_i^+ = m_{x_i|Z_i} \Rightarrow \widehat{x}_i^+ = m_{x_i|E_i},$$

$$\widehat{z}_i = m_{z_i|Z_{i-1}} \Rightarrow \widehat{z}_i = m_{z_i|E_{i-1}}.$$

Et, par conséquent :

$$\widehat{x}_i^- = R_{x_i E_{i-1}} R_{E_{i-1} E_{i-1}}^{-1} E_{i-1}$$

$$\widehat{x}_i^+ = R_{x_i E_i} R_{E_i E_i}^{-1} E_i$$

$$\widehat{z}_i = R_{z_i E_{i-1}} R_{E_{i-1} E_{i-1}}^{-1} E_{i-1}$$



$$\text{Donc } \widehat{z}_i = \begin{bmatrix} R_{z_i e_0} & \dots & R_{z_i e_{i-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{e_0 e_0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & R_{e_{i-1} e_{i-1}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_0 \\ \vdots \\ e_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Finalement : } \widehat{z}_i = \sum_{j=0}^{i-1} R_{z_i e_j} R_{e_j e_j}^{-1} e_j.$$

Et, par conséquent, on constate que :

$$e_i \triangleq z_i - \sum_{j=0}^{i-1} R_{z_i e_j} R_{e_j e_j}^{-1} e_j.$$

Soit :

$e_i = z_i - \widehat{z}_i$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : vecteur *aléatoire* gaussien et centré (cf. ci-devant), de dimension  $p$ , souvent appelé *innovation* [13]<sup>37</sup> et [5]<sup>38</sup> est l'erreur de l'estimateur  $\widehat{z}_i$  de  $z_i$  (rappel :  $e_0 = z_0$ ).

$$\widehat{x}_i^- = \sum_{j=0}^{i-1} R_{x_i e_j} W_{edj}^{-1} e_j; i = 1, 2, \dots [5]^{39},$$

$$\widehat{x}_i^+ = \sum_{j=0}^i R_{x_i e_j} W_{edj}^{-1} e_j; i = 0, 1, \dots,$$

$$\widehat{z}_i = \sum_{j=0}^{i-1} R_{z_i e_j} W_{edj}^{-1} e_j; i = 1, 2, \dots \text{ (rappel } \widehat{z}_0 = 0).$$

## 3.10 Estimations prédites

Nous utilisons l'indice  $p$  pour les estimations prédites. Soient :

$K_{pdi} \triangleq A_{di} K_{di}$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : matrice *déterministe*, de dimension  $n \times p$  [5]<sup>40</sup>,

$A_{pdi} \triangleq A_{di} - K_{pdi} C_i = A_{di} (I - K_{di} C_i)$ ;  $i = 0, 1, \dots$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$  [5]<sup>41</sup>.

### 3.10.1 Estimateurs prédits

#### 3.10.1.1 Calcul de $\widehat{x}_{i+1}^-$ en fonction de $\widehat{x}_i^-$

$$\widehat{x}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} e_i [5]^{42} \text{ ou } \widehat{x}_{i+1}^- = A_{pdi} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} z_i [5]^{43}.$$

---

37. éq. 5.61

38. p. 312

39. éq. 9-2-3

40. éq. 9.2.22

41. éq. 9.2.9

42. éq. 9-2-7

43. éq. 9-2-9

### Démonstrations

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{i+1}^- &= \sum_{j=0}^i R_{x_{i+1}e_j} W_{edj}^{-1} e_j = \sum_{j=0}^i R_{(A_{di} x_i + v_{di})e_j} W_{edj}^{-1} e_j \\
&= A_{di} \sum_{j=0}^i R_{x_i e_j} W_{edj}^{-1} e_j + \sum_{j=0}^i R_{v_{di} e_j} W_{edj}^{-1} e_j \\
&= A_{di} \sum_{j=0}^{i-1} R_{x_i e_j} W_{edj}^{-1} e_j + A_{di} R_{x_i e_i} W_{edi}^{-1} e_i \\
&= A_{di} \widehat{x}_i^- + A_{di} P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} e_i = A_{di} \widehat{x}_i^- + A_{di} K_{pd} e_i = A_{di} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} e_i \text{ QED.}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\widehat{x}_{i+1}^- &= A_{di} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} (z_i - C_i \widehat{x}_i^-) = (A_{di} - K_{pdi} C_i) \widehat{x}_i^- + K_{pdi} z_i \\
&= A_{pdi} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} z_i \text{ QED.}
\end{aligned}$$

#### 3.10.1.2 Calcul de $\widetilde{x}_{i+1}^-$ en fonction de $\widetilde{x}_i^-$

$$\widetilde{x}_{i+1}^- = A_{di} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} e_i = A_{pdi} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} w_{di} [5]^{44}.$$

### Démonstrations

$$\widetilde{x}_{i+1}^- = x_{i+1} - \widehat{x}_{i+1}^- = (A_{di} x_i + v_{di}) - (A_{di} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} e_i) = A_{di} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} e_i \text{ QED, et :}$$

$$\widetilde{x}_{i+1}^- = A_{di} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} (C_i \widetilde{x}_i^- + w_{di}) = A_{pdi} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} w_{di}. \text{ QED.}$$

#### 3.10.1.3 Calcul de $P_{i+1}^-$ en fonction de $P_i^-$

$$\begin{aligned}
P_{i+1}^- &= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} - K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T [5]^{45}, \text{ et :} \\
P_{i+1}^- &= A_{pdi} P_i^- A_{pdi}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{di} K_{pdi}^T [5]^{46}.
\end{aligned}$$

### Démonstrations

$$\begin{aligned}
P_{i+1}^- &= R_{\widetilde{x}_{i+1}^- \widetilde{x}_{i+1}^-} = R_{(A_{di} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} e_i)(A_{di} \widetilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} e_i)} \\
&= A_{di} R_{\widetilde{x}_i^- \widetilde{x}_i^-} A_{di}^T + R_{v_{di} v_{di}} + K_{pdi} R_{e_i e_i} K_{pdi}^T \\
&\quad + 2 A_{di} R_{\widetilde{x}_i^- v_{di}} - 2 A_{di} R_{\widetilde{x}_i^- e_i} K_{pdi}^T - 2 R_{v_{di} e_i} K_{pdi}^T \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T - 2 A_{di} P_i^- C_i^T K_{pdi}^T \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T - 2 A_{di} P_i^- C_i^T K_{di}^T A_{di}^T \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T - 2 A_{di} P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1} C_i P_i^- A_{di}^T \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T - 2 (A_{di} P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1}) W_{edi} (W_{edi}^{-1} C_i P_i^- A_{di}^T) \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T - 2 K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T \\
&= A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} - K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T \text{ QED, et :}
\end{aligned}$$

---

44. éq. 9-2-23

45. éq. 9-2-14

46. éq. 9-2-24

$$\begin{aligned}
P_{i+1}^- &= R_{\tilde{x}_{i+1}^- \tilde{x}_{i+1}^-} = R_{(A_{pdi} \tilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} w_{di})(A_{pdi} \tilde{x}_i^- + v_{di} - K_{pdi} w_{di})} \\
&= A_{pdi} R_{\tilde{x}_i^- \tilde{x}_i^-} A_{pdi}^T + R_{v_{di} v_{di}} + K_{pdi} R_{w_{di} w_{di}} K_{pdi}^T \\
&+ 2 A_{pdi} R_{\tilde{x}_i^- v_{di}} - 2 A_{pdi} R_{\tilde{x}_i^- w_{di}} K_{pdi}^T - 2 R_{v_{di} w_{di}} K_{pdi}^T \\
&= A_{pdi} P_i^- A_{pdi}^T + V_{di} + K_{pdi} W_{di} K_{pdi}^T \text{ QED.}
\end{aligned}$$

### 3.10.1.4 Calcul de $\Sigma_{i+1}^-$ en fonction de $\Sigma_i^-$

Ce calcul n'intervient pas dans les équations du filtre de Kalman.

$$\Sigma_{i+1}^- = A_{di} \Sigma_i^- A_{di}^T + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T \quad [5]^{47}$$

#### Démonstration

$$\begin{aligned}
\Sigma_{i+1}^- &= \Pi_{i+1}^- - P_{i+1}^- = (A_{di} \Pi_i^- A_{di}^T + V_{di}) - (A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} - K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T) \\
&= A_{di} (\Pi_i^- - P_i^-) A_{di}^T + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T = A_{di} \Sigma_i^- A_{di}^T + K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T \text{ QED.}
\end{aligned}$$

### 3.10.1.5 Calcul de $\hat{\xi}_{i+1}^-$ en fonction de $\hat{\xi}_i^+$

$$\hat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} \varepsilon_i \quad [5]^{48} \text{ et } \hat{\xi}_{i+1}^- = A_{pdi} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} \zeta_i \quad [5]^{49}.$$

#### Démonstrations

$$\hat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \hat{\xi}_i^+ = A_{di} [(I - K_{di} C_i) \hat{\xi}_i^- + K_{di} \zeta_i]. \text{ Donc :}$$

$$i) \hat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} (\zeta_i - C_i \hat{\xi}_i^-) = A_{di} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} \varepsilon_i \text{ QED.}$$

$$ii) \hat{\xi}_{i+1}^- = A_{pdi} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} \zeta_i \text{ QED.}$$

---

47. éq. 9-2-27

48. p. 316

49. éq. 9.3.1 et p. 318

### 3.11 Équations du filtre de Kalman pour les estimées prédites

**Initialisation**

$$\hat{\xi}_0^- = 0 \text{ [5]}^{50}$$

$$P_0^- = \Pi_0 \text{ (rappel : } \Pi_0 \text{ supposé connu)}$$

**Pour**  $i = 0, 1, \dots$  :

$$W_{edi} = C_i P_i^- C_i^T + W_{di} \text{ (rappel : } W_{di} \text{ supposé connu)}$$

$$K_{pdi} = A_{di} P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1}$$

$$\varepsilon_i = \zeta_i - C_i \hat{\xi}_i^- \text{ [5]}^{51}$$

$$\hat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \hat{\xi}_i^- + K_{pdi} \varepsilon_i \text{ [5]}^{52}$$

$$P_{i+1}^- = A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} - K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T$$

**Fin pour.**

---

50. éq. 9-2-32

51. éq.9-2-32

52. éq. 9-2-33



# Chapitre 4

## Passage du filtre discret au filtre continu de Kalman

Ce passage est expliqué par Kailath et al. [5]<sup>1</sup>.

### 4.1 Introduction

Considérons toujours des instants discrets  $t_i = t_0 + i \Delta$ ;  $i = 0, 1, \dots$  (avec  $\Delta \ll \text{petit} \gg$ ).

Soit  $n(t)$ ;  $t_0 \leq t$  un bruit blanc gaussien centré : vecteur *aléatoire* ; donc tel que :

$$m_{n(t)} = E\{n(t)\} = 0; t_0 \leq t$$

$$R_{nn}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{n(t), n(\tau)\} = N(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

$$\text{Et soit } n_i \triangleq \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} n(t) dt.$$

Alors  $n_i \approx n(t_i)$  et  $n_i$  est un bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire* ; donc tel que :

$$m_{n_i} = E\{n_i\} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{n_i n_j} \triangleq \text{cov}\{n_i, n_j\} = \frac{1}{\Delta} N(t_i) \delta_{ij}; t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

#### Démonstration

$$m_{n_i} = \frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m_{n(t)} dt = 0 \text{ QED.}$$

---

1. Chapitre 16, p. 617

$$R_{n_i n_j} = \text{cov}\left\{\frac{1}{\Delta} \int_{t_i}^{t_{i+1}} n(t) dt, \frac{1}{\Delta} \int_{t_j}^{t_{j+1}} n(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{\Delta^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R_{nn}(t, \tau) dt d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} N(t) \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{1}{\Delta^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} g(\tau) d\tau, \text{ en posant :}$$

$$g(\tau) \triangleq \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(t) \delta(t - \tau) dt.$$

$$\text{Alors } g(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \in ]-\infty, t_i[ \\ N(\tau) & \text{si } \tau \in ]t_i, t_{i+1}[ \\ 0 & \text{si } \tau \in ]t_{i+1}, \infty[ \end{cases}$$

Donc si  $j \neq i$  on a  $g(\tau) = 0$  sur  $]t_j, t_{j+1}[$  et  $R_{n_i n_j} = 0$

et si  $j = i$  on a  $g(\tau) = N(\tau)$  sur  $]t_i, t_{i+1}[$  et

$$R_{n_i n_j} = \frac{1}{\Delta^2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} N(\tau) d\tau \approx \frac{N(t_i)}{\Delta}.$$

Finalement  $R_{n_i n_j} = \frac{1}{\Delta} N(t_i) \delta_{ij}$  QED.

On va considérer, pour  $t_0 \leq t$  :

1)  $v(t)$  un bruit blanc gaussien centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , donc tel que :

$$m_{v(t)} = 0; t_0 \leq t$$

$$R_{vv}(t, \tau) = V(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

2)  $w(t)$  un bruit blanc gaussien centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ , donc tel que :

$$m_{w(t)} = 0; t_0 \leq t$$

$$R_{ww}(t, \tau) = W(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

Définition de  $v_d(t)$  et  $w_d(t)$

$$\text{Soient } v_d(t) \triangleq \Delta v(t) \text{ et } w_d(t) \triangleq w(t).$$

Alors, de toute évidence :

1)  $v_d(t)$  est un bruit blanc gaussien centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ , donc tel que :

$$m_{v_d(t)} = 0; t_0 \leq t$$

$$R_{v_d v_d}(t, \tau) = \Delta^2 V(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

2)  $w_d(t)$  est un bruit blanc gaussien centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ , donc tel que :

$$m_{w_d(t)} = 0; t_0 \leq t$$

$$R_{w_d w_d}(t, \tau) = W(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau.$$

$$\text{Soient } v_{di} = v_d(t_i) \text{ et } w_{di} = w_d(t_i).$$

D'après ce qui précède :

1)  $v_{di}$  est un bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$  ; donc tel que :

$$m_{v_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{v_{di}v_{dj}} = \frac{1}{\Delta} \Delta^2 V(t_i) \delta_{ij}.$$

$$\text{Soit } R_{v_{di}v_{dj}} = V_d(t_i) \delta_{ij} \text{ avec } V_d(t_i) \triangleq \Delta V(t_i).$$

2)  $w_{di}$  est un bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$  ; donc tel que :

$$m_{w_{di}} = 0; i = 0, 1, \dots$$

$$R_{w_{di}w_{dj}} = \frac{1}{\Delta} W(t_i) \delta_{ij}.$$

$$\text{Soit } R_{w_{di}w_{dj}} = W_d(t_i) \delta_{ij} \text{ avec } W_d(t_i) \triangleq \frac{W(t_i)}{\Delta}.$$

Et par conséquent on peut passer des quantités discrètes aux quantités continues grâce aux tableaux suivants.

## 4.2 Passage des quantités discrètes aux quantités continues

### 4.2.1 Quantités vectorielles

discret		continu
$x_i$	=	$x(t_i)$
$\frac{v_{di}}{\Delta}$	=	$v(t_i)$
$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta}$	=	$\dot{x}(t_i)$
$w_{di}$	=	$w(t_i)$
$z_i$	=	$z(t_i)$
$\widehat{x}_i^-$	=	$\widehat{x}(t_i)$
$\frac{\widehat{x}_{i+1}^- - \widehat{x}_i^-}{\Delta}$	=	$\widehat{\dot{x}}(t_i)$
$\widehat{z}(t_i)$	=	$\widehat{z}_i$
$\widetilde{x}_i^-$	=	$\widetilde{x}(t_i)$
$\frac{\widetilde{x}_{i+1}^- - \widetilde{x}_i^-}{\Delta}$	=	$\widetilde{\dot{x}}(t_i)$
$e_i$	=	$e(t_i)$
$\widehat{\xi}_i^-$	=	$\widehat{\xi}(t_i)$
$\zeta_i$	=	$\zeta(t_i)$
$\widehat{\zeta}_i$	=	$\widehat{\zeta}(t_i)$



## 4.2.2 Quantités matricielles

discret	continu	discret	continu
$\frac{A_{di}-I}{\Delta}$	$= A(t_i)$		
$\frac{V_{di}}{\Delta}$	$= V(t_i)$	$\Delta V_{di}^{-1}$	$= V^{-1}(t_i)$
$\Delta W_{di}$	$= W(t_i)$	$\frac{W_{di}}{\Delta}$	$= W^{-1}(t_i)$
$C_i$	$= C(t_i)$		
$\Pi_i$	$= \Pi(t_i)$		
$\frac{\Pi_{i+1}-\Pi_i}{\Delta}$	$= \dot{\Pi}(t_i)$		
$P_i^-$	$= P(t_i)$		
$\frac{P_{i+1}^- - P_i^-}{\Delta}$	$= \dot{P}(t_i)$		
$\Sigma_i^-$	$= \Sigma(t_i)$		
$\frac{\Sigma_{i+1}^- - \Sigma_i^-}{\Delta}$	$= \dot{\Sigma}(t_i)$		
$\Delta W_{edi}$	$= W_e(t_i)$	$\frac{W_{edi}^{-1}}{\Delta}$	$= W_e^{-1}(t_i)$
$\frac{K_{di}}{\Delta}$	$= K(t_i)$		
$\frac{A_{pdi}-I}{\Delta}$	$= A_p(t_i)$		
$\frac{K_{pdi}}{\Delta}$	$= K_p(t_i)$		

**Remarque :** étant donné que la matrice  $A_{di}$  a été supposée stable il en est de même de la matrice  $A(t_i)$ . En effet si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A_{di}$  alors  $\frac{\lambda-1}{\Delta}$  est une valeur propre de  $A(t_i)$  et  $\lambda$  étant située strictement dans le demi-plan complexe gauche il en est de même de  $\frac{\lambda-1}{\Delta}$ .

On verra que  $W_e(t_i) = W(t_i)$ , alors que  $W_{edi} \neq W_{di}$  et que  $K_p(t_i) = K(t_i)$ , alors que  $K_{pdi} \neq K_{di}$ .

## 4.3 Équation différentielle stochastique d'état

$$\dot{x}(t_i) = A(t_i)x(t_i) + v(t_i).$$

### Démonstration

$$x_{i+1} = A_{di}x_i + v_{di}. \text{ Donc :}$$

$$x_{i+1} - x_i = (A_{di} - I)x_i + v_{di}; \text{ soit :}$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta} = \frac{A_{di} - I}{\Delta}x_i + \frac{v_{di}}{\Delta}. \text{ Finalement :}$$

$$\dot{x}(t_i) = A(t_i)x(t_i) + v(t_i) \text{ QED.}$$

## 4.4 Calcul de $\dot{\Pi}(t_i)$

$$\dot{\Pi}(t_i) = A(t_i) \Pi(t_i) + \Pi(t_i) A^T(t_i) + V(t_i).$$

**Démonstration**

$$\Pi_{i+1} = A_{di} \Pi_i A_{di}^T + V_{di}. \text{ Donc :}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1} - \Pi_i &= A_{di} \Pi_i A_{di}^T - \Pi_i + V_{di} \\ &= [\Delta A(t_i) + I] \Pi(t_i) [\Delta A(t_i) + I]^T - \Pi(t_i) + \Delta V(t_i); \text{ soit, en négligeant les} \\ &\text{termes en } \Delta^2 : \end{aligned}$$

$$\frac{\Pi_{i+1} - \Pi_i}{\Delta} = A(t_i) \Pi(t_i) + \Pi(t_i) A^T(t_i) + V(t_i). \text{ Finalement :}$$

$$\dot{\Pi}(t_i) = A(t_i) \Pi(t_i) + \Pi(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) \text{ QED.}$$

## 4.5 Équation stochastique d'observation bruitée

$$z(t_i) = C(t_i) x(t_i) + w(t_i).$$

**Démonstration**

$$z_i = C_i x_i + w_{di}. \text{ Donc :}$$

$$z(t_i) = C(t_i) x(t_i) + w(t_i) \text{ QED.}$$

## 4.6 Calcul de $W_e(t_i)$ et $W_e^{-1}(t_i)$

$$W_e(t_i) = W(t_i) \text{ et } W_e^{-1}(t_i) = W^{-1}(t_i).$$

**Démonstration**

$$W_{edi} = C_i P_i^- C_i^T + W_{di}. \text{ Donc :}$$

$$\frac{W_e(t_i)}{\Delta} = C(t_i) P(t_i) C^T(t_i) + \frac{W(t_i)}{\Delta}; \text{ soit :}$$

$$W_e(t_i) = \Delta C(t_i) P(t_i) C^T(t_i) + W(t_i) \text{ et en faisant tendre } \Delta \text{ vers } 0 :$$

$$W_e(t_i) = W(t_i) \text{ QED et } W_e^{-1}(t_i) = W^{-1}(t_i) \text{ QED.}$$

*C'est un point essentiel du filtre continu de Kalman qui apparaît plus simple que le filtre discret car  $W_e(t_i) = W(t_i)$  alors que  $W_{edi} \neq W_{di}$ .*

## 4.7 Calcul du gain de Kalman $K(t_i)$

$$K(t_i) = P(t_i) C^T(t_i) W^{-1}(t_i).$$

### Démonstration

$K_{di} = P_i^- C_i^T W_{edi}^{-1}$ . Donc :

$\Delta K(t_i) = P(t_i) C^T(t_i) \Delta W_e^{-1}(t_i)$ . Mais  $W_e^{-1}(t_i) = W^{-1}(t_i)$  et donc :

$K(t_i) = P(t_i) C^T(t_i) W^{-1}(t_i)$  QED.

## 4.8 Calcul de $K_p(t_i)$

$K_p(t_i) = K(t_i)$ .

### Démonstration

$K_{pdi} = A_{di} K_{di}$ . Donc :

$\Delta K_p(t_i) = [\Delta A(t_i) + I] \Delta K(t_i)$ ; soit

$K_p(t_i) = [\Delta A(t_i) + I] K(t_i)$  et en faisant tendre  $\Delta$  vers 0 :

$K_p(t_i) = K(t_i)$  QED.

*C'est une autre simplification du filtre continu de Kalman par rapport au filtre discret car  $K_p(t_i) = K(t_i)$  alors que  $K_{pdi} \neq K_{di}$ .*

## 4.9 Calcul de $A_p(t_i)$

$A_p(t_i) = A(t_i) - K(t_i) C(t_i)$ .

### Démonstration

$A_{pdi} = A_{di} - K_{pdi} C_i$ . Donc :

$\Delta A_p(t_i) + I = \Delta A(t_i) + I - \Delta K_p(t_i) C(t_i)$ . Mais  $K_p(t_i) = K(t_i)$  et finalement :

$A_p(t_i) = A(t_i) - K(t_i) C(t_i)$  QED.

## 4.10 Calcul de $\Sigma(t_i)$

$\Sigma(t_i) = \Pi(t_i) - P(t_i)$ .

### Démonstration

$\Sigma_i^- = \Pi_i - P_i^-$ . Donc :

$\Sigma(t_i) = \Pi(t_i) - P(t_i)$  QED.

## 4.11 Calcul de $\dot{P}(t_i)$

$$\dot{P}(t_i) = A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - K(t_i) W(t_i) K^T(t_i) \text{ ou :}$$

$$\dot{P}(t_i) = A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - P(t_i) C(t_i) W^{-1}(t_i) C(t_i) P(t_i)$$

(équation de Riccati).

### Démonstration

$$P_{i+1}^- = A_{di} P_i^- A_{di}^T + V_{di} - K_{pdi} W_{edi} K_{pdi}^T. \text{ Donc :}$$

$$P(t_{i+1}) = [\Delta A(t_i) + I] P(t_i) [\Delta A(t_i) + I]^T + \Delta V(t_i) - \Delta K_p(t_i) W_e(t_i) K_p^T(t_i);$$

soit :

$$P(t_{i+1}) - P(t_i) = \Delta^2 A(t_i) P(t_i) A^T(t_i) + \Delta A(t_i) P(t_i) + \Delta P(t_i) A^T(t_i) + \Delta V(t_i) - \Delta K_p(t_i) W_e(t_i) K_p^T(t_i)$$

et en négligeant le terme en  $\Delta^2$  :

$$\frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{\Delta} = A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - K_p(t_i) W_e(t_i) K_p^T(t_i).$$

Étant donné que  $K_p(t_i) = K(t_i)$  et que  $W_e(t_i) = W(t_i)$  on a finalement :

$$\dot{P}(t_i) = A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - K(t_i) W(t_i) K^T(t_i) \text{ QED.}$$

Mais  $K(t_i) = P(t_i) C^T(t_i) W^{-1}(t_i)$ , donc :

$$\dot{P}(t_i) = A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - P(t_i) C(t_i) W^{-1}(t_i) C(t_i) P(t_i)$$

QED.

## 4.12 Calcul de $\dot{\Sigma}(t_i)$

$$\dot{\Sigma}(t_i) = A(t_i) \Sigma(t_i) + \Sigma(t_i) A^T(t_i) + K(t_i) W(t_i) K^T(t_i).$$

### Démonstration

Étant donné que  $\Sigma(t_i) = \Pi(t_i) - P(t_i)$  on en déduit que :

$$\dot{\Sigma}(t_i) = \dot{\Pi}(t_i) - \dot{P}(t_i) = [A(t_i) \Pi(t_i) + \Pi(t_i) A^T(t_i) + V(t_i)] - [A(t_i) P(t_i) + P(t_i) A^T(t_i) + V(t_i) - K(t_i) W(t_i) K^T(t_i)]$$

et finalement :

$$\dot{\Sigma}(t_i) = A(t_i) \Sigma(t_i) + \Sigma(t_i) A^T(t_i) + K(t_i) W(t_i) K^T(t_i) \text{ QED.}$$

## 4.13 Calcul de $\widehat{z}(t_i)$

$$\widehat{z}(t_i) = C(t_i) \widehat{x}(t_i)$$

### Démonstration

$$\widehat{z}_i = C(t_i) \widehat{x}_i^-. \text{ Donc :}$$

$$\widehat{z}(t_i) = C(t_i) \widehat{x}(t_i) \text{ QED.}$$

## 4.14 Calcul de $e(t_i)$

$$e(t_i) = z(t_i) - \widehat{z}(t_i) = z(t_i) - C(t_i) \widehat{x}(t_i).$$

### Démonstration

$$e_i = z_i - \widehat{z}_i = z_i - C_i \widehat{x}_i^-. \text{ Donc :}$$

$$e(t_i) = z(t_i) - \widehat{z}(t_i) = z(t_i) - C(t_i) \widehat{x}(t_i) \text{ QED.}$$

**Remarque :** alors  $z(t_i) = C(t_i) \widehat{x}(t_i) + e(t_i)$ .

## 4.15 Calcul de $\widehat{\dot{x}}(t_i)$

$$\widehat{\dot{x}}(t_i) = A(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) e(t_i) \text{ ou } \widehat{\dot{x}}(t_i) = A_p(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) z(t_i)$$

### Démonstrations

$$\widehat{x}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{x}_i^- + K_{pdi} e_i. \text{ Donc :}$$

$$\widehat{x}(t_{i+1}) = [\Delta A(t_i) + I] \widehat{x}(t_i) + \Delta K_p(t_i) e(t_i), \text{ soit :}$$

$$\frac{\widehat{x}(t_{i+1}) - \widehat{x}(t_i)}{\Delta} = A(t_i) \widehat{x}(t_i) + K_p(t_i) e(t_i). \text{ Mais } K_p(t_i) = K(t_i) \text{ et finalement :}$$

$$\widehat{\dot{x}}(t_i) = A(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) e(t_i) \text{ QED.}$$

De plus  $A(t_i) = A_p(t_i) + K(t_i) C(t_i)$  et donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\dot{x}}(t_i) &= [A_p(t_i) + K(t_i) C(t_i)] \widehat{x}(t_i) + K(t_i) e(t_i) \\ &= A_p(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) [C(t_i) \widehat{x}(t_i) + e(t_i)] = A_p(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) z(t_i) \text{ QED.} \end{aligned}$$

## 4.16 Calcul de $\widehat{\zeta}(t_i)$

$$\widehat{\zeta}(t_i) = C(t_i) \widehat{\xi}(t_i)$$

### Démonstration

$$\widehat{\zeta}_i = C_i \widehat{\xi}_i^-. \text{ Donc :}$$

$$\widehat{\zeta}(t_i) = C(t_i) \widehat{\xi}(t_i) \text{ QED.}$$

#### 4.17 Calcul de $\varepsilon(t_i)$

$$\varepsilon(t_i) = \zeta(t_i) - \widehat{\zeta}(t_i)$$

**Démonstration**

$$\varepsilon_i = \zeta_i - \widehat{\zeta}_i. \text{ Donc :}$$

$$\varepsilon(t_i) = \zeta(t_i) - \widehat{\zeta}(t_i) \text{ QED.}$$

#### 4.18 Calcul de $\widehat{\xi}(t_i)$

$$\dot{\widehat{\xi}}(t_i) = A(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + K(t_i) \varepsilon(t_i) \text{ ou } \dot{\widehat{\xi}}(t_i) = A_p(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + K(t_i) \zeta(t_i)$$

**Démonstrations**

$$\widehat{\xi}_{i+1}^- = A_{di} \widehat{\xi}_i^- + K_{pdi} \varepsilon_i. \text{ Donc :}$$

$$\widehat{\xi}(t_{i+1}) = [\Delta A(t_i) + I] \widehat{\xi}(t_i) + \Delta K_p(t_i) \varepsilon(t_i), \text{ soit :}$$

$$\frac{\widehat{\xi}(t_{i+1}) - \widehat{\xi}(t_i)}{\Delta} = A(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + K_p(t_i) \varepsilon(t_i). \text{ Mais } K_p(t_i) = K(t_i) \text{ et finalement :}$$

$$\dot{\widehat{\xi}}(t_i) = A(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + K(t_i) \varepsilon(t_i) \text{ QED.}$$

De plus  $A(t_i) = A_p(t_i) + K(t_i) C(t_i)$  et donc :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\xi}}(t_i) &= [A_p(t_i) + K(t_i) C(t_i)] \widehat{\xi}(t_i) + K(t_i) \varepsilon(t_i) \\ &= A_p(t_i) \widehat{x}(t_i) + K(t_i) [C(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + \varepsilon(t_i)] = A_p(t_i) \widehat{\xi}(t_i) + K(t_i) \zeta(t_i) \text{ QED.} \end{aligned}$$

## 4.19 Équations du filtre continu de Kalman

Finalement si nous remplaçons  $t_i$  par  $t$  nous obtenons les équations du filtre continu de Kalman.

### 4.19.1 Première forme sans les termes prédits

**Initialisation**

$$\widehat{\xi}(t_0) = 0 \text{ et } P(t_0) = \Pi(t_0).$$

**1) Calcul de  $P(t)$  par résolution de l'équation différentielle de Riccati**

$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t)$  avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi(t_0)$ .

**2) Calcul du gain de Kalman  $K(t)$**

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

**3) Calcul de  $\widehat{\xi}(t)$  par résolution de l'équation différentielle :**

$$\dot{\widehat{\xi}}(t) = A(t)\widehat{\xi}(t) + K(t)[\zeta(t) - C(t)\widehat{\xi}(t)] \text{ avec la condition initiale } \widehat{\xi}(t_0) = 0.$$

### 4.19.2 Seconde forme avec les termes prédits

**Initialisation**

$$\widehat{\xi}(t_0) = 0 \text{ et } P(t_0) = \Pi(t_0).$$

**1) Calcul de  $P(t)$  par résolution de l'équation différentielle de Riccati**

$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t)$  avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi(t_0)$ .

**2) Calcul du gain de Kalman  $K(t)$**

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

**3) Calcul de  $A_p(t)$  :**

$$A_p(t) = A(t) - K(t)C(t).$$

**4) Calcul de  $\widehat{\xi}(t)$  par résolution de l'équation différentielle :**

$$\dot{\widehat{\xi}}(t) = A_p(t)\widehat{\xi}(t) + K(t)\zeta(t) \text{ avec la condition initiale } \widehat{\xi}(t_0) = 0.$$

Nous allons retrouver ces équations par l'étude directe du filtre continu de Kalman.

# Chapitre 5

## Filtre continu de Kalman

Pour le filtre continu de Kalman ou filtre de Kalman-Bucy [8] [13] [5] considérons les instants continus  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Rappel : une fonction du temps est appelée *signal*.

### 5.1 Définitions

#### 5.1.1 Définitions générales

$a(t)$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n_a$ .

$m_{a(t)} \triangleq E\{a(t)\}$  moyenne de  $a(t)$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n_a$ .

$b(t)$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n_b$ .

$m_{b(t)} \triangleq E\{b(t)\}$  moyenne de  $b(t)$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n_b$ .

$R_{ab}(t, \tau) \triangleq cov\{a(t), b(\tau)\} \triangleq E\{[a(t) - m_{a(t)}][b(\tau) - m_{b(\tau)}]^T\}$   
(rappel : *cov* covariance) intercovariance de  $a(t)$  et  $b(\tau)$  [si  $a(t) = b(\tau)$  on parle d'autocovariance] : matrice *déterministe*, de dimension  $n_a \times n_b$ .

**Remarque 1** :  $R_{ba}(\tau, t) = R_{ab}^T(t, \tau)$  (démonstration facile).

**Remarque 2** : un signal *aléatoire* est centré ssi il est de moyenne nulle.

#### 5.1.2 Définitions particulières

a)  $x(t)$  état du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$  (on verra qu'il est gaussien et centré).

$\Pi(t) \triangleq R_{xx}(t, t)$  autocovariance de  $x(t)$  : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $\Pi^T(t) = \Pi(t)$ ].



b)  $v(t)$  bruit d'état : bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ ; donc tel que :

$$m_{v(t)} = 0, R_{vv}(t, \tau) = V(t) \delta(t - \tau), \text{ avec :}$$

$V(t)$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $V^T(t) = V(t)$ ], semi-définie positive ( $V(t) \geq 0$ ).

On suppose l'application  $V : t \mapsto V(t)$  continuellement différentiable [8].

c)  $y(t); t_0 \leq t$  sortie non bruitée du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$  (on verra qu'il est gaussien et centré).

Bien entendu cette sortie non bruitée n'est pas disponible.

d)  $w(t); t_0 \leq t$  bruit d'observation : bruit blanc gaussien, centré : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$ , donc tel que :

$$m_{w(t)} = 0; t_0 \leq t, R_{ww}(t, \tau) = W(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau, \text{ avec :}$$

$W(t); t_0 \leq t$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $p$ , symétrique [ $W^T(t) = W(t)$ ], définie positive [ $W(t) > 0$ ].

On suppose l'application  $W : t \mapsto W(t)$  continuellement différentiable [8].

e)  $z(t); t_0 \leq t$  observation bruitée du processus : vecteur *aléatoire*, de dimension  $p$  (on verra qu'il est gaussien et centré).

Cette observation bruitée est disponible.

## 5.2 Conditions initiales

Soit  $t_0$  un instant quelconque qualifié d'instant initial. On suppose que  $m_{x(t_0)} = 0$  et que  $\Pi(t_0)$  est connue.

## 5.3 Hypothèses

On suppose que  $x(t_0)$  est gaussien.

$R_{vw}(t, \tau) = 0^1; t_0 \leq \tau : v(t)$  et  $w(\tau)$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens..

$R_{xv}(t_0, \tau) = 0 : x(t_0)$  et  $v(\tau)$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens.

$R_{xw}(t_0, \tau) = 0; t_0 \leq \tau : x(t_0)$  et  $w(\tau)$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens.

---

1. on pourrait ne pas le supposer : [5]

## 5.4 État continu du processus

### 5.4.1 Équation différentielle stochastique d'état

On suppose que l'évolution de l'état est donnée par l'équation différentielle stochastique :

$$\boxed{\dot{x}(t) = A(t) x(t) + v(t)}.$$

Avec  $A(t)$ , supposée connue, matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , supposée stable, ou de Hurwitz, i.e. telle que ses valeurs propres sont situées strictement dans le demi-plan complexe gauche.

#### 5.4.1.1 Résolution de cette équation

Soit  $\varphi(t)$  une matrice *fondamentale* de  $\dot{x}(t) = A(t) x(t)$  i.e. une matrice, d'ordre  $n$ , dont les  $n$  colonnes sont  $n$  solutions linéairement indépendantes de cette équation [i.e.  $\dot{\varphi}(t) = A(t) \varphi(t)$ ] [2]<sup>2</sup>.

Soit  $\Phi(t, \tau)$  la matrice, d'ordre  $n$ , de *transition d'état* de  $\dot{x}(t) = A(t) x(t)$  :  $\Phi(t, \tau) = \varphi(t) \varphi^{-1}(\tau)$  [2]<sup>3</sup>.

L'application  $\Phi : (t, \tau) \mapsto \Phi(t, \tau)$  est continuellement différentiable. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(t, t) &= \varphi(t) \varphi^{-1}(t) = I, \\ \Phi^{-1}(t, \tau) &= \varphi(\tau) \varphi^{-1}(t) = \Phi(\tau, t), \\ \Phi(\tau, \sigma) \Phi(\sigma, t) &= [\varphi(\tau) \varphi^{-1}(\sigma)] [\varphi(\sigma) \varphi^{-1}(t)] = \varphi(\tau) \varphi^{-1}(t) = \Phi(\tau, t), \\ \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} &= \dot{\varphi}(t) \varphi^{-1}(\tau) = A(t) \varphi(t) \varphi^{-1}(\tau) = A(t) \Phi(t, \tau). \end{aligned}$$

Alors la solution *aléatoire*  $x(t)$  de l'équation différentielle stochastique d'état vérifie :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t, \tau) x(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma \text{ et, en particulier, en posant } \tau = t_0 : \\ x(t) &= \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

#### Démonstration

$\dot{x}(t) = \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} x(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \sigma)}{\partial t} v(\sigma) d\sigma + \Phi(t, t) v(t)$ , d'après la règle de dérivation composée de Liebniz. Soit :

$$\dot{x}(t) = A(t) \Phi(t, \tau) x(\tau) + \int_{\tau}^t A(t) \Phi(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma + v(t) \text{ ou :}$$

$$\dot{x}(t) = A(t) [\Phi(t, \tau) x(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma] + v(t). \text{ Et finalement :}$$

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t) + v(t) \text{ QED.}$$

---

2. déf. 4-1, p. 136

3. déf. 4-2, p. 137

On peut considérer que  $x(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire *causal* [2]<sup>4</sup> ayant pour matrice de réponse impulsionnelle (cf. Annexe B) :

$$\tilde{\Phi}(t, \tau) \triangleq \begin{cases} \Phi(t, \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} \text{ et pour entrée } v(t) :$$

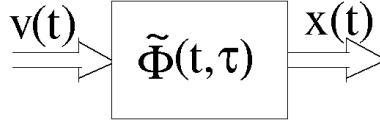


Figure 7. Filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $\tilde{\Phi}(t, \tau)$ .

(par conséquent :  $\tilde{\Phi}(t, t) = \Phi(t, t) = I$ ).

#### Démonstration

$$x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \tau) v(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau \quad [8]^5$$

Donc  $x(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0, \tau) v(\tau) d\tau$  et on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0) \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0, \tau) v(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau \\ &= \Phi(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) v(\tau) d\tau \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

On constate que l'application  $\tilde{\Phi} : (t, \tau) \mapsto \tilde{\Phi}(t, \tau)$  n'est pas continue.

#### 5.4.1.2 Le vecteur $x(t)$ est gaussien

##### Démonstration

$x(t_0)$  et  $v(t)$  sont gaussiens par hypothèse donc  $x(t)$  est gaussien par combinaison linéaire de vecteurs gaussiens, grâce au calcul ci-devant QED.

#### 5.4.2 Calcul de la moyenne de l'état

$m_{x(t)} = 0$  vecteur *déterministe*, de dimension  $n$  et  $x(t)$  est bien centré.

##### Démonstration

$$m_{x(t)} = \Phi(t, t_0) m_{x(t_0)} + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) m_{v(\tau)} d\tau = 0 \quad \text{QED.}$$

4. p. 76

5. éq. (13)

### 5.4.3 Calcul de $R_{xv}(t, \tau)$

$$R_{xv}(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t, \tau) V(\tau) & \text{si } \tau < t \\ \frac{V(t)}{2} & \text{si } \tau = t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} .$$

#### Démonstration

D'après l'annexe B on a :

$$\begin{aligned} R_{xv}(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) R_{vv}(\sigma, \tau) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) V(\sigma) \delta(\sigma - \tau) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(t, \tau - 0) + \tilde{\Phi}(t, \tau + 0)] V(\tau) \text{ car l'application } V \text{ est continue mais} \\ &\text{l'application } \tilde{\Phi} \text{ ne l'est pas.} \end{aligned}$$

Par conséquent :

- si  $\tau < t$  :  $\tau - 0 < t$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, \tau - 0) = \Phi(t, \tau)$  et on peut toujours choisir  $\tau + 0 < t$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, \tau + 0) = \Phi(t, \tau)$  et alors  $R_{xv}(t, \tau) = \Phi(t, \tau) V(\tau)$  QED,
- si  $\tau = t$  :  $t - 0 < t$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, t - 0) = \Phi(t, t) = I$  et  $t < t + 0$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, t + 0) = 0$  et alors  $R_{xv}(t, t) = \frac{V(t)}{2}$  QED,
- si  $t < \tau$  :  $t < \tau + 0$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, \tau + 0) = 0$  et on peut toujours choisir  $t < \tau - 0$ ; soit  $\tilde{\Phi}(t, \tau - 0) = 0$  et alors  $R_{xv}(t, \tau) = 0$  QED,

On constate que l'application  $R_{xv} : (t, \tau) \mapsto R_{xv}(t, \tau)$  n'est pas continue.

### 5.4.4 Calcul de $R_{xx}(t, \tau)$

$$R_{xx}(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) & \text{si } \tau \leq t \\ \Pi(t) & \text{si } \tau = t \\ \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) & \text{si } t \leq \tau \end{cases} , \text{ avec :}$$

$$\Pi(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) V(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau.$$

#### Démonstrations

D'après l'annexe B on a :

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) R_{vv}(\sigma, \rho) \tilde{\Phi}^T(\tau, \rho) d\sigma d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) V(\sigma) \delta(\sigma - \rho) d\sigma] \tilde{\Phi}^T(\tau, \rho) d\rho \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{2} [\tilde{\Phi}(t, \rho - 0) + \tilde{\Phi}(t, \rho + 0)] V(\sigma) \tilde{\Phi}^T(\tau, \rho) d\rho \end{aligned}$$

Mais si  $t < \rho$  on a  $t < \rho + 0$  soit  $\tilde{\Phi}(t, \rho + 0) = 0$  et on peut toujours choisir  $t < \rho - 0$  soit  $\tilde{\Phi}(t, \rho - 0) = 0$ .

Et si  $\rho < t$  on a  $\rho - 0 < t$  soit  $\tilde{\Phi}(t, \rho - 0) = \Phi(t, \rho)$  et on peut toujours choisir  $\rho + 0 < t$  soit  $\tilde{\Phi}(t, \rho + 0) = \Phi(t, \rho)$ . Par conséquent :

$R_{xx}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{Min(t, \tau)} \Phi(t, \rho) V(\rho) \Phi^T(\tau, \rho) d\rho$ . Donc :

i)  $\Pi(t) \triangleq R_{xx}(t, t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \rho) V(\rho) \Phi^T(t, \rho) d\rho$  QED,

ii) si  $\tau \leq t$  :  $R_{xx}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(t, \rho) V(\rho) \Phi^T(\tau, \rho) d\rho$   
 $= \Phi(t, \tau) \int_{-\infty}^{\tau} \Phi(\tau, \rho) V(\rho) \Phi^T(\tau, \rho) d\rho = \Phi(t, \tau) R_{xx}(\tau, \tau) = \phi(t, \tau) \Pi(\tau)$  QED,

iii) si  $t \leq \tau$  :  $R_{xx}(t, \tau) = R_{xx}^T(\tau, t) = \Pi(t) \Phi^T(\tau, t)$ , d'après ii) QED.

On constate que l'application  $R_{xx} : (t, \tau) \mapsto R_{xx}(t, \tau)$  est continue.

#### 5.4.5 Calcul de $R_{xw}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq \tau$

$R_{xw}(t, \tau) = 0$  ;  $t_0 \leq \tau$ .

**Démonstration**

$R_{xw}(t, \tau) \triangleq cov\{x(t), w(\tau)\} = cov\{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma, w(\tau)\}$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(t, \sigma) R_{vw}(\sigma, \tau) d\sigma = 0$  ;  $t_0 \leq \tau$  QED.

#### 5.4.6 Calcul de l'équation différentielle déterministe vérifiée par l'autocovariance de l'état

$\dot{\Pi}(t) = A(t) \Pi(t) + \Pi(t) A^T(t) + V(t)$ .

**Démonstration**

$\Pi(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) V(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau$ .

Donc, d'après la règle de dérivation composée de Liebzniz :

$\dot{\Pi}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} V(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) V(\tau) \frac{\partial \Phi^T(t, \tau)}{\partial t} d\tau$   
 $+ \Phi(t, t) V(t) \Phi^T(t, t)$   
 $= A(t) \int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) V(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau + [\int_{-\infty}^t \Phi(t, \tau) V(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau] A^T(t)$   
 $+ V(t) = A(t) \Pi(t) + \Pi(t) A^T(t) + V(t)$  QED.

**Remarque** :  $\Pi(t)$  vérifie donc une équation différentielle matricielle linéaire, à coefficients variables, dont on a supposé la condition initiale  $\Pi(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0, \tau) V(\tau) \Phi^T(t_0, \tau) d\tau$  connue.

## 5.5 Observation continue du processus

### 5.5.1 Équation continue stochastique d'observation bruitée

$$z(t) = \begin{cases} C(t)x(t) + w(t) & \text{si } t_0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}.$$

Avec  $C(t)$ ;  $t_0 \leq t$ , supposée connue, matrice *déterministe*, de dimension  $p \times n$ .

Par conséquent, en fonction de ce qui précède :

$$z(t) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)v(\tau)d\tau + w(t) & \text{si } t_0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

**Remarque**

$y(t) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + C(t)\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)v(\tau)d\tau & \text{si } t_0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$  est la sortie non bruitée.

#### 5.5.1.1 Les vecteurs $y(t)$ et $z(t)$ sont gaussiens

**Démonstration**

Les vecteurs  $y(t)$  et  $z(t)$  sont gaussiens par combinaison linéaire de vecteurs gaussiens, grâce aux équations ci-devant QED.

### 5.5.2 Calcul de la moyenne de l'observation bruitée

$m_{z(t)} = 0$  vecteur *déterministe*, de dimension  $n$  et  $z(t)$  est bien centré.

**Démonstration**

$$m_{z(t)} = \begin{cases} C(t)m_{x(t)} + m_{w(t)} = 0 & \text{si } t_0 \leq t \\ m_0 = 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases} \text{ QED.}$$

### 5.5.3 Calcul de $R_{zv}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq t$

$$R_{zv}(t, \tau) = C(t)R_{xv}(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)V(\tau) & \text{si } \tau < t \\ \frac{C(t)V(t)}{2} & \text{si } \tau = t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}.$$

### Démonstration

$R_{zv}(t, \tau) = cov\{z(t), v(\tau)\} = cov\{C(t)x(t) + w(t), v(\tau)\}$   
 $= C(t)R_{xv}(t, \tau) + R_{vw}^T(\tau, t) = C(t)R_{xv}(t, \tau); t_0 \leq t$ , d'où le résultat d'après  
le calcul de  $R_{xv}(t, \tau)$  QED.

#### 5.5.3.1 Conséquences

Pour  $t_0 < t$  soit (rappel)  $z[t_0 t] \triangleq \{z(\tau) | \tau \in [t_0 t]\}$ . Alors :

$$m_{v(t)|z[t_0 t]} = 0; t_0 < t,$$
$$cov\{v(t), v(t)|z[t_0 t]\} = V(t); t_0 < t.$$

### Démonstration

$R_{vz}(t, \tau) = R_{zv}^T(\tau, t) = 0; \tau < t$ . Donc  $v(t)$  et  $z(\tau); \tau \in [t_0 t]$  ne sont pas  
corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens. Et alors :

$$m_{v(t)|z[t_0 t]} = m_{v(t)} = 0; t_0 < t \text{ QED. Et :}$$
$$cov\{v(t), v(t)|z[t_0 t]\} = cov\{v(t), v(t)\} = V(t); t_0 < t \text{ QED.}$$

#### 5.5.4 Calcul de $R_{yw}(t, \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$

$$R_{yw}(t, \tau) = 0; t_0 \leq t; t_0 \leq \tau.$$

### Démonstration

$R_{yw}(t, \tau) = cov\{y(t), w(\tau)\} = cov\{C(t)x(t), w(\tau)\} = C(t)R_{xw}(t, \tau) = 0;$   
 $t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$  QED.

#### 5.5.5 Calcul de $R_{zw}(t, \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$

$$R_{zw}(t, \tau) = R_{wz}(t, \tau) = W(t)\delta(t - \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau.$$

### Démonstration

$R_{zw}(t, \tau) = cov\{z(t), w(\tau)\} = cov\{y(t) + w(t), w(\tau)\}$   
 $= R_{yw}(t, \tau) + R_{ww}(t, \tau) = R_{ww}(t, \tau) = W(t)\delta(t - \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$  QED.

#### 5.5.5.1 Conséquences

$$m_{w(t)|z[t_0 t]} = 0; t_0 < t,$$
$$cov\{w(t), w(t)|z[t_0 t]\} = W(t); t_0 < t.$$

### Démonstration

$R_{wz}(t, \tau) = R_{zw}^T(\tau, t) = 0$ ;  $\tau < t$ . Donc  $w(t)$  et  $z(\tau)$ ;  $\tau \in [t_0, t[$  ne sont pas corrélés donc sont indépendants puisqu'ils sont gaussiens. Et alors :

$$m_{w(t)|z[t_0, t[} = m_w(t) = 0; t_0 < t \text{ QED, et :}$$

$$\text{cov}\{w(t), w(t)|z[t_0, t[}\} = \text{cov}\{w(t), w(t)\} = W(t); t_0 < t \text{ QED.}$$

### 5.5.6 Calcul de $R_{xz}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq \tau$

$$R_{xz}(t, \tau) = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) = \begin{cases} \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) C^T(\tau) & \text{si } \tau \leq t \\ \Pi(t) C^T(t) & \text{si } \tau = t ; t_0 \leq \tau. \\ \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases}$$

### Démonstration

$R_{xz}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{x(t), z(\tau)\} = \text{cov}\{x(t), C(\tau)x(\tau) + w(\tau)\}$   
 $= R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) + R_{xw}(t, \tau) = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau)$ , d'où le résultat d'après le calcul de  $R_{xx}(t, \tau)$ ;  $t_0 \leq \tau$  QED.

On constate que l'application  $R_{xz} : (t, \tau) \mapsto R_{xz}(t, \tau)$  est continue.

### 5.5.7 Calcul de $R_{yy}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq t$ ; $t_0 \leq \tau$

$$R_{yy}(t, \tau) = C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) = \begin{cases} C(t) \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) C^T(\tau) & \text{si } \tau \leq t \\ C(t) \Pi(t) C^T(t) & \text{si } \tau = t ; \\ C(t) \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases}$$

$t_0 \leq t$ ;  $t_0 \leq \tau$ .

### Démonstration

$R_{yy}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{y(t), y(\tau)\} = \text{cov}\{C(t)x(t), C(\tau)x(\tau)\}$   
 $= C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau)$ , d'où le résultat d'après le calcul de  $R_{xx}(t, \tau)$ ;  $t_0 \leq t$ ;  
 $t_0 \leq \tau$  QED.

On constate que l'application  $R_{yy} : (t, \tau) \mapsto R_{yy}(t, \tau)$  est continue.

### 5.5.8 Calcul de $R_{yz}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq t$ ; $t_0 \leq \tau$

$$R_{yz}(t, \tau) = C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) = \begin{cases} C(t) \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) C^T(\tau) & \text{si } \tau \leq t \\ C(t) \Pi(t) C^T(t) & \text{si } \tau = t ; \\ C(t) \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases}$$

$t_0 \leq t$ ;  $t_0 \leq \tau$ .



### Démonstration

$R_{yz}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{y(t), z(\tau)\} = \text{cov}\{y(t), y(\tau) + w(\tau)\} = R_{yy}(t, \tau) + R_{yw}(t, \tau)$   
 $= C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau)$ , d'où le résultat d'après le calcul de  $R_{xx}(t, \tau)$ ;  $t_0 \leq t$ ;  
 $t_0 \leq \tau$  QED.

On constate que l'application  $R_{yz} : (t, \tau) \mapsto R_{yz}(t, \tau)$  est continue.

### 5.5.9 Calcul de $R_{zz}(t, \tau)$ ; $t_0 \leq t$ ; $t_0 \leq \tau$

$$R_{zz}(t, \tau) = C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau)$$

$$= \begin{cases} C(t) \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ C(t) \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases}; t_0 \leq t; t_0 \leq \tau.$$

### Démonstration

$$R_{zz}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{z(t), z(\tau)\} = \text{cov}\{y(t) + w(t), y(\tau) + w(\tau)\}$$

$$= R_{yy}(t, \tau) + R_{ww}(t, \tau) + R_{yw}(t, \tau) + R_{yw}^T(\tau, t)$$

$$= C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau)$$

$$= \begin{cases} C(t) \Phi(t, \tau) \Pi(\tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ C(t) \Pi(t) \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases} \text{ QED.}$$

## 5.6 Estimations optimales, au sens des moindres carrés

Ces estimations s'effectuent à partir de l'instant initial  $t_0$ , donc aux instants  $t$  tels que  $t_0 \leq t$ . On considère qu'elles sont nulles aux instants  $t$  tels que  $t < t_0$ .

Étant donné que nous ne considérons que des estimations optimales, au sens des moindres carrés et afin d'alléger l'écriture, nous notons  $\hat{x}(t)$  et  $\hat{z}(t)$  les estimateurs optimaux de  $x(t)$  et  $z(t)$ , connaissant  $z[t_0 t[$  et  $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$  et  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$  leurs erreurs respectives, sans utiliser d'indice 0, contrairement à ce que nous avons fait dans le deuxième chapitre.

Par conséquent  $\hat{x}(t_0) = m_{x(t_0)} = 0$  et  $\hat{x}(t) = m_{x(t)|z[t_0 t[}$ ;  $t_0 < t$  et  $\hat{z}(t_0) = m_{z(t_0)} = 0$  et  $\hat{z}(t) = m_{z(t)|z[t_0 t[}$ ;  $t_0 < t$ .

De même nous notons  $\hat{\xi}(t)$  et  $\hat{\zeta}(t)$  les estimées optimales de  $x(t)$  et  $z(t)$ , connaissant  $\zeta[t_0 t[ \triangleq \{\zeta(\tau) | \tau \in [t_0 t[$ , où  $\zeta(\tau)$  est une réalisation de  $z(\tau)$ , sans utiliser d'indice 0, contrairement à ce que nous avons fait dans le deuxième chapitre.

### 5.6.1 Estimateur optimal

L'estimateur optimal  $\hat{x}(t)$  est la réponse d'un filtre *causal* (cf. Annexe B) ayant pour matrice de réponse impulsionnelle  $\tilde{H}$ , de dimension  $n \times p$ , telle que :

$$\tilde{H}(t, \tau) = \begin{cases} H(t, \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases},$$

où l'application  $H$  est continuellement différentiable et pour entrée  $z(t)$ . Alors (cf. Chapitre 2) :

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \text{ et par conséquent } \hat{x}(t) = 0; t \leq t_0.$$

Ce filtre est détaillé ci-après (cf. Schéma du processus, de l'observation et de l'estimateur d'état).

#### 5.6.1.1 Calcul de la moyenne de cet estimateur optimal

$m_{\hat{x}(t)} = 0$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ . Donc  $\hat{x}(t)$  est un estimateur centré.

##### Démonstration

$$m_{\hat{x}(t)} = \int_{t_0}^t H(t, \tau) m_{z(\tau)} d\tau = 0 \text{ QED.}$$

#### 5.6.1.2 Définition de l'autocovariance de cet estimateur optimal

Soit  $\Sigma(t) \triangleq R_{\hat{x}\hat{x}}(t, t)$  l'autocovariance de cet estimateur : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $\Sigma^T(t) = \Sigma(t)$ ].

**Remarque** :  $\Sigma(t) = 0; t \leq t_0$ .

### 5.6.2 Erreur de cet estimateur optimal

Soit  $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$  : vecteur *aléatoire*, de dimension  $n$ .

**Remarque** :  $\tilde{x}(t) = x(t); t \leq t_0$ .

#### 5.6.2.1 Calcul de la moyenne de l'erreur de cet estimateur optimal

$m_{\tilde{x}(t)} = 0$  : vecteur *déterministe*, de dimension  $n$ . Donc  $\tilde{x}(t)$  est une erreur centrée.

##### Démonstration

$$m_{\tilde{x}(t)} = m_{x(t)} - m_{\hat{x}(t)} = 0 \text{ QED.}$$

### 5.6.2.2 Définition de l'autocovariance de l'erreur de cet estimateur optimal

Soit  $P(t) \triangleq R_{\tilde{x}\tilde{x}}(t, t)$  l'autocovariance de l'erreur de cet estimateur : matrice *déterministe*, d'ordre  $n$ , symétrique [ $P^T(t) = P(t)$ ].

**Remarque** :  $P(t) = \Pi(t)$  ;  $t \leq t_0$ .

### 5.6.3 Principe d'orthogonalité

Nous avons obtenu, dans le deuxième chapitre, le principe d'orthogonalité, que l'on peut donc écrire, pour des signaux *centrés*, avec les covariances :

$$R_{\tilde{x}z}(t, \tau) = 0 ; t_0 < \tau < t \text{ [12]}^6 \text{ et son corollaire } R_{\tilde{x}\hat{x}}(t, t) = 0 ; t_0 \leq t.$$

### 5.6.4 Conséquences du principe d'orthogonalité

#### 5.6.4.1 Calcul de l'autocovariance de l'estimateur optimal

$$\Sigma(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) R_{xz}^T(t, \tau) d\tau ; t_0 \leq t.$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} \Sigma(t_0) &= 0 \text{ et} \\ \Sigma(t) &= R_{\hat{x}\hat{x}}(t, t) = R_{\hat{x}x}(t, t) - R_{\tilde{x}\hat{x}}(t, t) = R_{\hat{x}x}(t, t) = \text{cov}\{\hat{x}(t), x(t)\} \\ &= \text{cov}\left\{\left[\int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau\right], x(t)\right\} = \int_{t_0}^t H(t, \tau) R_{xz}^T(t, \tau) d\tau ; t_0 < t \text{ QED.} \end{aligned}$$

#### 5.6.4.2 Calcul de l'autocovariance de l'erreur de l'estimateur optimal

$$P(t) = \Pi(t) - \Sigma(t) ; t_0 \leq t.$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} P(t) &\triangleq R_{\tilde{x}\tilde{x}}(t, t) = R_{\tilde{x}x}(t, t) - R_{\tilde{x}\hat{x}}(t, t) = R_{\tilde{x}x}(t, t) = R_{xx}(t, t) - R_{\hat{x}x}(t, t) \\ &= \Pi(t) - R_{\hat{x}\tilde{x}}(t, t) - R_{\tilde{x}\hat{x}}(t, t) = \Pi(t) - \Sigma(t) ; t_0 \leq t \text{ QED.} \end{aligned}$$

### 5.6.5 Équation intégrale de Wiener-Hopf

Nous avons également obtenu, dans le deuxième chapitre, l'équation intégrale de Wiener-Hopf que l'on peut donc écrire, pour des signaux *centrés*, avec les covariances :

---

6. éq. 1.123

$$\boxed{\int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = R_{xz}(t, \tau); t_0 < \tau < t \text{ (WH)}} \quad [12]^7 \quad [5]^8.$$

Comme nous l'avons dit, dans le deuxième chapitre, la résolution de cette équation conduit à  $H(t, \tau)$  et donc à l'estimateur optimal  $\hat{x}(t)$ .

**Remarque** : étant donné que  $R_{yz}(t, \tau) = C(t) R_{xz}(t, \tau)$  l'équation de intégrale Wiener-Hopf s'écrit aussi :

$$\int_{t_0}^t C(t) H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = R_{yz}(t, \tau); t_0 < \tau < t.$$

Nous utiliserons cette remarque pour comparer cette équation avec l'équation *stationnaire* de Wiener-Hopf.

### 5.6.6 Résolution de l'équation intégrale de Wiener-Hopf

On a vu que  $R_{xz}(t, \tau) = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau); t_0 \leq \tau$ . Par conséquent l'équation (WH) s'écrit :

$$\boxed{\int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau); t_0 < \tau < t \text{ (E1)}} \quad [12]^9.$$

On en déduit, par dérivation et d'après la règle de dérivation composée de Liebniz, que :

$$\boxed{H(t, t) R_{zz}(t, \tau) + \int_{t_0}^t \frac{\partial H(t, \sigma)}{\partial t} R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = \frac{\partial R_{xx}(t, \tau)}{\partial t} C^T(\tau); t_0 < \tau < t \text{ (E2)}},$$

car  $H$  est continuellement différentiable [12]<sup>10</sup>.

#### 5.6.6.1 Première partie : Calcul de $H(t, t) R_{zz}(t, \tau); t_0 < \tau < t$

Pour  $t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$  :

$$H(t, t) R_{zz}(t, \tau) = H(t, t) [C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau)].$$

Par conséquent si  $t_0 < \tau < t$  :

$$H(t, t) R_{zz}(t, \tau) = H(t, t) C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau),$$

soit d'après l'équation (E1) :

$$H(t, t) R_{zz}(t, \tau) = H(t, t) C(t) \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma; t_0 < \tau < t$$

Et finalement :

$$\boxed{H(t, t) R_{zz}(t, \tau) = \int_{t_0}^t H(t, t) C(t) H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma; t_0 < \tau < t \text{ (E3)}} \quad [12]^{11}.$$

---

7. éq. 1.125  
8. éq. 16-9-2  
9. éq. 3.79  
10. éq. 3.80  
11. éq. 3.81

### 5.6.6.2 Deuxième partie : Calcul de $\frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} C^T(\tau)$ ; $t_0 < \tau < t$

$R_{xx}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{x(t), x(\tau)\}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} &= \text{cov}\{\dot{x}(t), x(\tau)\} = \text{cov}\{A(t)x(t) + v(t), x(\tau)\} \\ &= A(t)R_{xx}(t, \tau) + R_{xv}^T(\tau, t). \end{aligned}$$

Par conséquent si  $t_0 < \tau < t$ , étant donné que  $R_{xv}^T(\tau, t) = 0$  :

$$\frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} = A(t)R_{xx}(t, \tau) ; t_0 < \tau < t \quad [12]^{12}.$$

On en déduit :

$$\frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} C^T(\tau) = A(t)R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) ; t_0 < \tau < t.$$

Soit d'après l'équation (E1) :

$$\frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} C^T(\tau) = A(t) \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma ; t_0 < \tau < t.$$

Et finalement :

$$\boxed{\frac{\partial R_{xx}(t,\tau)}{\partial t} C^T(\tau) = \int_{t_0}^t A(t) H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma ; t_0 < \tau < t \quad (\text{E4})} \quad [12]^{13}.$$

### 5.6.6.3 Troisième partie

Posons :

$$\widehat{A}(t) \triangleq A(t) - H(t, t) C(t) ; t_0 \leq t \text{ et :}$$

$$\mathcal{H}(t, \tau) \triangleq \frac{\partial H(t,\tau)}{\partial t} - \widehat{A}(t) H(t, \tau) ; t_0 \leq \tau \leq t.$$

Alors si on reporte les équations (E4) et (E3) dans l'équation (E2) on obtient :

$$\boxed{\int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = 0 ; t_0 < \tau < t \quad (\text{E5})}.$$

### 5.6.6.4 Quatrième partie : résolution de l'équation (E5)

La condition :

$$\boxed{\mathcal{H}(t, \tau) = 0 \text{ i.e. } \frac{\partial H(t,\tau)}{\partial t} = \widehat{A}(t) H(t, \tau) ; t_0 < \tau < t \quad (\text{E6})},$$

est nécessaire et suffisante pour résoudre l'équation (E5) [12]<sup>14</sup>.

#### Démonstration de la condition suffisante

C'est évident QED.

---

12. éq. 3.82

13. éq. 3.83

14. éq. 3.84

### Démonstration de la condition nécessaire

Remarquons que  $H(t, \tau) + \mathcal{H}(t, \tau)$  satisfait l'équation intégrale de Wiener-Hopf; en effet :

$$\int_{t_0}^t [H(t, \sigma) + \mathcal{H}(t, \sigma)] R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma + \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{zz}(\sigma, \tau) d\sigma = R_{xz}(t, \tau); t_0 < \tau < t, \text{ d'après l'équation (E5).}$$

Étant donné l'unicité de l'estimateur optimal, vue dans le deuxième chapitre, on a :

$$\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t [H(t, \tau) + \mathcal{H}(t, \tau)] z(\tau) d\tau; t_0 < \tau < t$$

Par conséquent :

$$\int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) z(\tau) d\tau = 0; t_0 < \tau < t.$$

On en déduit que :

$$x^* \text{cov} \left\{ \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) z(\tau) d\tau, \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \sigma) z(\sigma) d\sigma \right\} x^{*T} = 0; \forall x^*; t_0 < \tau < t; t_0 < \sigma < t.$$

Soit :

$$x^* \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) R_{zz}(\tau, \sigma) \mathcal{H}^T(t, \sigma) d\tau d\sigma \right] x^{*T} = 0; \forall x^*; t_0 < \tau < t; t_0 < \sigma < t.$$

Et comme :

$$R_{zz}(\tau, \sigma) = C(\tau) R_{xx}(\tau, \sigma) C^T(\sigma) + W(\tau) \delta(\tau - \sigma); t_0 \leq \tau, t_0 \leq \sigma, \text{ on a :}$$

$$x^* \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) C(\tau) R_{xx}(\tau, \sigma) C^T(\sigma) \mathcal{H}^T(t, \sigma) d\tau d\sigma \right] x^{*T} + x^* \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) W(\tau) \delta(\tau - \sigma) \mathcal{H}^T(t, \sigma) d\tau d\sigma \right] x^{*T} = 0; \forall x^*; t_0 < \tau < t; t_0 < \sigma < t \text{ (E)}.$$

$$\text{Mais } x^* \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) C(\tau) R_{xx}(\tau, \sigma) C^T(\sigma) \mathcal{H}^T(t, \sigma) d\tau d\sigma \right] x^{*T} = E \left\{ \left[ x^* \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) C(\tau) x(\tau) d\tau \right]^2 \right\} \geq 0,$$

$$\text{et } x^* \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) W(\tau) \delta(\tau - \sigma) \mathcal{H}^T(t, \sigma) d\tau d\sigma \right] x^{*T} = x^* \left[ \int_{t_0}^t \mathcal{H}(t, \tau) W(\tau) \mathcal{H}^T(t, \tau) d\tau \right] x^{*T} > 0 \text{ en raison de la définie positivité de la matrice } W(\tau), \text{ sauf si } \mathcal{H}(t, \tau) = 0; t_0 < \tau < t \text{ [8] }^{15}. \text{ Par conséquent l'équation (E) ne peut être satisfaite que si } \mathcal{H}(t, \tau) = 0; t_0 < \tau < t \text{ QED.}$$

---

15. p. 42

## 5.7 Équation différentielle stochastique vérifiée par l'estimateur d'état

### 5.7.1 Calcul de cette équation

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + K(t) z(t); t_0 < t,$$

avec :

$K(t) \triangleq H(t, t) = P(t) C^T(t) W^{-1}(t); t_0 \leq t$  gain de Kalman et par conséquent :

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= A(t) - K(t) C(t) = A(t) - P(t) C^T(t) W^{-1}(t) C(t) \\ &= A(t) - P(t) U(t), \text{ en posant } U(t) \triangleq C^T(t) W^{-1}(t) C(t) \text{ matrice symétrique,} \\ &\text{d'ordre } n [U^T(t) = U(t)]. \end{aligned}$$

**Remarque :** on constate donc que  $\hat{A}(t) = A_p(t)$  ou  $A_p(t)$  est la matrice prédite introduite dans le chapitre précédent.

#### Démonstration

##### Première partie

Étant donné que  $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau; t_0 < \tau < t$  on en déduit. par dérivation et d'après la règle de dérivation composée de Liebniz, que :

$$\dot{\hat{x}}(t) = H(t, t) z(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial t} z(\tau) d\tau; t_0 < \tau < t, \text{ car } H \text{ est continuellement différentiable [12] }^{16}.$$

Soit, d'après l'équation (E6) :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= H(t, t) z(t) + \int_{t_0}^t \hat{A}(t) H(t, \tau) z(\tau) d\tau \\ &= H(t, t) z(t) + \hat{A}(t) \int_{t_0}^t H(t, \tau) z(\tau) d\tau \\ &= \hat{A}(t) \hat{x}(t) + H(t, t) z(t); t_0 < \tau < t [12]^{17}. \end{aligned}$$

##### Deuxième partie

Si on tient compte du fait que :

$$R_{zz}(t, \tau) = C(t) R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau) + W(t) \delta(t - \tau); t_0 \leq t, t_0 \leq \tau,$$

l'équation (E1) s'écrit :

$$\int_{t_0}^t H(t, \sigma) [C(\sigma) R_{xx}(\sigma, \tau) C^T(\tau) + W(\sigma) \delta(\sigma - \tau)] d\sigma = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau); t_0 < \tau < t.$$

---

16. éq. 3.86

17. éq. 3.87

Soit :

$$\int_{t_0}^t H(t, \sigma) C(\sigma) R_{xx}(\sigma, \tau) C^T(\tau) d\sigma + H(t, \tau) W(\tau) = R_{xx}(t, \tau) C^T(\tau);$$

$t_0 < \tau < t$ , car  $W$  et  $H$  sont continues.

Ou :

$$[R_{xx}(t, \tau) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{xz}^T(\tau, \sigma) d\sigma] C^T(\tau) = H(t, \tau) W(\tau); t_0 < \tau < t.$$

Par conséquent :

$$H(t, \tau) = [R_{xx}(t, \tau) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{xz}^T(\tau, \sigma) d\sigma] C^T(\tau) W^{-1}(\tau); t_0 < \tau < t.$$

Et, étant donné que  $W$  et  $H$  sont continues :

$$\begin{aligned} H(t, t) &= \{R_{xx}(t, t) - \int_{t_0}^t H(t, \sigma) R_{xz}^T(t, \sigma) d\sigma\} C^T(t) W^{-1}(t) \\ &= [\Pi(t) - \Sigma(t)] C^T(t) W^{-1}(t) = P(t) C^T(t) W^{-1}(t), \end{aligned}$$

d'après les résultats précédents.

Posons  $K(t) \triangleq H(t, t) = P(t) C^T(t) W^{-1}(t); t_0 \leq t$ , alors :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + K(t) z(t); t_0 < t \text{ QED.}$$

### 5.7.1.1 Résolution de cette équation

Soit  $\psi(t)$  une matrice fondamentale de  $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t)$  i.e. une matrice, d'ordre  $n$ , dont les  $n$  colonnes sont  $n$  solutions linéairement indépendantes de cette équation [i.e.  $\dot{\psi}(t) = \hat{A}(t) \psi(t)$ ].

Soit  $\Psi(t, \tau)$  la matrice, d'ordre  $n$ , de transition d'état de  $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t)$  :  $\Psi(t, \tau) = \psi(t) \psi^{-1}(\tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau$ . Alors :

$$\begin{aligned} \Psi(t, t) &= \psi(t) \psi^{-1}(t) = I; t_0 \leq t, \\ \Psi^{-1}(t, \tau) &= \psi(\tau) \psi^{-1}(t) = \Psi(\tau, t); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau, \\ \Psi(\tau, \sigma) \Psi(\sigma, t) &= [\psi(\tau) \psi^{-1}(\sigma)] [\varphi(\sigma) \psi^{-1}(t)] = \psi(\tau) \psi^{-1}(t) = \Psi(\tau, t); \\ t_0 \leq t; t_0 \leq \sigma; t_0 \leq \tau, \\ \frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial t} &= \dot{\psi}(t) \psi^{-1}(\tau) = \hat{A}(t) \psi(t) \psi^{-1}(\tau) = \hat{A}(t) \Psi(t, \tau); t_0 \leq t; t_0 \leq \tau, \end{aligned}$$

Alors la solution *aléatoire*  $\hat{x}(t)$  de l'équation différentielle stochastique vérifiée par l'estimateur d'état est :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \Psi(t, \tau) \hat{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \Psi(t, \sigma) K(\sigma) z(\sigma) d\sigma; t_0 \leq t; t_0 \leq \tau, \text{ ou :} \\ \hat{x}(t) &= \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau) K(\tau) z(\tau) d\tau; t_0 \leq t. \end{aligned}$$

### Démonstration

$\dot{\hat{x}}(t) = \frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial t} \hat{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \frac{\partial \Psi(t, \sigma)}{\partial t} K(\sigma) z(\sigma) d\sigma + \Psi(t, t) K(t) z(t); t_0 \leq t$ , d'après la règle de dérivation composée de Liebniz. Soit :



$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \Psi(t, \tau) \hat{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \hat{A}(t) \Psi(t, \sigma) K(\sigma) z(\sigma) d\sigma + K(t) z(t); t_0 \leq t,$$

ou :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) [\Psi(t, \tau) \hat{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \Psi(t, \sigma) K(\sigma) z(\sigma) d\sigma] + K(t) z(t); t_0 \leq t. \text{ Et finalement :}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + K(t) z(t); t_0 \leq t \text{ QED.}$$

En particulier  $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau) K(\tau) z(\tau) d\tau$  car  $\hat{x}(t_0) = 0$ .

Donc  $H(t, \tau) = \Psi(t, \tau) K(\tau)$ .

### 5.7.2 Schéma du processus, de l'observation et de l'estimateur d'état

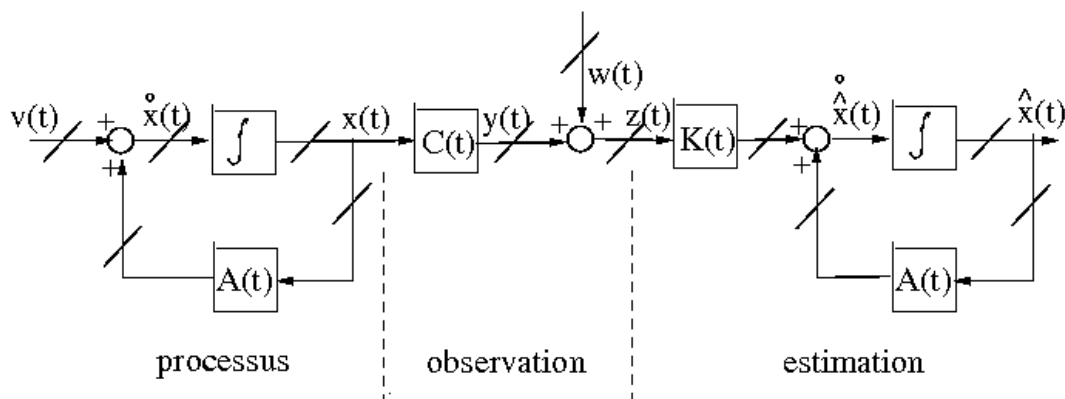


Figure 8. Schéma du processus, de l'observation et de l'estimateur d'état (les tirets obliques indiquent que les signaux correspondants sont multivariables).

## 5.8 Équation différentielle stochastique vérifiée par l'erreur de l'estimateur d'état

### 5.8.1 Calcul de cette équation

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}(t) \tilde{x}(t) + v(t) - K(t) w(t); t_0 \leq t.$$

**Démonstration**

$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Donc :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = A(t)x(t) + v(t) - \hat{A}(t)\hat{x}(t) - K(t)z(t) \\
&= A(t)x(t) + v(t) - \hat{A}(t)\hat{x}(t) - K(t)[C(t)x(t) + w(t)] \\
&= \hat{A}(t)[x(t) - \hat{x}(t)] + v(t) - K(t)w(t) \\
&= \hat{A}(t)\tilde{x}(t) + v(t) - K(t)w(t); t_0 \leq t \text{ QED.}
\end{aligned}$$

## 5.8.2 Résolution de cette équation

La solution *aléatoire*  $\tilde{x}(t)$  de cette équation est :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &= \Psi(t, t_0)\tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)[v(\tau) - K(\tau)w(\tau)] d\tau \\
&= \Psi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)[v(\tau) - K(\tau)w(\tau)] d\tau; t_0 \leq t, \\
\text{car } \tilde{x}(t_0) &= x(t_0) - \hat{x}(t_0) = x(t_0) \text{ [12]}^{18}.
\end{aligned}$$

### Démonstration

Elle est identique à celle de la résolution de l'équation différentielle vérifiée par l'estimateur d'état QED.

## 5.9 Calcul de $R_{\tilde{x}v}(t, t)$ et $R_{\tilde{x}w}(t, t)$

### 5.9.1 Calcul de $R_{\tilde{x}v}(t, t)$

$$R_{\tilde{x}v}(t, t) = \frac{V(t)}{2}; t_0 < t.$$

### Démonstration

$$\begin{aligned}
R_{\tilde{x}v}(t, t) &\triangleq \text{cov}\{\tilde{x}(t), v(t)\} \\
&= \text{cov}\{[\Psi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)v(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)w(\tau) d\tau], v(t)\} \\
&= \Psi(t, t_0)R_{xv}(t_0, t) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)R_{vv}(\tau, t) d\tau - \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)R_{wv}(\tau, t) d\tau.
\end{aligned}$$

Mais, par hypothèse :

$$\begin{aligned}
R_{xv}(t_0, t) &= 0, \\
R_{vv}(\tau, t) &= R_{vv}^T(t, \tau) = V^T(t)\delta(t - \tau) = V(t)\delta(t - \tau), \\
R_{wv}(\tau, t) &= R_{wv}^T(t, \tau) = 0; t_0 \leq \tau.
\end{aligned}$$

Donc si  $t_0 < t : t_0 < \tau < t$

$$R_{\tilde{x}v}(t, t) = \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)V(t)\delta(t - \tau) d\tau.$$

Si on considère que l'impulsion de Dirac est centrée en  $t$  et ne compte donc que pour moitié dans l'intégrale de  $t_0$  à  $t$  on obtient :

$$R_{\tilde{x}v}(t, t) = \frac{\Psi(t, t)V(t)}{2} = \frac{V(t)}{2} \text{ QED.}$$

---

18. éq. 3.91

### 5.9.2 Calcul de $R_{\tilde{x}w}(t, t)$

$$R_{\tilde{x}w}(t, t) = -\frac{K(t)W(t)}{2}; t_0 < t.$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}w}(t, t) &\triangleq \text{cov}\{\tilde{x}(t), w(t)\} \\ &= \text{cov}\{[\Psi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)v(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)w(\tau) d\tau], w(t)\} \\ &= \Psi(t, t_0)R_{xw}(t_0, t) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)R_{vw}(\tau, t) d\tau - \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)R_{ww}(\tau, t) d\tau. \end{aligned}$$

Mais, par hypothèse :

$$\begin{aligned} R_{xw}(t_0, t) &= 0; t_0 \leq t, \\ R_{vw}(\tau, t) &= 0; t_0 \leq t, \\ R_{ww}(\tau, t) &= R_{ww}^T(t, \tau) = W^T(t)\delta(t-\tau) = W(t)\delta(t-\tau). \end{aligned}$$

Donc si  $t_0 < t$  :

$$R_{\tilde{x}w}(t, t) = -\int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)W(t)\delta(t-\tau) d\tau; t_0 < \tau < t.$$

Si on considère toujours que l'impulsion de Dirac est centrée en  $t$  et ne compte donc que pour moitié dans l'intégrale de  $t_0$  à  $t$  on obtient :

$$R_{\tilde{x}w}(t, t) = -\frac{\Psi(t, t)K(t)W(t)}{2} = -\frac{K(t)W(t)}{2} \text{ QED.}$$

## 5.10 Calcul de l'équation différentielle déterministe vérifiée par l'autocovariance de l'erreur de l'estimateur d'état

$P(t)$  vérifie une équation différentielle matricielle non-linéaire de Riccati, à coefficients variables :

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V(t) - P(t)U(t)P(t); t_0 < t,$$

avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi(t_0)$  [12]<sup>19</sup>.

**Démonstration**

$P(t) \triangleq R_{\tilde{x}\tilde{x}}(t, t) \triangleq \text{cov}\{\tilde{x}(t), \tilde{x}(t)\}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \text{cov}\{\dot{\tilde{x}}(t), \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)\dot{\tilde{x}}^T(t)\} \\ &= \text{cov}\{[A(t) - K(t)C(t)]\tilde{x}(t) + v(t) - K(t)w(t), \tilde{x}(t)\} \\ &\quad + \text{cov}\{\tilde{x}(t), [A(t) - K(t)C(t)]\tilde{x}(t) + v(t) - K(t)w(t)\} \\ &= [A(t) - K(t)C(t)]P(t) + R_{v\tilde{x}}(t, t) - K(t)R_{w\tilde{x}}(t, t) + P(t)[A(t) - K(t)C(t)]^T \\ &\quad + R_{\tilde{x}v}(t, t) - R_{w\tilde{x}}(t, t)K^T(t) \\ &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - K(t)C(t)P(t) - P(t)C^T(t)K^T(t) + V(t) + K(t)W(t)K^T(t). \end{aligned}$$

<sup>19</sup>. éq. 3.101

Mais  $K(t) = P(t) C^T(t) W^{-1}(t)$ , et, par conséquent :

$$\dot{P}(t) = A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + V(t) - P(t) C^T(t) W^{-1}(t) C(t) P(t).$$

De plus  $P(t_0) = \Pi(t_0) - \Sigma(t_0) = \Pi(t_0)$  QED.

### 5.10.1 Résolution de cette équation

On peut ramener la résolution de cette équation à celle de deux équations différentielles linéaires, à coefficients variables. Pour cela on pose :

$P(t) = N(t) M^{-1}(t) = M^{-T}(t) N^T(t)$  [car  $P^T(t) = P(t)$ ], où les matrices  $M(t)$  (supposée régulière i.e. telle que  $\det[M(t)] \neq 0$ ) et  $N(t)$ , d'ordres  $n$ , sont solutions du système différentiel :

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= -A^T(t) M(t) + U(t) N(t), \\ \dot{N}(t) &= V(t) M(t) + A(t) N(t), \end{aligned}$$

avec les conditions initiales  $M(t_0) = I$  et  $N(t_0) = \Pi(t_0)$ .

#### Démonstration

$$\dot{P}(t) = \dot{N}(t) M^{-1}(t) + N(t) \frac{d}{dt}[M^{-1}(t)].$$

Mais :  $M(t) M^{-1}(t) = I \Rightarrow M(t) \frac{d}{dt}[M^{-1}(t)] + \dot{M}(t) M^{-1}(t) = 0$ , et donc :

$$\frac{d}{dt}[M^{-1}(t)] = -M^{-1}(t) \dot{M}(t) M^{-1}(t)^{20}. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= [V(t) M(t) + A(t) N(t)] M^{-1}(t) \\ &- N(t) M^{-1}(t) [-A^T(t) M(t) + U(t) N(t)] M^{-1}(t). \text{ Soit :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= V(t) + A(t) P(t) + P(t) A^T(t) - P(t) U(t) P(t) \\ &= A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + V(t) - P(t) C^T(t) W^{-1}(t) C(t) P(t), \text{ et} \\ P(t_0) &= N(t_0) M^{-1}(t_0) = \Pi(t_0) \text{ QED.} \end{aligned}$$

Si, de plus, la matrice  $U(t)$  est régulière {i.e. si  $\det[U(t)] \neq 0$ } la matrice  $M(t)$  vérifie une équation différentielle matricielle linéaire à coefficients variables, avec condition initiale imposée :

$$\begin{aligned} \ddot{M}(t) &= [\dot{U}(t) U^{-1}(t) + U(t) A(t) U^{-1}(t) - A^T(t)] \dot{M}(t) \\ &+ [\dot{U}(t) U^{-1}(t) A^T(t) + U(t) A(t) U^{-1}(t) A^T(t) + U(t) V(t) - \dot{A}^T(t)] M(t). \end{aligned}$$

$$\text{Et alors : } N(t) = U^{-1}(t) [\dot{M}(t) + A^T(t) M(t)].$$

#### Démonstration

Si  $U(t)$  est régulière :  $N(t) = U^{-1}(t) [\dot{M}(t) + A^T(t) M(t)]$ . Alors :

---

20. attention :  $\frac{d}{dt}[M^{-1}(t)] \neq [\frac{dM(t)}{dt}]^{-1}$

$$\begin{aligned}
\ddot{M}(t) &= -\dot{A}^T(t) M(t) - A^T(t) \dot{M}(t) + \dot{U}(t) N(t) + U(t) \dot{N}(t) \\
&= -\dot{A}^T(t) M(t) - A^T(t) \dot{M}(t) + \dot{U}(t) U^{-1}(t) [\dot{M}(t) + A^T(t) M(t)] \\
&+ U(t) \{V(t) M(t) + A(t) U^{-1}(t) [M(t) + A^T(t) M(t)]\} \\
&= [\dot{U}(t) U^{-1}(t) + U(t) A(t) U^{-1}(t) - A^T(t)] \dot{M}(t) \\
&+ [\dot{U}(t) U^{-1}(t) A^T(t) + U(t) A(t) U^{-1}(t) A^T(t) + U(t) V(t) - \dot{A}^T(t)] M(t) \text{ QED.}
\end{aligned}$$

La résolution analytique de cette équation n'est pas, en général, possible.

Si, de plus, la matrice  $V(t)$  est régulière {i.e. si  $\det[V(t)] \neq 0$ } la matrice  $N(t)$  vérifie une équation différentielle matricielle linéaire à coefficients variables, avec condition initiale imposée :

$$\begin{aligned}
\ddot{N}(t) &= [\dot{V}(t) V^{-1}(t) - V(t) A^T(t) V^{-1}(t) + A(t)] \dot{N}(t) \\
&+ [-\dot{V}(t) V^{-1}(t) A(t) + V(t) A^T(t) V^{-1}(t) A(t) + V(t) U(t) + \dot{A}(t)] N(t).
\end{aligned}$$

Et alors :  $M(t) = V^{-1}(t) [\dot{N}(t) - A(t) N(t)]$ .

### Démonstration

Si  $V(t)$  est régulière :  $M(t) = V^{-1}(t) [\dot{N}(t) - A(t) N(t)]$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{N}(t) &= \dot{V}(t) M(t) + V(t) \dot{M}(t) + \dot{A}(t) N(t) + A(t) \dot{N}(t) \\
&= \dot{V}(t) V^{-1}(t) [\dot{N}(t) - A(t) N(t)] \\
&+ V(t) \{-A^T(t) V^{-1}(t) [\dot{N}(t) - A(t) N(t)] + U(t) N(t)\} + \dot{A}(t) N(t) + A(t) \dot{N}(t) \\
&= [\dot{V}(t) V^{-1}(t) - V(t) A^T(t) V^{-1}(t) + A(t)] \dot{N}(t) \\
&+ [-\dot{V}(t) V^{-1}(t) A(t) + V(t) A^T(t) V^{-1}(t) A(t) + V(t) U(t) + \dot{A}(t)] N(t) \text{ QED.}
\end{aligned}$$

La résolution analytique de cette équation n'est pas, en général, possible.

**Remarque :** la matrice  $M^{-T}(t)$  est une matrice *fondamentale* de  $\hat{x}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t)$  i.e. telle que  $\frac{d}{dt} [M^{-T}(t)] = \hat{A}(t) M^{-T}(t)$  et on peut donc choisir  $\psi(t) = M^{-T}(t)$ .

### Démonstration

i)  $\frac{d}{dt} [M^{-T}(t)] = -M^{-T}(t) \dot{M}^T(t) M^{-T}(t)$  et  $\dot{M}(t) = -A^T(t) M(t) + U(t) N(t)$  ;  
par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [M^{-T}(t)] &= -M^{-T}(t) [-M^T(t) A(t) + N^T(t) U(t)] M^{-T}(t) \\
&= A(t) M^{-T}(t) - M^{-T}(t) N^T(t) U(t) M^{-T}(t) = A(t) M^{-T}(t) - P(t) U(t) M^{-T}(t)
\end{aligned}$$

ii)  $\hat{A}(t) M^{-T}(t) = [A(t) - P(t) U(t)] M^{-T}(t) = A(t) M^{-T}(t) - P(t) U(t) M^{-T}(t)$ .

iii) Donc  $\frac{d}{dt} [M^{-T}(t)] = \hat{A}(t) M^{-T}(t)$  et on peut choisir :

$$\Psi(t) = M^{-T}(t) \text{ QED.}$$

Par conséquent  $\Psi(t, \tau) \triangleq \psi(t) \psi^{-1}(\tau) = M^{-T}(t) M^T(\tau)$ .

Et  $\hat{x}(t) = \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau) K(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t M^{-T}(t) M^T(\tau) P(\tau) C^T(\tau) W^{-1}(\tau) d\tau$   
 $= \int_{t_0}^t M^{-T}(t) M^T(\tau) M^{-T}(\tau) N^T(\tau) C^T(\tau) W^{-1}(\tau) d\tau$ . Finalement :

$$\hat{x}(t) = M^{-T}(t) \int_{t_0}^t N^T(\tau) C^T(\tau) W^{-1}(\tau) z(\tau) d\tau.$$

## 5.11 Introduction de l'innovation ou du résiduel

Soit  $\hat{z}(t)$  l'estimateur optimal, au sens des moindres carrés, de  $z(t)$ , connaissant  $z[t_0 t]$ . On a :

$$\hat{z}(t) = C(t) \hat{x}(t).$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} \hat{z}(t) &= m_{z(t)|z[t_0 t]} = m_{C(t)x(t)+w(t)|z[t_0 t]} = C(t) m_{x(t)|z[t_0 t]} + m_{w(t)|z[t_0 t]} \\ &= C(t) \hat{x}(t) \text{ QED.} \end{aligned}$$

**Remarque :** on a donc  $\hat{y}(t) = \hat{z}(t) = C(t) \hat{x}(t)$ .

Et soit  $e(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$  l'erreur de cet estimateur, appelée *innovation* ou *résiduel*. Alors :

$$e(t) = C(t) \tilde{x}(t) + w(t) \text{ (démonstration évidente).}$$

$$\text{Et donc : } \dot{\hat{x}}(t) = A(t) \hat{x}(t) + K(t) e(t).$$

### 5.11.1 Nouveau schéma du processus, de l'observation et de l'estimateur d'état

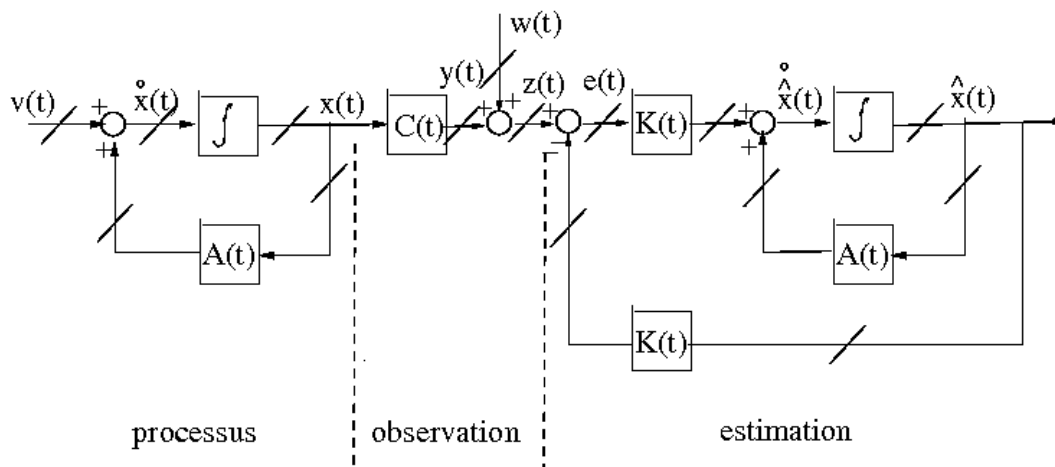


Figure 9. Nouveau schéma du processus, de l'observation et de l'estimateur d'état (les tirets obliques indiquent que les signaux correspondants sont multivariables).

## 5.12 Équations du filtre continu de Kalman

Finalement les équations du filtre continu de Kalman s'écrivent avec l'estimée  $\hat{\xi}(t)$  de l'état  $x(t)$  et la réalisation  $\zeta(t)$  de l'observation  $z(t)$ , sous l'une des deux formes qui suivent. On retrouve bien les équations du chapitre précédent.

### 5.12.1 Première forme

#### Initialisation

$$\hat{\xi}(t_0) = 0 \text{ et } P(t_0) = \Pi(t_0)$$

1) Calcul de  $P(t)$  par résolution de l'équation différentielle de Riccati

$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t)$  avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi(t_0)$ .

2) Calcul du gain de Kalman  $K(t)$

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

3) Calcul de  $\hat{\xi}(t)$  par résolution de l'équation différentielle :

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = A(t)\hat{\xi}(t) + K(t)[\zeta(t) - C(t)\hat{\xi}(t)] \text{ avec la condition initiale } \hat{\xi}(t_0) = 0$$

### 5.12.2 Seconde forme

#### Initialisation

$$\hat{\xi}(t_0) = 0$$

$$P(t_0) = \Pi(t_0)$$

1) Calcul de  $P(t)$  par résolution de l'équation différentielle de Riccati

$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + V(t) - P(t)C^T(t)W^{-1}(t)C(t)P(t)$  avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi(t_0)$ .

2) Calcul du gain de Kalman  $K(t)$

$$K(t) = P(t)C^T(t)W^{-1}(t).$$

3) Calcul de  $\hat{A}(t)$  :

$$\hat{A}(t) = A(t) - K(t)C(t) = A(t) - P(t)U(t)$$

4) Calcul de  $\hat{\xi}(t)$  par résolution de l'équation différentielle :

$$\dot{\hat{\xi}}(t) = \hat{A}(t)\hat{\xi}(t) + K(t)\zeta(t) \text{ avec la condition initiale } \hat{\xi}(t_0) = 0$$

## 5.13 Filtre de Kalman dans le cas *invariant* et *stationnaire*

### 5.13.1 Cas général matriciel

Nous nous plaçons dans le cas où :

*i)* les équations d'état et d'observation sont *invariantes* ; alors les matrices  $A(t)$  et  $C(t)$  sont constantes et respectivement égales à  $A$  (rappel : que l'on suppose stable ou de Hurwitz) et  $C$ ,

*ii)* les bruits d'état et d'observation sont *stationnaires* ; alors les matrices  $V(t)$  et  $W(t)$  sont constantes et respectivement égales à  $V$  et  $W$  (rappel : que l'on suppose définie positive ;  $W > 0$ ).

Alors la matrice  $U(t)$  devient constante et égale à  $U = C^T W^{-1} C$ .

#### 5.13.1.1 Régime transitoire

**Calcul de  $\varphi(t)$  et  $\Phi(t, \tau)$**

Dans ce cas on a  $\varphi(t) = e^{At}$  et  $\Phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau) = e^{A(t-\tau)}$ .

**Calcul de  $x(t)$**

On a vu que l'on peut considérer que  $x(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire et *causal* ayant pour matrice de réponse impulsionnelle :

$$\tilde{\Phi}(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau) = e^{A(t-\tau)} & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} \text{ et pour entrée } v(t).$$

**Remarque :** si l'on pose :

$$\tilde{\varphi}(t) \triangleq \begin{cases} \varphi(t) = e^{At} & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}, \text{ on a } \tilde{\Phi}(t, \tau) = \tilde{\varphi}(t - \tau).$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} v(\tau) d\tau.$$

**Calcul de  $\Pi(t)$**

Dans ce cas on a  $\Pi(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) V \varphi^T(t - \tau) d\tau$  ; alors la matrice  $\Pi(t)$  est constante et égale à  $\Pi$  et, en particulier,  $\Pi(t_0) = \Pi$ .

**Démonstration**

$\Pi(t') = \int_{-\infty}^{t'} \varphi(t' - \tau) V \varphi^T(t' - \tau) d\tau$ . Faisons le changement de variable  $\tau' = \tau + t - t'$ , avec  $t$  et  $t'$  fixés. Alors  $d\tau' = d\tau$  et  $\Pi(t') = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) V \varphi^T(t - \tau) d\tau = \Pi(t)$  QED.



Par conséquent  $\Pi$  vérifie l'équation matricielle algébrique :

$$A\Pi + \Pi A^T + V = 0.$$

Cette équation permet de déterminer  $\Pi$  plus simplement que l'intégrale précédente.

**calcul de  $P(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$P(t)$  vérifie dans ce cas l'équation différentielle matricielle non-linéaire de Riccati, à coefficients constants :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + V - P(t)UP(t); t_0 < t, \text{ avec } P(t_0) = \Pi.$$

On peut ramener la résolution de cette équation à celle d'une seule équation différentielle matricielle linéaire, à coefficients constants. Pour cela on pose :

$P(t) = N(t)M^{-1}(t)$  où les matrices  $M(t)$  et  $N(t)$  sont solutions des équations matricielles suivantes.

i) Si la matrice  $U$  est régulière [i.e.  $\det(U) \neq 0$ ] :

$$\dot{M}(t) = (UAU^{-1} - A^T)\dot{M}(t) + (UAU^{-1}A^T + UV)M(t); t_0 \leq t, \\ \text{avec } M(t_0) = I \text{ et :}$$

$$N(t) = U^{-1}[\dot{M}(t) + A^T M(t)]; t_0 \leq t, \text{ avec } N(t_0) = \Pi.$$

ii) Si la matrice  $V$  est régulière [i.e.  $\det(V) \neq 0$ ] :

$$\dot{N}(t) = (-VA^T V^{-1} + A)\dot{N}(t) + (VA^T V^{-1}A + VU)N(t); t_0 \leq t, \\ \text{avec } N(t_0) = \Pi \text{ et :}$$

$$M(t) = V^{-1}[\dot{N}(t) - AN(t)]; t_0 \leq t, \text{ avec } M(t_0) = I.$$

La résolution analytique des équations précédentes est, en général, très difficile, voire impossible.

**Calcul de  $\Sigma(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$$\Sigma(t) = \Pi - P(t) = \Pi - N(t)M^{-1}(t); t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $K(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$$K(t) = P(t)C^T W^{-1} = N(t)M^{-1}(t)C^T W^{-1}; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $\hat{A}(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$$\hat{A}(t) = A - K(t)C = A - P(t)U = A - N(t)M^{-1}(t)U; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $\psi(t)$  et  $\Psi(t, \tau)$**

$$\psi(t) = M^{-T}(t) \text{ et } \Psi(t, \tau) = M^{-T}(t)M^T(\tau).$$

**Calcul de  $\hat{x}(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$$\hat{x}(t) = M^{-T}(t) \int_{t_0}^t N^T(\tau) C^T W^{-1} z(\tau) d\tau ; t_0 \leq t.$$

**Calcul de certaines covariances et de certaines fonctions d'autocorrélation**

$$R_{vv}(t, \tau) = V \delta(t - \tau).$$

$$R_{ww}(t, \tau) = W \delta(t - \tau).$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)} \Pi & \text{si } \tau \leq t \\ \Pi e^{A^T(\tau-t)} & \text{si } t \leq \tau \end{cases}.$$

$$R_{yy}(t, \tau) = C R_{xx}(t, \tau) C^T = \begin{cases} C e^{A(t-\tau)} \Pi C^T & \text{si } \tau \leq t \\ C \Pi e^{A^T(\tau-t)} C^T & \text{si } t \leq \tau \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} R_{zz}(t, \tau) &= R_{yy}(t, \tau) + R_{ww}(t, \tau) \\ &= \begin{cases} C e^{A(t-\tau)} \Pi C^T + W \delta(t - \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ C \Pi e^{A^T(\tau-t)} C^T + W \delta(t - \tau) & \text{si } t \leq \tau \end{cases}. \end{aligned}$$

On en déduit les fonctions d'autocorrélation :

$$\varphi_{vv}(\tau) \triangleq R_{vv}(t, t - \tau) = V \delta(\tau).$$

$$\varphi_{ww}(\tau) \triangleq R_{ww}(t, t - \tau) = W \delta(\tau).$$

$$\varphi_{xx}(\tau) \triangleq R_{xx}(t, t - \tau) = \begin{cases} e^{A\tau} \Pi & \text{si } 0 < \tau \\ \Pi e^{-A^T \tau} & \text{si } \tau < 0 \end{cases}.$$

$$\varphi_{yy}(\tau) \triangleq R_{yy}(t, t - \tau) = C \varphi_{xx}(\tau) C^T = \begin{cases} C e^{A\tau} \Pi C^T & \text{si } 0 \leq \tau \\ C \Pi e^{-A^T \tau} C^T & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_{zz}(\tau) &\triangleq R_{zz}(t, t - \tau) = \varphi_{yy}(\tau) + \varphi_{ww}(\tau) \\ &= \begin{cases} C e^{A\tau} \Pi C^T + W \delta(\tau) & \text{si } 0 \leq \tau \\ C \Pi e^{-A^T \tau} C^T + W \delta(\tau) & \text{si } \tau \leq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Comme indiqué en Annexe B on constate :

- i) que le signal  $x(t)$  est bien *stationnaire*,
- ii) que le signal  $y(t)$ , qui est proportionnel à  $x(t)$ , est bien *stationnaire*,
- iii) que le signal  $z(t)$ , qui est la somme des signaux *stationnaires*  $y(t)$  et  $w(t)$ , est bien *stationnaire*.

**Matrices**  $\tilde{\Phi}(p)$   $V(p)$   $X(p)$  **et matrice de transfert**  $F(p) \triangleq \frac{Y(p)}{X(p)}$

Soient les transformées de Laplace bilatères (cf. Annexe B) :

$$\tilde{\Phi}(p) \triangleq \mathcal{L}[\tilde{\varphi}(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-pt} dt,$$

$$V(p) \triangleq \mathcal{L}[v(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-pt} dt,$$

$$X(p) \triangleq \mathcal{L}[x(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

$$Y(p) \triangleq \mathcal{L}[y(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-pt} dt.$$

$$\text{Alors } \tilde{\Phi}(p) = (pI - A)^{-1}.$$

### Démonstration

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{At} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(pI-A)t} dt \\ &= -(pI - A)^{-1} [e^{-(pI-A)t}]_{t=0}^{t=\infty} = (pI - A)^{-1} \text{ QED.} \end{aligned}$$

$$\text{Alors (cf. Annexe B) on a } X(p) = \tilde{\Phi}(p) V(p).$$

De plus  $Y(p) = C X(p)$  [démonstration évidente car  $y(t) = C x(t)$ ] et par conséquent :

$$F(p) \triangleq \frac{Y(p)}{X(p)} = C \tilde{\Phi}(p) = C (pI - A)^{-1}.$$

### Calcul de certaines densités spectrales de puissance

Soient les densités spectrales de puissance :

$$\Phi_{vv}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{vv}(\tau)],$$

$$\Phi_{ww}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{ww}(\tau)],$$

$$\Phi_{xx}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{xx}(\tau)],$$

$$\Phi_{yy}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{yy}(\tau)],$$

$$\Phi_{zz}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{zz}(\tau)].$$

Alors :

$$\Phi_{vv}(p) = V$$

$$\Phi_{ww}(p) = W$$

$$\Phi_{xx}(p) = -(pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T}$$

$$\Phi_{yy}(p) = -C (pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T} C^T$$

$$\Phi_{zz}(p) = -C (pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T} C^T + W$$

### Démonstrations

$$\Phi_{vv}(p) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} V \delta(\tau) e^{-p\tau} d\tau = V \text{ QED.}$$

$$\Phi_{ww}(p) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} W \delta(\tau) e^{-p\tau} d\tau = W \text{ QED.}$$

D'après l'annexe B :

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(p) &= \tilde{\Phi}(p) \Phi_{vv}(p) \tilde{\Phi}^T(-p) = (pI - A)^{-1} V (-pI - A)^{-T} \\ &= -(pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T} \text{ QED.} \end{aligned}$$

$$\Phi_{yy}(p) = C \Phi_{xx}(p) C^T = -C (pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T} C^T \text{ QED.}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{zz}(p) &= \Phi_{yy}(p) + \Phi_{ww}(p) \\ &= -C (pI - A)^{-1} V (pI + A)^{-T} C^T + W \text{ QED.} \end{aligned}$$

#### 5.13.1.2 Régime permanent : tendance asymptotique du filtre de Kalman vers le filtre de Wiener et matrices de transfert $\Psi(p)$ et $G(p)$

Soit  $P_{\infty} \triangleq P(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ . Alors  $P_{\infty}$  est solution de l'équation matricielle algébrique de Riccati :

$$A P_{\infty} + P_{\infty} A^T + V - P_{\infty} U P_{\infty} = 0 \text{ et :}$$

$$\Sigma_{\infty} \triangleq \Sigma(\infty) = \Pi - P_{\infty} \text{ et :}$$

$$K_{\infty} \triangleq K(\infty) = P_{\infty} C^T W^{-1} \text{ et :}$$

$$\hat{A}_{\infty} \triangleq \hat{A}(\infty) = A - P_{\infty} U.$$

**Remarque** : il peut exister plusieurs solutions  $P_{\infty}$  semi-définies positives à l'équation matricielle algébrique de Riccati. Se pose alors le problème du choix de l'une des solutions.

En fait :

Si le couple  $\{A, C\}$  est *déTECTABLE* (i.e. si  $\{A^T, C^T\}$  est *stabilisable*) et que le couple  $\{A, V^{\frac{1}{2}}\}$  est *commandable* sur l'axe imaginaire alors l'équation matricielle algébrique de Riccati possède une solution stabilisante  $P_{\infty}$ , i.e. telle que  $\hat{A}_{\infty}$  est stable. De plus  $P_{\infty}$  est unique et semi-définie positive [5]<sup>21</sup>.

Pour garantir une seule solution  $P_{\infty}$  semi-définie positive à l'équation matricielle algébrique de Riccati il faut que le couple  $\{A, V^{\frac{1}{2}}\}$  soit *stabilisable* [5]<sup>22</sup>.

21. p. 642 Th. 16.7.1 et pp. 802-803 Th. E.9.2

22. p. 642 Th 16.7.2 et p. 804 Th. E.9.3

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  l'équation différentielle non-invariante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + K(t) z(t)$$

tend vers l'équation différentielle invariante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_\infty \hat{x}(t) + K_\infty z(t).$$

En prenant la transformée de Laplace bilatère de cette dernière équation (cf. Annexe B) et en négligeant les conditions initiales [13]<sup>23</sup>, avec :

$$\hat{X}(p) \triangleq \mathcal{L}[\hat{x}(t)] \text{ et } Z(p) \triangleq \mathcal{L}[z(t)] \text{ on obtient :}$$

$$(pI - \hat{A}_\infty) \hat{X}(p) = K_\infty Z(p).$$

$$\text{Soit, en posant } \Psi(p) \triangleq (pI - \hat{A}_\infty)^{-1} :$$

$$\hat{X}(p) = \Psi(p) K_\infty Z(p).$$

Le filtre de Wiener permet, par définition, d'obtenir l'estimateur  $\hat{y}(t)$  de  $y(t)$ , au sens des moindres carrés, en fonction des observations  $z[t_0 t[$ .

Comme  $\hat{y}(t) = \hat{z}(t) = C \hat{x}(t)$  la transformée de Laplace bilatère de ces deux équations, avec :

$$\hat{Y}(p) \triangleq \mathcal{L}[\hat{y}(t)] \text{ et } \hat{Z}(p) \triangleq \mathcal{L}[\hat{z}(t)] \text{ donne :}$$

$$\hat{Y}(p) = \hat{Z}(p) = C \Psi(p) K_\infty Z(p).$$

La matrice de transfert du filtre de Wiener est donc :

$$G(p) \triangleq \frac{\hat{Y}(p)}{\hat{Z}(p)} = C \Psi(p) K_\infty.$$

**Remarque** : le filtre de Wiener est présenté, dans le chapitre suivant, dans le cas invariant et stationnaire, pour des observations scalaires.

**Remarque** : on a aussi :

$$G(p) = [1 + C(pI - A)^{-1} K_\infty]^{-1} C(pI - A)^{-1} K_\infty.$$

### Démonstration

D'après le lemme d'inversion matricielle (cf. Annexe A, A-4 Corollaire) on a :

$$[1 + C(pI - A)^{-1} K_\infty]^{-1} = 1 - C(pI - A + K_\infty C)^{-1} K_\infty. \text{ Alors :}$$

---

23. p. 723 : « neglecting initial conditions »

$$\begin{aligned}
& [1 + C(pI - A)^{-1} K_\infty]^{-1} C(pI - A)^{-1} K_\infty \\
&= C(pI - A)^{-1} K_\infty - C(pI - A + K_\infty C)^{-1} K_\infty C(pI - A)^{-1} K_\infty \\
&= C[(pI - A)^{-1} - (pI - A + K_\infty C)^{-1} K_\infty C(pI - A)^{-1}] K_\infty \\
&= C[(pI - A)^{-1} - (pI - A + K_\infty C)^{-1} (pI - A + K_\infty C)(pI - A)^{-1} \\
&\quad + (pI - A + K_\infty C)^{-1} (pI - A)(pI - A)^{-1}] K_\infty \\
&= C(pI - A + K_\infty C)^{-1} K_\infty = C(pI - \hat{A}_\infty)^{-1} K_\infty \text{ QED.}
\end{aligned}$$

### 5.13.1.3 Exemple numérique

Considérons l'exemple numérique suivant :

$$n = 2, p = 1, A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (stable ou de Hurwitz), } C = [1 \quad 1],$$

$V = I, W = 1.$

Alors  $U = C^T W^{-1} C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  est une matrice singulière alors que  $V = I$  est régulière.

$$\text{De plus } -V A^T V^{-1} + A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V A^T V^{-1} + V U = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Régime transitoire**

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \text{ et } \Phi(t, \tau) = \varphi(t-\tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & -2(t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

$\Pi$  est solution de l'équation matricielle algébrique :  $A\Pi + \Pi A^T + V = 0$  ;  
soit :  $\Pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

$P(t)$  est solution de l'équation différentielle matricielle non-linéaire de Riccati, à coefficients variables :  $\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + V - P(t)UP(t)$ , avec la condition initiale  $P(t_0) = \Pi$ .

On pose  $P(t) = N(t)M^{-1}(t)$  et, étant donné que la matrice  $U$  est singulière alors que la matrice  $V$  est régulière, on ramène la résolution de l'équation différentielle précédente à celle de :

$$\ddot{N}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \dot{N}(t) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} N(t), \text{ avec la condition initiale}$$

$N(t_0) = \Pi$  et alors :

$$M(t) = \dot{N}(t) - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} N(t), \text{ avec la condition initiale } M(t_0) = I.$$

$$\text{La résolution donne } N(t) = \begin{bmatrix} n_{11}(t) & n_{12}(t) \\ n_{21}(t) & n_{22}(t) \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
n_{11}(t) &= \frac{\sqrt{3}-1}{4} e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} - \frac{\sqrt{3}+1}{4} e^{\sqrt{3}(t-t_0)} + 2 e^{(t-t_0)} \\
n_{12}(t) &= -\frac{1}{2} e^{(t-t_0)} \\
n_{21}(t) &= \frac{9-5\sqrt{3}}{12} e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + \frac{9+5\sqrt{3}}{12} e^{\sqrt{3}(t-t_0)} - 2 e^{(t-t_0)} \\
n_{22}(t) &= \frac{1}{2} e^{(t-t_0)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Et } M(t) = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
m_{11}(t) &= \frac{3-2\sqrt{3}}{6} e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + \frac{3+2\sqrt{3}}{6} e^{\sqrt{3}(t-t_0)} \\
m_{12}(t) &= 0 \\
m_{21}(t) &= \frac{12-7\sqrt{3}}{6} e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + \frac{12+7\sqrt{3}}{6} e^{\sqrt{3}(t-t_0)} - 4 e^{(t-t_0)} \\
m_{22}(t) &= e^{(t-t_0)}
\end{aligned}$$

$$\text{Alors } P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
p_{11}(t) &= \frac{1}{2} \frac{(9-4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (9+4\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\
p_{12}(t) &= -\frac{1}{2} \\
p_{21}(t) &= -\frac{1}{2} \\
p_{22}(t) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\Sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(t) & \sigma_{12}(t) \\ \sigma_{21}(t) & \sigma_{22}(t) \end{bmatrix}, \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(t) &= -\sqrt{3} \frac{e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} - e^{\sqrt{3}(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\
\sigma_{12}(t) &= 0 \\
\sigma_{21}(t) &= 0 \\
\sigma_{22}(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$K(t) = \begin{bmatrix} k_{11}(t) \\ k_{21}(t) \end{bmatrix}, \text{ avec}$$

$$\begin{aligned}
k_{11}(t) &= \frac{(3-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\
k_{21}(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\widehat{A}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11}(t) & \widehat{a}_{12}(t) \\ \widehat{a}_{21}(t) & \widehat{a}_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{a}_{11}(t) &= -3 \frac{(2-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (2+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\
\widehat{a}_{12}(t) &= -\frac{(9-5\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (9+5\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\
\widehat{a}_{21}(t) &= 0 \\
\widehat{a}_{22}(t) &= -1
\end{aligned}$$

$$\psi(t) = M^{-T}(t) = \begin{bmatrix} \psi_{11}(t) & \psi_{12}(t) \\ \psi_{21}(t) & \psi_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t) &= \frac{6}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\ \psi_{12}(t) &= -\frac{[(12-7\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (12+7\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)} - 24]e^{-(t-t_0)}}{(3-2\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}(t-t_0)} + (3+2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}(t-t_0)}} \\ \psi_{21}(t) &= 0 \\ \psi_{22}(t) &= e^{-(t-t_0)} \end{aligned}$$

$$R_{vv}(t, \tau) = I \delta(t - \tau).$$

$$R_{ww}(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + t - \tau\right) e^{-(t-\tau)} & \left(-\frac{1}{2} - t + \tau\right) e^{-(t-\tau)} \\ -\frac{1}{2} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2} e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \text{ si } \tau \leq t \text{ et } .:$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + \tau - t\right) e^{-(\tau-t)} & -\frac{1}{2} e^{-(\tau-t)} \\ \left(-\frac{1}{2} - \tau + t\right) e^{-(\tau-t)} & \frac{1}{2} e^{-(\tau-t)} \end{bmatrix} \text{ si } t \leq \tau$$

$$R_{yy}(t, \tau) = e^{-|t-\tau|}.$$

$$R_{zz}(t, \tau) = e^{-|t-\tau|} + \delta(t - \tau).$$

On en déduit que :

$$\varphi_{vv}(\tau) = I \delta(\tau).$$

$$\varphi_{ww}(\tau) = \delta(\tau).$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + \tau\right) e^{-\tau} & \left(-\frac{1}{2} + \tau\right) e^{-\tau} \\ -\frac{1}{2} e^{-\tau} & \frac{1}{2} e^{-\tau} \end{bmatrix} \text{ si } 0 \leq \tau \text{ et } .:$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2} + \tau\right) e^{-\tau} & -\frac{1}{2} e^{-\tau} \\ \left(-\frac{1}{2} - \tau\right) e^{-\tau} & \frac{1}{2} e^{-\tau} \end{bmatrix} \text{ si } \tau \leq 0$$

$$\varphi_{yy}(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

$$\varphi_{zz}(\tau) = e^{-|\tau|} + \delta(\tau).$$

$$\tilde{\Phi}(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & -\frac{2}{\frac{p+1^2}{p+1}} \\ 0 & \frac{1}{p+1} \end{bmatrix} \text{ et } F(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & \frac{p-1}{(p+1)^2} \end{bmatrix}.$$

$$\Phi_{vv}(p) = I.$$

$$\Phi_{ww}(p) = 1.$$

$$\Phi_{xx}(p) = - \begin{bmatrix} \frac{p^2-5}{(p^2-1)^2} & \frac{-2}{(p^2-1)(p+1)} \\ \frac{2}{(p^2-1)(p-1)} & \frac{1}{p^2-1} \end{bmatrix}.$$



$$\Phi_{yy}(p) = -\frac{2}{p^2-1}.$$

$$\Phi_{zz}(p) = \frac{p^2-3}{p^2-1}.$$

### Régime permanent

$$P_\infty = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

On peut d'ailleurs obtenir cette matrice directement, plus simplement, par résolution de l'équation matricielle algébrique de Riccati <sup>24</sup> :

$$A P_\infty + P_\infty A^T + V - P_\infty U P_\infty = 0.$$

$$\Sigma_\infty = \begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$K_\infty = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{A}_\infty = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -(\sqrt{3} + 1) \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{(p+1)(p+\sqrt{3})} \begin{bmatrix} p+1 & -(\sqrt{3}+1) \\ 0 & p+3 \end{bmatrix} \text{ et } G(p) = \frac{\sqrt{3}-1}{p+\sqrt{3}}.$$

Voir comparaison avec le filtre de Wiener dans le chapitre suivant.

### 5.13.2 Cas général scalaire

Ce cas correspond à  $n = 1$  et  $p = 1$ ; nous le traitons en détails car les calculs analytiques du filtre sont alors possibles.

Alors :  $A = a$  ( $a < 0$  pour être dans le cas stable),  $C = c$  ( $c \neq 0$ ),  $V = v$  ( $v > 0$ ) et  $W = w$  ( $w > 0$ ). Alors  $U = u = \frac{c^2}{w}$  ( $u > 0$ ) est régulière de même que  $V = v$  ( $v > 0$ ).

De plus :

$$U A U^{-1} - A^T = 0, U A U^{-1} A^T + U V = \lambda^2, \\ -V A^T V^{-1} + A = 0 \text{ et } V A^T V^{-1} A + V U = \lambda^2.$$

$$\text{De plus posons } \lambda \triangleq \sqrt{\frac{a^2 w + c^2 v}{w}}.$$

---

24. On choisit la seule solution définie positive

### 5.13.2.1 Régime transitoire

**Calcul de  $\varphi(t)$  et  $\Phi(t, \tau)$**

Dans ce cas on a  $\varphi(t) = e^{at}$  et  $\Phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau) = e^{a(t-\tau)}$ .

**Calcul de  $x(t)$**

On a vu que l'on peut considérer que  $x(t)$  est la sortie d'un filtre linéaire et *causal* ayant pour fonction de réponse impulsionnelle :

$$\tilde{\Phi}(t, \tau) = \begin{cases} \Phi(t, \tau) = \varphi(t - \tau) = e^{a(t-\tau)} & \text{si } \tau < t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases} \text{ et pour entrée } v(t).$$

**Remarque :** si l'on pose :

$$\tilde{\varphi}(t) \triangleq \begin{cases} \varphi(t) = e^{at} & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \text{ on a } \tilde{\Phi}(t, \tau) = \tilde{\varphi}(t - \tau).$$

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} d\tau.$$

**Calcul de  $\Pi(t)$**

Dans ce cas on a  $\Pi(t) = \int_{-\infty}^t v \varphi^2(t - \tau) d\tau = v \int_{-\infty}^t e^{2a(t-\tau)} d\tau = -\frac{v}{2a}$

Alors la fonction  $\Pi(t)$  est constante et égale à  $\pi = -\frac{v}{2a}$  et, en particulier,  $\Pi(t_0) = \pi = -\frac{v}{2a}$ .

**Remarque :**  $\pi$  vérifie l'équation algébrique :

$$2a\pi + v = 0.$$

Cette équation permet de déterminer  $\pi$  plus simplement que l'intégrale précédente :  $\pi = -\frac{v}{2a}$

**calcul de  $P(t)$  ;  $t_0 \leq t$**

$P(t)$  vérifie dans ce cas l'équation différentielle non-linéaire de Riccati, à coefficients constants :

$$\dot{P}(t) = 2aP(t) + v - uP^2(t); t_0 \leq t, \text{ avec } P(t_0) = \pi = -\frac{v}{2a}.$$

On peut ramener la résolution de cette équation à celle d'une seule équation différentielle scalaire linéaire, à coefficients constants. Pour cela on pose :

$P(t) = \frac{N(t)}{M(t)}$  où les fonctions  $M(t)$  et  $N(t)$  sont solutions des équations suivantes :

$$\ddot{M}(t) = \lambda^2 M(t); t_0 \leq t, \text{ avec } M(t_0) = 1 \text{ et :}$$

$$N(t) = \frac{w}{c^2} [\dot{M}(t) + aM(t)]; t_0 \leq t, \text{ avec } N(t_0) = \pi = -\frac{v}{2a},$$

ou :

$$\dot{N}(t) = \lambda^2 N(t); t_0 \leq t, \text{ avec } N(t_0) = \pi = -\frac{v}{2a} \text{ et :}$$

$$M(t) = \frac{1}{v} [\dot{N}(t) - a N(t)]; t_0 \leq t, \text{ avec } M(t_0) = 1.$$

On trouve :

$$M(t) = -\frac{1}{4a\lambda} [(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}]; t_0 \leq t,$$

$$N(t) = -\frac{v}{4a\lambda} [(\lambda - a) e^{\lambda(t-t_0)} + (\lambda + a) e^{-\lambda(t-t_0)}]; t_0 \leq t,$$

$$P(t) = v \frac{(\lambda - a) e^{\lambda(t-t_0)} + (\lambda + a) e^{-\lambda(t-t_0)}}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $\Sigma(t)$ ;  $t_0 \leq t$**

$$\Sigma(t) = \pi - P(t) = -\frac{c^2 v^2}{2aw} \cdot \frac{e^{\lambda(t-t_0)} - e^{-\lambda(t-t_0)}}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $K(t)$ ;  $t_0 \leq t$**

$$K(t) = \frac{c}{w} P(t) = \frac{cv}{w} \cdot \frac{(\lambda - a) e^{\lambda(t-t_0)} + (\lambda + a) e^{-\lambda(t-t_0)}}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $\hat{A}(t)$ ;  $t_0 \leq t$**

$$\hat{A}(t) = a - cK(t) = a - \frac{c^2}{w} P(t) = -\lambda \frac{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} + (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}; t_0 \leq t.$$

**Calcul de  $\psi(t)$  et  $\Psi(t, \tau)$**

On peut choisir :

$$\psi(t) = \frac{1}{M(t)} = \frac{-4a\lambda}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}} \text{ et :}$$

$$\Psi(t, \tau) = \frac{M(\tau)}{M(t)} = \frac{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(\tau-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(\tau-t_0)}}{(\lambda - a)^2 e^{\lambda(t-t_0)} - (\lambda + a)^2 e^{-\lambda(t-t_0)}}.$$

**Calcul de certaines covariances et de certaines fonctions d'autocorrélation**

$$R_{vv}(t, \tau) = v \delta(t - \tau).$$

$$R_{ww}(t, \tau) = w \delta(t - \tau).$$

$$R_{xx}(t, \tau) = -\frac{v}{2a} e^{a|t-\tau|}.$$

$$R_{yy}(t, \tau) = -\frac{c^2 v}{2a} e^{a|t-\tau|}.$$

$$R_{zz}(t, \tau) = -\frac{c^2 v}{2a} e^{a|t-\tau|} + w \delta(t - \tau).$$

On en déduit les fonctions d'autocorrélation :

$$\varphi_{vv}(\tau) = v \delta(\tau).$$

$$\varphi_{ww}(\tau) = w \delta(\tau).$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = -\frac{v}{2a} e^{a|\tau|}.$$

$$\varphi_{yy}(\tau) = -\frac{c^2 v}{2a} e^{a|\tau|}.$$

$$\varphi_{zz}(\tau) = -\frac{c^2 v}{2a} e^{a|\tau|} + w \delta(\tau).$$

**Calcul de  $\tilde{\Phi}(p)$  et de  $F(p)$**

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{1}{p-a}.$$

$$F(p) = \frac{c}{p-a},$$

**Calcul de certaines densités spectrales de puissance**

$$\Phi_{vv}(p) = v.$$

$$\Phi_{ww}(p) = w.$$

$$\Phi_{xx}(p) = -\frac{v}{p^2-a^2}.$$

$$\Phi_{yy}(p) = -\frac{c^2 v}{p^2-a^2}$$

$$\Phi_{zz}(p) = w \frac{p^2-\lambda^2}{p^2-a^2}$$

### 5.13.2.2 Régime permanent : tendance asymptotique du filtre de Kalman vers le filtre de Wiener et fonctions de transfert $\Psi(p)$ et $G(p)$

$$P_\infty = \frac{v}{\lambda-a} = \frac{w(\lambda+a)}{c^2} \quad (P_\infty > 0).$$

$$\Sigma_\infty = -\frac{v(\lambda+a)}{2a(\lambda-a)} = -\frac{w(\lambda+a)^2}{2ac^2} \quad (\Sigma_\infty > 0).$$

$$K_\infty = \frac{cv}{w(\lambda-a)} = \frac{\lambda+a}{c}.$$

$$\hat{A}_\infty = -\lambda \quad (\hat{A}_\infty < 0).$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  l'équation différentielle non-invariante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) \hat{x}(t) + K(t) z(t)$$

tend vers l'équation différentielle invariante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}_\infty \hat{x}(t) + K_\infty z(t) = -\lambda \hat{x}(t) + \frac{\lambda+a}{c} z(t).$$

**Calcul de  $\Psi(p)$  et de  $G(p)$**

$$\Psi(p) = \frac{1}{p+\lambda} \text{ et :}$$

$$G(p) = \frac{\lambda+a}{p+\lambda}$$

Voir comparaison avec le filtre de Wiener dans le chapitre suivant.

### 5.13.2.3 Exemple numérique

$a = -1, c = 1, v = 1, w = 1$ . Alors  $u = 1$  et  $\lambda = \sqrt{2}$ .

$$\varphi(t) = e^{-t} \text{ et } \Phi(t, \tau) = e^{-(t-\tau)}.$$

$$\Pi(t) = \pi = \frac{1}{2} \text{ et donc } \Pi(t_0) = \frac{1}{2}.$$

$$P(t) = \frac{(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}{(3+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}; t_0 \leq t; P(t_0) = \pi = \frac{1}{2}.$$

$$\Sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}{(3+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}; t_0 \leq t; \Sigma(t_0) = 0.$$

$$K(t) = \frac{(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}{(3+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}; t_0 \leq t; K(t_0) = \frac{1}{2}.$$

$$\widehat{A}(t) = -\sqrt{2} \frac{(3+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} + (3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}{(3+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (3-2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}; t_0 \leq t; \widehat{A}(t_0) = -\frac{3}{2}.$$

$$\psi(t) = \frac{1}{M(t)} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2 e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (\sqrt{2}-1)^2 e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}} \text{ et :}$$

$$\Psi(t, \tau) = \frac{M(\tau)}{M(t)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 e^{\sqrt{2}(\tau-t_0)} - (\sqrt{2}-1)^2 e^{-\sqrt{2}(\tau-t_0)}}{(\sqrt{2}+1)^2 e^{\sqrt{2}(t-t_0)} - (\sqrt{2}-1)^2 e^{-\sqrt{2}(t-t_0)}}.$$

$$R_{vv}(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

$$R_{ww}(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

$$R_{xx}(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-|t-\tau|}.$$

$$R_{yy}(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-|t-\tau|}.$$

$$R_{zz}(t, \tau) = \frac{1}{2} e^{-|t-\tau|} + \delta(t - \tau).$$

On en déduit les fonctions d'autocorrélation :

$$\varphi_{vv}(\tau) = \delta(\tau).$$

$$\varphi_{ww}(\tau) = \delta(\tau).$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}.$$

$$\varphi_{yy}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}.$$

$$\varphi_{zz}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|} + \delta(\tau).$$

$$\widetilde{\Phi}(p) = \frac{1}{p+1}.$$

$$F(p) = \frac{1}{p+1},$$

$$\Phi_{vv}(p) = 1.$$

$$\Phi_{ww}(p) = 1.$$

$$\Phi_{xx}(p) = -\frac{1}{p^2-1}.$$

$$\Phi_{yy}(p) = -\frac{1}{p^2-1}$$

$$\Phi_{zz}(p) = \frac{p^2-2}{p^2-1}$$

$$P_\infty = \sqrt{2} - 1 \quad (P_\infty > 0).$$

$$\Sigma_\infty = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \quad (\Sigma_\infty > 0).$$

$$K_\infty = \sqrt{2} - 1.$$

$$\hat{A}_\infty = -\sqrt{2} \quad (\hat{A}_\infty < 0).$$

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  l'équation différentielle non-invariante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + K(t)z(t)$$

$$\Psi(p) = \frac{1}{p+\sqrt{2}} \text{ et :}$$

$$G(p) = \frac{\sqrt{2}-1}{p+\sqrt{2}}$$

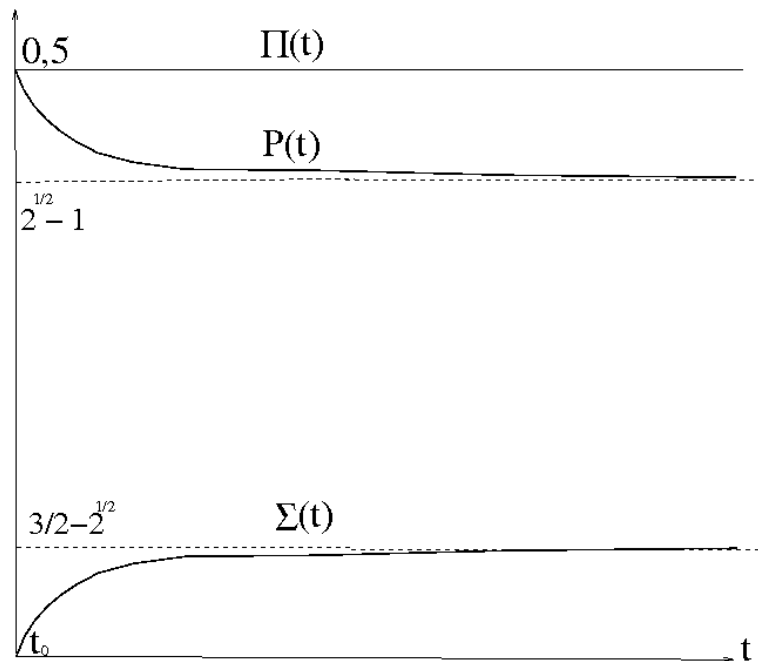


Figure 10. Allure de l'évolution des autocovariances  $\Pi(t)$ ,  $P(t)$  et  $\Sigma(t)$  en fonction du temps.

Voir comparaison avec le filtre de Wiener dans le chapitre suivant.



# Chapitre 6

## Filtre de Wiener pour des signaux *scalaires, invariants* et *stationnaires*

Nous n'examinons que le cas de l'estimation (i. e. du filtrage) et non ceux du lissage ou de la prédiction [5]<sup>1</sup> [23]<sup>2</sup> pour des signaux *scalaires*<sup>3</sup> et *stationnaires* et des systèmes *invariants*. La présentation faite est largement inspirée de celle de P. Lefèvre [11].

### 6.1 Définitions

Soient  $y(t)$  et  $z(t)$  deux signaux *aléatoires* scalaires centrés tels que  $\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$  est un signal vectoriel *stationnaire*, de dimension 2.

$\varphi_{yy}(\tau) \triangleq R_{yy}(t, t - \tau) \triangleq E\{y(t)y(t - \tau)\}$  fonction d'autocorrélation de  $y(t)$ , supposée connue [fonction paire :  $\varphi_{yy}(-\tau) = \varphi_{yy}(\tau)$ ].

$\varphi_{zz}(\tau) \triangleq R_{zz}(t, t - \tau) \triangleq E\{z(t)z(t - \tau)\}$  fonction d'autocorrélation de  $z(t)$ , supposée connue [fonction paire :  $\varphi_{zz}(-\tau) = \varphi_{zz}(\tau)$ ].

$\varphi_{yz}(\tau) \triangleq R_{yz}(t, t - \tau) \triangleq E\{y(t)z(t - \tau)\}$  fonction d'intercorrélacion de  $y(t)$  et  $z(t)$ , supposée connue [ $\varphi_{zy}(-\tau) = \varphi_{yz}(\tau)$ ].

On suppose  $y(t)$  non disponible et  $z(t)$  disponible.

---

1. Chapitre 7. pp. 221-264

2. <http://en.wikipedia.org/wiki/Wiener-filter>

3. la présentation doit pouvoir être étendue à des signaux *vectoriels*



## 6.2 Problème à résoudre

Soit un filtre *causal*, de réponse impulsionnelle  $g(t)$  dont la réponse  $\hat{y}(t)$  est un estimateur de  $y(t)$  connaissant le signal *causal*  $z[t_0 t[$  (cf. définition dans le chapitre : Filtre continu de Kalman). Et soit  $\tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \hat{y}(t)$  l'erreur de cet estimateur.

$$\text{Alors } \hat{y}(t) \triangleq \int_{t_0}^t g(t - \tau) z(\tau) d\tau \triangleq \int_0^{t-t_0} g(\tau) z(t - \tau) d\tau.$$

Mais le signal  $z$  étant causal on a  $z(t) = 0$ ;  $t < t_0$ . Et par conséquent :

$$\hat{y}(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) z(t - \tau) d\tau.$$

De plus le filtre étant causal, afin d'être réalisable, est tel que :  $g(t) = 0$ ;  $t < 0$ . Et par conséquent

$$\hat{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) z(t - \tau) d\tau.$$

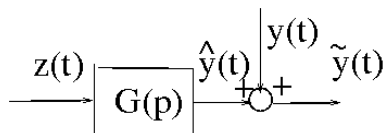


Figure 11. Schéma de l'estimation avec un filtre causal.

**Remarque :** l'intérêt d'étendre ainsi les limites d'intégrations à  $-\infty$  et  $\infty$  sera de permettre de prendre les transformées de Laplace bilatères  $\mathcal{L}$  des équations temporelles.

Le filtre de Wiener, de réponse impulsionnelle  $g_0(t)$ , est le filtre causal qui conduit au meilleur estimateur  $\hat{y}_0(t)$  de  $y(t)$  – au sens des moindres carrés –, avec :

$$\hat{y}_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(t - \tau) z(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau) z(t - \tau) d\tau.$$

Il s'agit donc de déterminer la réponse impulsionnelle  $g_0(t)$  du filtre qui minimise le critère quadratique scalaire :

$$Q \triangleq E\{\tilde{y}^2(t)\}.$$

## 6.3 Détermination, dans le domaine temporel, du filtre de Wiener

### 6.3.1 Calcul du critère

$$Q = E\{[y(t) - \hat{y}(t)]^2\} = E\{y^2(t)\} - 2E\{y(t)\hat{y}(t)\} + E\{\hat{y}^2(t)\}.$$

### 6.3.1.1 Calcul de $E\{y^2(t)\}$

$$E\{y^2(t)\} = \varphi_{yy}(0).$$

### 6.3.1.2 Calcul de $E\{y(t)\hat{y}(t)\}$

$$\begin{aligned} E\{y(t)\hat{y}(t)\} &= E\left\{y(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) z(t-\tau) d\tau\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) E\{y(t) z(t-\tau)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \varphi_{yz}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

### 6.3.1.3 Calcul de $E\{\hat{y}^2(t)\}$

$$\begin{aligned} E\{\hat{y}^2(t)\} &= E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) z(t-\tau) d\tau\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) z(t-\sigma) d\sigma\right]\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) g(\sigma) E\{z(t-\tau) z(t-\sigma)\} d\tau d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma\right] d\tau \end{aligned}$$

### 6.3.1.4 Calcul de $Q$

$$Q = \varphi_{yy}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \varphi_{yz}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma\right] d\tau.$$

## 6.3.2 Minimisation de $Q$

Soit  $g_0(t)$  qui conduit au critère minimum  $Q_0$  et  $g(t) = g_0(t) + \eta \delta g(t)$ ;  $\eta \in \mathbb{R}$  qui conduit au critère  $Q = Q_0 + \delta Q$ , où, bien entendu, la réponse impulsionnelle  $\delta g(t)$  doit être causale afin que la réponse impulsionnelle  $g(t)$  le soit; ce qui impose :  $\delta g(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

On peut écrire :

$$\begin{aligned} Q_0 + \delta Q &= \varphi_{yy}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} [g_0(\tau) + \eta \delta g(\tau)] \varphi_{yz}(\tau) d\tau \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} [g_0(\tau) + \eta \delta g(\tau)] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [g_0(\sigma) + \eta \delta g(\sigma)] \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma \right\} d\tau \\ &= \varphi_{yy}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau) \varphi_{yz}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma \right] d\tau \\ &- 2\eta \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \varphi_{yz}(\tau) d\tau + \eta \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma \right] d\tau \\ &+ \eta \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma \right] d\tau \\ &+ \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\sigma-\tau) d\sigma \right] d\tau \\ &= Q_0 + 2\eta \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau-\sigma) d\sigma \right] d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \varphi_{yz}(\tau) d\tau \right\} \\ &+ \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau-\sigma) d\sigma \right] d\tau, \text{ car la fonction } \varphi_{zz} \text{ est paire.} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta Q &= 2\eta \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau-\sigma) d\sigma - \varphi_{yz}(\tau) \right] d\tau \\ &+ \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau-\sigma) d\sigma \right] d\tau. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \delta Q}{\partial \eta} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma - \varphi_{yz}(\tau) \right] d\tau \\ + 2 \eta \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma \right] d\tau.$$

Et :

$$\frac{\partial^2 \delta Q}{\partial \eta^2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma \right] d\tau, \text{ indépendant de } \eta.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que  $g_0(t)$  conduise à un minimum (au moins local)  $Q_0$  de  $Q$  est que :

$$\left[ \frac{\partial \delta Q}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} = 0 \text{ et } \left[ \frac{\partial^2 \delta Q}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0} > 0.$$

La première condition entraîne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma - \varphi_{yz}(\tau) \right] d\tau = 0. \text{ Soit :}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma - \varphi_{yz}(\tau) \right] d\tau = 0; \forall \delta g(\tau). \text{ Et par conséquent :}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma = \varphi_{yz}(\tau); \forall \tau \geq 0}.$$

Il s'agit de l'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf dont la solution conduit à la fonction  $g_0(t)$  cherchée.

Pour démontrer que la seconde condition est effectivement réalisée considérons un filtre fictif de réponse impulsionnelle  $\delta g(t)$  soumis à l'entrée  $z(t)$ . Sa sortie  $s(t)$  est telle que :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) z(t - \tau) d\tau. \text{ Alors :}$$

$$E\{s^2(t)\} = E\left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) z(t - \tau) d\tau \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) z(t - \sigma) d\sigma \right] \right\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \delta g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma \right] d\tau \text{ car la fonction } \varphi_{zz} \text{ est paire.}$$

$$\text{Alors } \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \delta Q}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta Q}{\partial \eta^2} = E\{s^2(t)\} > 0 \text{ QED.}$$

### 6.3.3 Résolution de l'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf

À partir de maintenant nous notons, afin d'alléger l'écriture,  $g$  la réponse impulsionnelle du filtre de Wiener [et non plus  $g_0$ ].

Pour déterminer cette réponse impulsionnelle il faut résoudre l'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma = \varphi_{yz}(\tau) = 0; \tau \geq 0}.$$

$$\text{Posons } \lambda(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma) \varphi_{zz}(\tau - \sigma) d\sigma - \varphi_{yz}(\tau).$$

L'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf s'écrit  $\lambda(\tau) = 0; \tau \geq 0$ . La fonction  $\lambda$  est donc *anticausale*.

### 6.3.4 Fonction de transfert du filtre de Wiener

En fait nous allons déterminer la fonction de transfert du filtre de Wiener i.e. la transformée de Laplace bilatère  $G(p)$  (cf. Annexe B) de sa réponse impulsionnelle  $g(\tau)$  :

$$G(p) \triangleq \mathcal{L}[g(t)].$$

La solution de l'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf sera alors donnée par :

$$g(t) \triangleq \mathcal{L}^{-1}[G(p)].$$

#### 6.3.4.1 Densités spectrales de puissance

Soient (cf. Annexe B) :

$\Phi_{yy}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{yy}(t)]$  la densité spectrale de puissance du signal aléatoire  $y(t)$  (fonction paire) et :

$$\Phi_{yz}(p) \triangleq \mathcal{L}[\varphi_{yz}(t)].$$

Factorisons la densité spectrale de puissance  $\Phi_{zz}(p)$  par rapport à l'axe imaginaire. Cela consiste à décomposer cette densité en deux facteurs :

$$\Phi_{zz}(p) = \Phi_{zz}^+(p) \Phi_{zz}^-(p),$$

tels que les pôles et les zéros de  $\Phi_{zz}^+(p)$  sont situés dans le demi-plan complexe gauche et les pôles et les zéros de  $\Phi_{zz}^-(p)$  sont situés dans le demi-plan complexe droit.

De plus, puisque la densité spectrale de puissance  $\Phi_{zz}(p)$  est une fonction paire on a :

$$\Phi_{zz}^+(p) = \Phi_{zz}^-(-p).$$

#### 6.3.4.2 Transformée de Laplace bilatère de l'équation intégrale stationnaire de Wiener-Hopf

Soit  $\Lambda(p) \triangleq \mathcal{L}[\lambda(t)]$  la transformée de Laplace bilatère de la fonction *anticausale*  $\lambda(t)$ . On a :

$$\Lambda(p) = G(p) \Phi_{zz}(p) - \Phi_{yz}(p).$$

La théorie des systèmes nous indique que  $\Lambda(p)$  a tous ses pôles dans le demi-plan complexe droit.

On en déduit que :

$$\frac{\Lambda(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} = G_0(p) \Phi_{zz}^+(p) - \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)}$$

a tous ces pôles dans le demi-plan complexe droit.

On observe que tous les pôles de  $G(p) \Phi_{zz}^+(p)$  sont situés dans le demi-plan complexe gauche alors que ceux de  $\frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)}$  sont répartis dans les deux demi-plans complexes. Décomposons alors cette dernière fraction sous la forme :

$$\frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} = \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_+ + \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_-,$$

telle que tous les pôles de  $\left[ \right]_+$  sont situés dans le demi-plan complexe gauche et tous les pôles de  $\left[ \right]_-$  sont situés dans le demi-plan complexe droit.

Cette décomposition revient à calculer les pôles de  $\frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)}$  puis à effectuer une décomposition en éléments simples, suivie d'un regroupement convenable des divers termes.

On obtient donc :

$$\frac{\Lambda(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} + \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_- = G(p) \Phi_{zz}^+(p) - \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_+.$$

Le premier membre a tous ses pôles dans le demi-plan complexe droit et le second dans le demi-plan complexe gauche ; on en conclut que ces deux membres sont nuls. Il vient alors :

$$\boxed{G(p) = \frac{1}{\Phi_{zz}^+(p)} \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_+}.$$

Et :

$$\Lambda(p) = -\Phi_{zz}^-(p) \left[ \frac{\Phi_{yz}(p)}{\Phi_{zz}^-(p)} \right]_-.$$

### 6.3.5 Cas particulier où le signal disponible $z(t)$ est une observation bruitée du signal non disponible $y(t)$

Dans ce cas le signal disponible  $z(t)$  est une observation bruitée du signal non disponible  $y(t)$ , telle que :

$$z(t) = y(t) + w(t) \text{ où } w(t) \text{ est un bruit } \textit{stationnaire}.$$

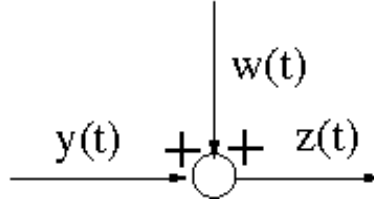


Figure 12. Observation bruitée.

Dans ce cas on a :

$$\Phi_{yz}(p) = \Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) \text{ et :}$$

$$\Phi_{zz}(p) = \Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p).$$

Alors :

$$G(p) = \frac{1}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^+} \left[ \frac{\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^-} \right]_+$$

Et :

$$\Lambda(p) = -[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^- \left[ \frac{\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^-} \right]_-.$$

### Démonstrations

$$\begin{aligned} \varphi_{yz}(\tau) &= \text{cov}\{y(t), z(t - \tau)\} = \text{cov}\{y(t), y(t - \tau) + w(t - \tau)\} \\ &= \text{cov}\{y(t), y(t - \tau)\} + \text{cov}\{y(t), w(t - \tau)\} = \varphi_{yy}(\tau) + \varphi_{yw}(\tau) \text{ et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{zz}(\tau) &= \text{cov}\{z(t), z(t - \tau)\} = \text{cov}\{y(t) + w(t), y(t - \tau) + w(t - \tau)\} \\ &= \text{cov}\{y(t), y(t - \tau)\} + \text{cov}\{y(t), w(t - \tau)\} \\ &+ \text{cov}\{w(t), y(t - \tau)\} + \text{cov}\{w(t), w(t - \tau)\} \\ &= \varphi_{yy}(\tau) + \varphi_{yw}(\tau) + \varphi_{wy}(\tau) + \varphi_{ww}(\tau). \end{aligned}$$

En prenant les transformées de Laplace bilatères des deux équations précédentes on obtient :

$$\Phi_{yz}(p) = \Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) \text{ et :}$$

$$\Phi_{zz}(p) = \Phi_{yy}(p) + \Phi_{yw}(p) + \Phi_{wy}(p) + \Phi_{ww}(p) \text{ et on en déduit } G(p) \text{ QED.}$$

#### 6.3.5.1 Sous-cas particulier où $y(t)$ et $w(t)$ ne sont pas corrélés

Dans ce sous-cas :  $\varphi_{yw}(\tau) = \varphi_{wy}(\tau) = 0$  et donc  $\Phi_{yw}(p) = \Phi_{wy}(p) = 0$  et on en déduit :

$$G(p) = \frac{1}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^+} \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^-} \right]_+.$$

Et :

$$\Lambda(p) = -[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^- \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + \Phi_{ww}(p)]^-} \right]_-.$$

*Sous-sous-cas particulier où  $w(t)$  est gaussien*

Dans ce sous-sous-cas  $\varphi_{ww}(\tau) = W \delta(\tau)$  et donc  $\Phi(p) = W$  et alors :

$$G(p) = \frac{1}{[\Phi_{yy}(p) + W]^+} \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_+$$

Et :

$$\Lambda(p) = -[\Phi_{yy}(p)W(p)]^- \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_-.$$

**Remarque** : si  $W = 1$  on montre que [5]<sup>4</sup> :

$$G(p) = 1 - \frac{1}{[\Phi_{yy}(p) + W]^+}.$$

## 6.4 Exemple 1

Reprenons l'exemple matriciel numérique du chapitre précédent mais pour lequel les signaux  $y(t)$  et  $z(t)$  sont scalaires. On est dans le sous-sous cas particulier précédent avec :

$$\Phi_{yy}(p) = \frac{2}{1-p^2} \text{ et } W = 1.$$

Par conséquent

$$\Phi_{yy}(p) + W = \frac{3-p^2}{1-p^2} = \frac{p-\sqrt{3}}{p-1} \cdot \frac{p+\sqrt{3}}{p+1}.$$

Par conséquent :

$$[\Phi_{yy}(p) + W]^+ = \frac{p+\sqrt{3}}{p+1} \text{ et } [\Phi_{yy}(p) + W]^- = \frac{p-\sqrt{3}}{p-1},$$

$$\frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} = \frac{-2}{(p+1)(p-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{p+1} - \frac{\sqrt{3}-1}{p-\sqrt{3}}.$$

On en déduit que :

$$\left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_+ = \frac{\sqrt{3}-1}{p+1} \text{ et } \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_- = -\frac{\sqrt{3}-1}{p-\sqrt{3}}.$$

Et finalement :

$$G(p) = \frac{1}{[\Phi_{yy}(p) + W]^+} \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_+ = \frac{\sqrt{3}-1}{p+\sqrt{3}}$$

et

$$\Lambda(p) = -[\Phi_{yy}(p) + W]^- \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p) + W]^-} \right]_- = \frac{\sqrt{3}-1}{p-1}.$$

---

4. p. 264

**Remarque** : comme  $W = 1$  on a aussi :

$$G(p) = 1 - \frac{1}{[\Phi_{yy}(p)+W]^+} = 1 - \frac{p+1}{p+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{p+\sqrt{3}}.$$

On retrouve bien la même fonction de transfert  $G(p)$  que dans l'exemple matriciel numérique du chapitre précédent.

## 6.5 Exemple 2

Reprenons le cas général scalaire du chapitre précédent. On est dans le sous-sous cas particulier précédent avec :

$$\Phi_{yy}(p) = -\frac{c^2 v}{p^2 - a^2} \text{ et } W = w.$$

$$\text{Par conséquent : } \Phi_{yy}(p) + W = \frac{w(p^2 - \lambda^2)}{p^2 - a^2} = \frac{\sqrt{w}(p+\lambda)}{p-a} \cdot \frac{\sqrt{w}(p-\lambda)}{p+a}.$$

Par conséquent :

$$[\Phi_{yy}(p) + W]^+ = \frac{\sqrt{w}(p+\lambda)}{p-a} \text{ et } [\Phi_{yy}(p) + W]^- = \frac{\sqrt{w}(p-\lambda)}{p+a} \text{ (car rappel } a < 0 \text{ et } \lambda > 0),$$

$$\frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p)+W]^-} = -\frac{c^2 v}{\sqrt{w}(p-a)(p-\lambda)} = -\frac{c^2 v}{\sqrt{w}(\lambda-a)} \left[ \frac{1}{p-\lambda} - \frac{1}{p-a} \right].$$

On en déduit que :

$$\left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p)+W]^-} \right]_+ = \frac{c^2 v}{\sqrt{w}(\lambda-a)} \cdot \frac{1}{p-a} \text{ et } \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p)+W]^-} \right]_- = -\frac{c^2 v}{\sqrt{w}(\lambda-a)} \cdot \frac{1}{p-\lambda}.$$

$$\text{Et finalement : } G(p) = \frac{1}{[\Phi_{yy}(p)+W]^+} \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p)+W]^-} \right]_+ = \frac{\lambda+a}{p+\lambda} \text{ et :}$$

$$\Lambda(p) = -[\Phi_{yy}(p) + W]^- \left[ \frac{\Phi_{yy}(p)}{[\Phi_{yy}(p)+W]^-} \right]_- = \frac{w(\lambda+a)}{p+a}.$$

On retrouve bien la même fonction de transfert  $G(p)$  que dans le cas scalaire général du chapitre précédent.

*Exemple numérique du chapitre précédent*

$$a = -1, c = 1, w = 1, \text{ alors } \lambda = 1$$

$$G(p) = \frac{\sqrt{2}-1}{p+\sqrt{2}} \text{ et } \Lambda(p) = \frac{\sqrt{2}-1}{p-}$$

**Remarque** : comme  $w = 1$  on a aussi :

$$G(p) = 1 - \frac{1}{[\Phi_{yy}(p)+W]^+} = 1 - \frac{p+1}{p-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{p+\sqrt{2}}.$$

On retrouve bien la même fonction de transfert  $G(p)$  que dans l'exemple scalaire numérique du chapitre précédent.





## Annexe A : lemme d'inversion matricielle<sup>[10]<sup>5</sup> [13]<sup>6</sup></sup>

Soient  $A, B, C, D$  quatre matrices de dimensions convenables telles que  $A$  et  $D$  sont carrées.

**A-1** Si les matrices carrées  $A$  et  $D - C A^{-1} B$  sont inversibles on a :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} E &= A^{-1} + A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} \\ F &= -A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} \\ G &= -(D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} \\ H &= (D - C A^{-1} B)^{-1}. \end{aligned}$$

### Démonstration

Il suffit de vérifier que :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I$$

**A-2** Si les matrices  $D$  et  $A - B D^{-1} C$  sont inversibles on a :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} K &= (A - B D^{-1} C)^{-1} \\ L &= -(A - B D^{-1} C)^{-1} B D^{-1} \\ M &= -D^{-1} C (A - B D^{-1} C)^{-1} \\ N &= D^{-1} + D^{-1} C (A - B D^{-1} C)^{-1} B D^{-1} \end{aligned}$$

### Démonstration

Il suffit de vérifier que :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = I$$

**A-3** Si les matrices  $A, D$  et  $D - C A^{-1} B$  sont inversibles alors  $A - B D^{-1} C$  est inversible et on a :

---

5. Proposition 2.8.7 p. 44

6. éq. 5-28

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K & L \\ G & H \end{bmatrix}$$

### Démonstration

Les matrices  $A$  et  $D - C A^{-1} B$  étant inversibles la matrice  $E$  précédente existe. La matrice  $D$  étant inversible la matrice  $A - B D^{-1} C$  existe et son inverse  $K$  existe également car  $K = E$  QED.

### A-4 Corollaire : lemme d'inversion matricielle

si les matrices  $A$ ,  $D$  et  $D - C A^{-1} B$  sont inversibles alors  $A - B D^{-1} C$  est inversible et  $K = E$  soit :

$$(A - B D^{-1} C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1} B (D - C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1}.$$

En particulier si  $P$ , d'ordre  $n$  et  $W$ , d'ordre  $p$ , sont définies positives ( $P > 0$  et  $W > 0$ ) elles sont inversibles et les matrices  $W + C P C^T$  et  $P^{-1} + C^T W^{-1} C$ , où  $C$  est une matrice de dimension  $p \times n$  quelconque, sont définies positives ( $W + C P C^T > 0$  et  $P^{-1} + C^T W^{-1} C > 0$ ) donc inversibles et le lemme d'inversion s'écrit, avec  $A = P^{-1}$ ,  $B = C^T$  et  $D = -W$  :

$$(P^{-1} + C^T W^{-1} C)^{-1} = P - P C^T (W + C P C^T)^{-1} C P.$$

### Démonstration

1) Soit  $z$  une matrice colonne, de dimension  $p \times 1$ , *non nulle* et  $x = C^T z$ , matrice colonne *quelconque*, de dimension  $n \times 1$ . Alors :

$z^T (W + C P C^T) z = z^T W z + x^T P x > 0$  car  $z^T W z > 0$  et  $x^T P x \geq 0$ .  
Donc  $W + C P C^T > 0$  QED.

2) Les matrices  $P^{-1}$  et  $W^{-1}$  sont évidemment également définies positives ( $P^{-1} > 0$  et  $W^{-1} > 0$ ). Soit  $x$  une matrice colonne, de dimension  $p \times 1$ , *non nulle* et  $z = C x$ , matrice colonne *quelconque*, de dimension  $n \times 1$ . Alors :

$x^T (P^{-1} + C^T W^{-1} C) x = x^T P^{-1} x + z^T W^{-1} z > 0$  car  $x^T P^{-1} x > 0$  et  $z^T W^{-1} z \geq 0$ . Donc  $P^{-1} + C^T W^{-1} C > 0$  QED.

## Annexe B

Considérons le système *linéaire* de matrice de réponse impulsionnelle  $\tilde{L}(t, \tau)$ , de dimension  $n_a \times n_b$ , ayant pour entrée le signal  $b(t)$ , de dimension  $n_b$  et pour sortie le signal  $a(t)$ , de dimension  $n_a$  :

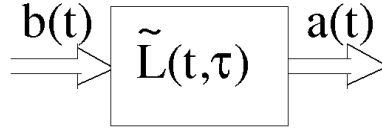


Figure 13. Filtre linéaire de matrice de réponse impulsionnelle  $\tilde{L}(t, \tau)$  .

$$\text{Alors } a(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(t, \tau) b(\tau) d\tau.$$

Supposons que  $b(t)$  est un signal *aléatoire* et *centré* [ $m_{b(t)} = 0$ ]. Alors  $a(t)$  est également un signal *aléatoire* et *centré* car :

$$m_{a(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(t, \tau) m_{b(\tau)} d\tau = 0.$$

Soient  $R_{aa}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{a(t), a(\tau)\}$ ,  $R_{ab}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{a(t), b(\tau)\}$  et  $R_{bb}(t, \tau) \triangleq \text{cov}\{b(t), b(\tau)\}$  ; alors :

$$R_{aa}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(t, \sigma) R_{bb}(\sigma, \rho) \tilde{L}^T(\tau, \rho) d\sigma d\rho \text{ et :}$$

$$R_{ab}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(t, \sigma) R_{bb}(\sigma, \tau) d\sigma.$$

### Démonstrations

Elles sont quasiment évidentes en écrivant  $a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(t, \sigma) b(\sigma) d\sigma$  et  $a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}(\tau, \rho) b(\rho) d\rho$  QED.

### Cas où le système linéaire est *causal*

Dans ce cas on a, par définition [2]<sup>7</sup> :

$$\tilde{L}(t, \tau) = \begin{cases} L(t, \tau) & \text{si } \tau \leq t \\ 0 & \text{si } t < \tau \end{cases}.$$

On suppose que l'application matricielle, de dimension  $n_a \times n_b$  :  
 $L : (t, \tau) \mapsto L(t, \tau)$  est continuellement différentiable ;  $\forall t ; \forall \tau$  et on constate que l'application matricielle, de dimension  $n_a \times n_b$  :  
 $\tilde{L} : (t, \tau) \mapsto \tilde{L}(t, \tau)$  n'est pas continue. Alors :

---

7. p. 76

$$a(t) = \int_{-\infty}^t L(t, \tau) b(\tau) d\tau.$$

Si, de plus,  $b(t) = 0$ ;  $t < t_0$  on a :

$$a(t) = \int_{t_0}^t L(t, \tau) b(\tau) d\tau.$$

### Cas où le système linéaire est *invariant*

Lorsque le système linéaire est *invariant* on a  $\tilde{L}(t, \tau) \triangleq \tilde{l}(t - \tau)$  et  $a(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \tau) b(\tau) d\tau \triangleq (\tilde{l} * b)(t)$  (où  $*$  désigne la *convolution*). Alors :

$$R_{aa}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \sigma) R_{bb}(\sigma, \rho) \tilde{l}^T(\tau - \rho) d\sigma d\rho \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) R_{bb}(t - \sigma, \tau - \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho \text{ et :}$$

$$R_{ab}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \sigma) R_{bb}(\sigma, \tau) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) R_{bb}(t - \sigma, \tau) d\sigma.$$

### Démonstrations

$$R_{aa}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \sigma) R_{bb}(\sigma, \rho) \tilde{l}^T(\tau - \rho) d\sigma d\rho \text{ et :}$$

$$R_{ab}(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \sigma) R_{bb}(\sigma, \tau) d\sigma.$$

Si on pose  $\sigma' = t - \sigma$ , avec  $t$  fixé; soit  $d\sigma' = -d\sigma$  et  $\rho' = \tau - \rho$ , avec  $\tau$  fixé; soit  $d\rho' = -d\rho$  on obtient bien les relations indiquées à condition de supprimer les primes QED.

On peut alors prendre la transformée de Laplace bilatère  $\mathcal{L}$  des signaux  $\tilde{l}(t)$ ,  $a(t)$  et  $b(t)$  ( $p$  désigne la variable de Laplace) :

$$\tilde{L}(p) \triangleq \mathcal{L}[\tilde{l}(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t) e^{-pt} dt, \text{ matrice de dimension } n_a \times n_b, \\ A(p) \triangleq \mathcal{L}[a(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-pt} dt, \text{ matrice de dimension } n_a \times 1, \\ B(p) \triangleq \mathcal{L}[b(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} b(t) e^{-pt} dt, \text{ matrice de dimension } n_b \times n_b.$$

$$\text{Alors } A(p) = \mathcal{L}[(\tilde{l} * b)(t)] = \tilde{L}(p) B(p).$$

### Démonstration

$$A(p) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \tau) b(\tau) d\tau] e^{-pt} dt \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(t - \tau) e^{-pt} dt] b(\tau) d\tau.$$

Posons  $\sigma = t - \tau$ , avec  $\tau$  fixé; soit  $d\sigma = dt$ . Alors :

$$A(p) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) e^{-p(\sigma+\tau)} d\sigma] b(\tau) d\tau \\ = [\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma] [\int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) e^{-p\tau} d\tau] = \tilde{L}(p) B(p) \text{ QED.}$$

### Cas où, de plus, le signal $b(t)$ est *stationnaire*

Soit alors  $\varphi_{bb}(\tau) \triangleq R_{bb}(t, t - \tau)$  la fonction (vectorielle) *d'autocorrélation*

du signal  $b(t)$ . Alors le signal  $a(t)$  est également stationnaire et sa fonction d'autocorrélation  $\varphi_{aa}(\tau) \triangleq R_{aa}(t, t - \tau)$  est :

$$\varphi_{aa}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma + \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho.$$

De plus  $\varphi_{ab}(\tau) \triangleq R_{ab}(t, t - \tau)$  la fonction (vectorielle) *d'intercorrélacion* des signaux  $a(t)$  et  $b(t)$  est :

$$\varphi_{ab}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma) d\sigma = (\tilde{l} * \varphi_{bb})(\tau).$$

### Démonstrations

$R_{aa}(t, t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) R_{bb}(t - \sigma, t - \tau - \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma + \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho$  ne dépend que de  $\tau$ , donc le signal  $a(t)$  est stationnaire QED et :

$$\varphi_{aa}(\tau) \triangleq R_{aa}(t, t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma + \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho \text{ QED.}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \varphi_{ab}(\tau) &\triangleq R_{ab}(t, t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) R_{bb}(t - \sigma, t - \tau) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\tau - \sigma) \varphi_{bb}(\sigma) d\sigma = (\tilde{l} * \varphi_{bb})(\tau) \text{ QED.} \end{aligned}$$

Soient :

$$\begin{aligned} \Phi_{aa}(p) &\triangleq \mathcal{L}[\varphi_{aa}(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{aa}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ \Phi_{ab}(p) &\triangleq \mathcal{L}[\varphi_{ab}(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ab}(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \\ \Phi_{bb}(p) &\triangleq \mathcal{L}[\varphi_{bb}(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{bb}(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \end{aligned}$$

les *densités spectrales de puissance*. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi_{aa}(p) &= \tilde{L}(p) \Phi_{bb}(p) \tilde{L}^T(-p) \text{ et :} \\ \Phi_{ab}(p) &= \tilde{L}(p) \Phi_{bb}(p). \end{aligned}$$

### Démonstrations

$$\begin{aligned} \Phi_{aa}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{aa}(\tau) e^{-p\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) \varphi_{bb}(\tau - \sigma + \rho) \tilde{l}^T(\rho) d\sigma d\rho \right] e^{-p\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Soit  $\mu = \tau - \sigma + \rho$ , avec  $\sigma$  et  $\rho$  fixés ; alors  $d\mu = d\tau$  et :

$$\begin{aligned} \Phi_{aa}(p) &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}(\sigma) e^{-p\sigma} d\sigma \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{bb}(\mu) e^{-p\mu} d\mu \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{l}^T(\rho) e^{p\rho} d\rho \right] \\ &= \tilde{L}(p) \Phi_{bb}(p) \tilde{L}^T(-p) \text{ QED,} \end{aligned}$$

et :

$$\Phi_{ab}(p) = \mathcal{L}[\varphi_{ab}(\tau)] = \mathcal{L}[(\tilde{l} * \varphi_{bb})(\tau)] = \tilde{L}(p) \Phi_{bb}(p) \text{ QED.}$$



# Bibliographie

- [1] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics. Theory, facts and formulas with application to linear systems theory*. Princeton University Press. Princeton et Oxford. 2005.
- [2] C-T. Chen. *Linear system theory and design*. Holt, Rinehard and Winston, Inc. Orlando, Floride. 1984.
- [3] D. Declerq, A. Quinquis. *Le signal déterministe*. Éditions Hermes, Paris, 1996.
- [4] D. Declerq, A. Quinquis. *Le signal aléatoire*. Éditions Hermes, Paris, 1996.
- [5] T. K. Kailath, A. H. Sayed, B. Hassibi. *Linear estimation* Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey. 2000.
- [6] R. E. Kalman. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 82D, pp. 35-45. Mars 1960.
- [7] R. E. Kalman, J. E. Bertram. *Control system analysis design via the “second method” of Lyapunov I. Continuous-time systems*. Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 82D, pp. 371-393. 1960.
- [8] R. E. Kalman, R. S. Bucy. *New results in linear filtering and prediction theory*. Trans. ASME, J. Basic Eng., Series 83D, pp. 95-108. Mars 1961.
- [9] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM) by the Mathematical Society of Japan*. 2nd edition. The MIT Press. Cambridge, Massachussets. Londres, Angleterre. 1960.
- [10] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics. Theory, facts and formulas with application to linear systems theory*. Princeton University Press. Princeton et Oxford. 2005.
- [11] P. Lefèvre. *Optimalisation quadratique des systèmes linéaires. Tome 1* École Supérieure d’Électricité. No. 2102. 1967.
- [12] F. L. Lewis, L. Xie, D. Popa. *Optimal and robust estimation with an introduction to stochastic control theory*. CRC Press. Boca Raton. London. New-York. 2007.



- [13] P. S. Maybeck. *Stochastic models, estimation and control. Volume 1.* Academic Press. New-York. San Francisco. London. 1979.
- [14] J. L. Melsa, D. L. Cohn. *Decision and estimation theory.* Mc Graw-Hill. New-York. 1978.
- [15] J. M. Mendel. *Lessons in estimation theory for signal processing, communications and control.* Prentice Hall PTR. Englewood Cliffs, New Jersey 07632. 1995.
- [16] M. Najim. *Modélisation, estimation et filtrage optimal en traitement du signal.* Lavoisier. Paris. 2006.
- [17] A. Papoulis. *Probability, random variables and stochastic processus,* McGraw-Hill. New-York. 1965.
- [18] B. Picinbono. *Introduction à l'étude des phénomènes aléatoires. Maîtrise d'électronique, d'électrotechnique et d'automatique. C2 - signaux et systèmes.* Dunod. Paris. 1968.
- [19] B. Picinbono. *Signaux aléatoires. Bases du traitement statistique du signal avec problèmes résolus. Tome 3.* Dunod. Paris. 1995.
- [20] S. M. Ross. *Initiation aux probabilités.* Presses polytechniques et universitaires romandes. 2007.
- [21] H. L. Van Trees. *Detection, estimation, and modulator theory. Part 1.* John Wiley and sons, Inc. New-York. Chichester. Weinheim. Brisbane. Singapore. Toronto. 2001.
- [22] E. W. Weisstein. *CRC Concise encyclopedia of mathematics.* CRC Press. Boca Raton. London. New York. Washington D.C.. 1999.
- [23] Wikipedia *Encyclopédie en ligne*