

Opérations et transformations mathématiques en traitement du signal déterministe

Marc Renaud

▶ **To cite this version:**

Marc Renaud. Opérations et transformations mathématiques en traitement du signal déterministe. Rapport LAAS n° 12126. 2012, 163p. hal-01523423

HAL Id: hal-01523423
https://laas.hal.science/hal-01523423

Submitted on 16 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Opérations et transformations mathématiques en traitement du signal déterministe

Marc RENAUD
LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse, France
LAAS-CNRS 7 avenue du Colonel Roche
31077 Toulouse Cedex 4 - France
e-mail : renaud@laas.fr

1 Introduction

Le but de ce rapport de recherche est de présenter, *avec des notations unifiées*, les principales *opérations* et *transformations* mathématiques utilisées en traitement du signal déterministe.

Les signaux sont des *fonctions* ou des *distributions* du temps. Dans le premier cas ils sont considérés en *temps continu* et dans le second en *temps discret*.

Les opérations considérées ici concernent les signaux et leurs transformées. Il s'agit, outre de l'addition et de la multiplication, des *convolutions linéaires* et *circulaires*, dans les domaines *temporel*, *fréquentiel* ou *complexe*.

D'autre opérations, qui concernent plus particulièrement les signaux aléatoires, telle la corrélation par exemple, ont été volontairement omises.

Il existe, en mathématiques, un très grand nombre de transformations : linéaires, conformes, orthogonales, univoques, etc. Celles qui sont considérées ici sont *linéaires* ; *continues* pour les signaux en *temps continu* et *discrètes* pour les signaux en *temps discret*.

Les transformations continues sont *intégrales* et *infinies* et les transformations discrètes sont leurs *versions discrétisées*. Elles établissent, pour la plupart, un passage entre les domaines temporel et fréquentiel ou complexe et ont été établies par les mathématiciens des siècles passés dans un souci de simplification des calculs. C'est la raison pour laquelle les transformations

discrètes sont souvent utilisées dans les procédures de calcul les plus rapides des ordinateurs numériques actuels.

Il existe en fait un très grand nombre de telles transformations dont les définitions et les noms varient selon les auteurs. En conséquence il est difficile d'en présenter une synthèse exhaustive. Nous avons choisi d'exposer les plus importantes à nos yeux en insistant plus particulièrement sur les transformations :

- de Fourier et Laplace, dans le cas continu,
- en z et de Fourier discrète, dans le cas discret.

Afin de donner une idée assez complète des diverses transformations continues intégrales et infinies et de leurs versions discrétisées, présentées dans la littérature, nous avons indiqué en deux annexes les têtes de chapitre des deux ouvrages les plus complets en la matière, à notre connaissance : ceux de A. I. Zayed [41] et de A. D. Poularikas [27].

En ce qui concerne les signaux en *temps discret* nous avons choisi, dans un souci de simplicité, de ne pas utiliser la théorie des distributions, qui pourtant s'imposerait. Nous avons considéré les *distributions* comme limites de suites de *fonctions*. Cette façon de procéder permet d'obtenir de manière correcte les diverses transformées des signaux en *temps discret*. Cependant elle ne permet pas d'expliquer clairement les diverses transformées de la pseudo-fonction $Pf(\frac{1}{t})$, qui est une également distribution et pour laquelle nous serons obligés d'admettre certains résultats.

Nous présentons dans ce rapport les transformations directes et inverses et indiquons dans quelles conditions la transformation inverse est l'inverse de la transformation directe. Cependant nous n'avons fait qu'évoquer les difficiles conditions de régularité – telles la condition de variation bornée – qui conduisent aux formules de réciprocité entre ces transformations directes et inverse et nous n'avons, très souvent, qu'indiqué des références pour les démonstrations de ces formules. Il faut signaler toutefois que ces conditions sont en général réalisées pour les signaux que l'on rencontre en pratique.

Les diverses transformées de très nombreux exemples sont données dans ce rapport, mais faute de place toutes les démonstrations ne sont pas indiquées.

2 Définitions

2.1 Notations

t temps : $t \in \mathbb{R}$ (en s)
i nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ $[mod(2\,\pi)]$: $i^2 = -1$
$c = a + i\,b$ nombre complexe quelconque : $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{C}$
$c^* = a - i\,b$ nombre complexe conjugé de c : $c^* \in \mathbb{C}$
$c_R = a$ partie réelle de c : $a \in \mathbb{R}$
$c_I = b$ partie imaginaire de c : $b \in \mathbb{R}$
$p = \sigma + i\,\omega$ variable de Laplace : $p \in \mathbb{C}$
$\sigma = p_R$ partie réelle de p : $\sigma \in \mathbb{R}$
$\omega = p_I$ partie imaginaire de p : pulsation $\omega \in \mathbb{R}$ (en $rd.s^{-1}$) $[\omega = 2\,\pi\,\nu]$
ν fréquence : $\nu \in \mathbb{R}$ (en Hz) $[\nu = \frac{\omega}{2\,\pi}]$
$s = \varsigma + i\,\varpi$ autre variable de Laplace : $s \in \mathbb{C}$
$\varsigma = s_R$ partie réelle de s : $\varsigma \in \mathbb{R}$
$\varpi = s_I$ partie imaginaire de s : autre pulsation $\varpi \in \mathbb{R}$ (en $rd.s^{-1}$) $[\varpi = 2\,\pi\,\mu]$
μ autre fréquence : $\mu \in \mathbb{R}$ (en Hz) $[\mu = \frac{\varpi}{2\,\pi}]$
Δ période d'échantillonnage : $\Delta \in \mathbb{R}$ (en s)
$\nu_e = \frac{1}{\Delta}$ fréquence d'échantillonnage : $\nu_e \in \mathbb{R}$ (en Hz) $[\nu_e = \frac{\omega_e}{2\,\pi}]$
$\omega_e = \frac{2\,\pi}{\Delta}$ pulsation d'echantillonnage : $\omega_e \in \mathbb{R}$ (en $rd.s^{-1}$) $[\omega_e = 2\,\pi\,\nu_e]$
$\theta = \Delta\,\omega = 2\,\pi\,\Delta\,\nu$: $\theta \in \mathbb{R}$ angle (en rd) et $\varphi = \Delta\,\varpi = 2\,\pi\,\Delta\,\mu$ $\varpi \in \mathbb{R}$ autre angle (en rd)
$\rho = e^{\Delta\,\sigma}$ $(\rho > 0)$ et $r = e^{\Delta\,\varsigma}$ $(r > 0)$
$z = e^{\Delta\,p} = e^{\Delta\,\sigma}\,e^{i\,\Delta\,\omega} = \rho\,e^{i\,\theta}$: $z \in \mathbb{C}$ et $\zeta = e^{\Delta\,s} = e^{\Delta\,\varsigma}\,e^{i\,\Delta\,\varpi} = r\,e^{i\,\varphi}$: $\zeta \in \mathbb{C}$
T période d'une fonction périodique. On pose $T = N\,\Delta$; avec $N \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{T}$ fréquence d'une fonction périodique(en Hz)
$\Omega = \frac{2\,\pi}{T}$ pulsation fondamentale d'une fonction périodique, de période T (en $rd.s^{-1}$)
$N = \frac{T}{\Delta} \in \mathbb{N}$ (car on a supposé Δ diviseur de T)
$\omega_N = e^{-\frac{2\,\pi\,i}{N}}$ racine $N^{ème}$ de l'unité
k, l, m, n, q, r indices entiers relatifs utilisés dans les domaines temporel et/ou fréquentiel.
$m \in [0\ 1[$ utilisé pour la transformation en z modifiée

Remarque : dans ce rapport nous avons choisi de faire intervenir la fréquence ν de préférence à la pulsation ω.

2.2 Transformations et transformées

2.2.1 Transformations et transformées continues

Transformations et transformées directes

TFD : Transformation de Fourier Directe : $\mathcal{F}$ et $\widehat{h} = \mathcal{F}\, h$: transformée de Fourier directe de h.

$TFCD$: Transformation de Fourier en Cosinus Directe : $\mathcal{F}$ et $\widehat{h_p} = \mathcal{F}\, h_p$: transformée de Fourier en cosinus directe de h_p.

$TFSD$: Transformation de Fourier en Sinus Directe : $i\,\mathcal{F}$ et $i\,\widehat{h_i} = i\,\mathcal{F}\, h_i$: transformée de Fourier en sinus directe de h_i.

$THarD$: Transformation de Hartley Directe : $\mathcal{H}_{ar}$ et $\mathcal{H}_{ar}\, h$: transformée de Hartley directe de h.

$THanD$: Transformation de Hankel Directe : $\mathcal{H}_{an}$ et $\mathcal{H}_{an}\, h$: transformée de Hankel directe de h.

TLD : Transformation de Laplace Directe : $\mathcal{L}$ et $\widetilde{h} = \mathcal{L}\, h$: transformée de Laplace directe de h.

TMD : Transformation de Mellin Directe : $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}\, h$: transformée de Mellin directe de h.

TCD : Transformation de Carson Directe : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}\, h$: transformée de Carson directe de h.

TGD : Transformation de Gabor Directe : G_ψ et $G_\psi\, h$: transformée de Gabor directe de h.

TOD : Transformation en Ondelettes Directe : W_ψ et $W_\psi\, h$: transformée en ondelettes directe de h.

$TzMD$: Transformation en z Modifiée Directe : $\mathcal{Z}_{mod}$ et $\mathrm{H}_{mod} = \mathcal{Z}_{mod}\, h$: transformée en z modifiée directe de h.

Transformations et transformées inverses

TFI : Transformation de Fourier Inverse : $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{g} = \overline{\mathcal{F}}\, g$: transformée de Fourier inverse de g.

$TFCI$: Transformation de Fourier en Cosinus Inverse : $\overline{\mathcal{F}}$ et $\overline{g_p} = \overline{\mathcal{F}}\, g_p$: transformée de Fourier en cosinus inverse de g_p.

$TFSI$: Transformation de Fourier en Sinus Inverse : $-i\,\overline{\mathcal{F}}$ et $-i\,\overline{g_i} = -i\,\overline{\mathcal{F}}\, g_i$: transformée de Fourier en sinus inverse de g_i.

$THarI$: Transformation de Hartley Inverse : $\mathcal{H}_{ar}$ (donc la $THarI$ est identique à la $THarD$) et $\mathcal{H}_{ar}\, g$: transformée de Hartley inverse de g.

$THanI$: Transformation de Hankel Inverse : $\mathcal{H}_{an}$ (donc la $THanI$ est identique à la $THanD$) et $\mathcal{H}_{an}\, g$: transformée de Hankel inverse de g.

TLI : Transformation de Laplace Inverse : $\overline{\mathcal{L}}$ et $\overline{\mathcal{L}}\, G$: transformée de Laplace inverse de G.

TMI : Transformation de Mellin Inverse : $\overline{\mathcal{M}}$ et $\overline{\mathcal{M}}\,G$: transformée de Mellin inverse de G.

TCI : Transformation de Carson Inverse : $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}\,G$: transformée de Carson inverse de G.

TGI : Transformation de Gabor Inverse : $\overline{G_\psi}$ et $\overline{G_\psi}\,A$: transformée de Gabor inverse de A.

TOI : Transformation en Ondelettes Inverse : $\overline{W_\psi}$ et $\overline{W_\psi}\,B$: transformée en ondelettes inverse de B.

$TzMI$: Transformation en z Modifiée Inverse : $\overline{\mathcal{Z}_{mod}}$ et $\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod}$: transformée en z modifiée inverse de G_{mod}.

2.2.2 Transformations et transformées discrètes

Transformations et transformées directes

TzD : Transformation en z Directe : $\mathcal{Z}$ et $\mathrm{H} = \mathcal{Z}\,h_e$: transformée en z Directe de h_e.

TwD : Transformation en w Directe : $\mathcal{W}$ et $\mathscr{H} = \mathcal{W}\,h_e$: transformée en w Directe de h_e.

$TFDD$: Transformation de Fourier Discrète Directe et $H_r\,;\,r = 0,\,\ldots,\,N-1$ transformées de Fourier discrètes directes de $k_k\,;\,k = 0,\,\ldots,\,N-1$.

$TCDD$: Transformation en Cosinus Discrète Directe et $\eta_r\,;\,r = 0,\,\ldots,\,N-1$ transformées en cosinus discrètes directes de $k_k\,;\,k = 0,\,\ldots,\,N-1$.

Transformations et transformées inverses

TzI : Transformation en z Inverse : $\overline{\mathcal{Z}}$ et $\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G}$: transformée en z inverse de G.

TwI : transformation en w Inverse : $\overline{\mathcal{W}}$ et $\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G}$: transformée en w inverse de $\mathscr{G}$.

$TFDI$: Transformation de Fourier Discrète Inverse et $h_k\,;\,k = 0,\,\ldots,\,N-1$ transformées de Fourier discrètes inverses de $H_r\,;\,r = 0,\,\ldots,\,N-1$.

$TCDI$: Transformation en Cosinus Discrète Inverse et $h_k\,;\,k = 0,\,\ldots,\,N-1$ transformées en cosinus discrètes inverses de $\eta_r\,;\,r = 0,\,\ldots,\,N-1$.

Toutes ces transformations sont *linéaires*.

3 Signaux

On pourra consulter [27] [1].

Les signaux sont des fonctions complexes, en *temps continu* ($t \in \mathbb{R}$) ou en *temps discret* ($t_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}$). On parle respectivement de *signal en temps continu* [26] [2] [24] [3] ou de *signal en temps discret* [23] [26] [4] [24] [5] [25].

3.1 Définitions

Un signal est *causal* ssi [6] il est nul pour $t < 0$ ou $t_k < 0$.
Un signal est *strictement causal* ssi il est nul pour $t \leqslant 0$ ou $t_k \leqslant 0$.
Un signal est *anticausal* ssi il est nul pour $t > 0$ ou $t_k > 0$.
Un signal est *strictement anticausal* ssi il est nul pour $t \geqslant 0$ ou $t_k \geqslant 0$.

3.2 Signaux en *temps continu*

Soit h un signal en *temps continu* ; alors $h(t) \in \mathbb{C}$. On pose :

$h(t) = h_R(t) + i\, h_I(t)$; avec $h_R(t) \in \mathbb{R}$ et $h_I(t) \in \mathbb{R}$,

Et soient les deux signaux en *temps continu* tels que :

$h_p(t) \triangleq \frac{1}{2}\,[h(t) + h(-t)]$, signal en *temps continu pair* et
$h_i(t) \triangleq \frac{1}{2}\,[h(t) - h(-t)]$, signal en *temps continu impair*. Alors :

$h(t) = h_p(t) + h_i(t)$ et $h(-t) = h_p(t) - h_i(t)$.

On pose également :

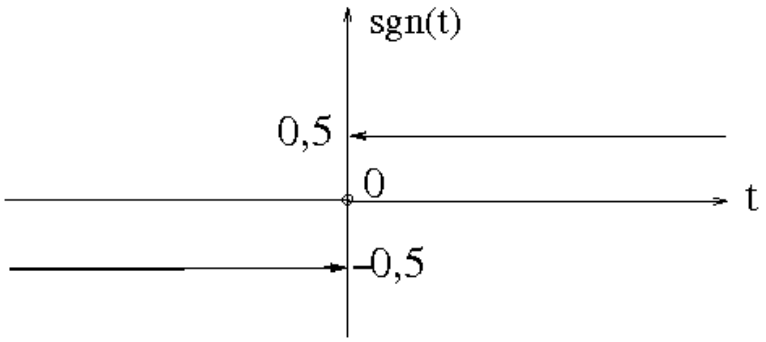
$h_p(t) = h_{pR}(t) + i\, h_{pI}(t)$; avec $h_{pR}(t) \in \mathbb{R}$ et $h_{pI}(t) \in \mathbb{R}$,
$h_i(t) = h_{iR}(t) + i\, h_{iI}(t)$; avec $h_{iR}(t) \in \mathbb{R}$ et $h_{iI}(t) \in \mathbb{R}$ et donc :

$h_R(t) = h_{pR}(t) + h_{iR}(t)$ et $h_I(t) = h_{pI}(t) + h_{iI}(t)$.

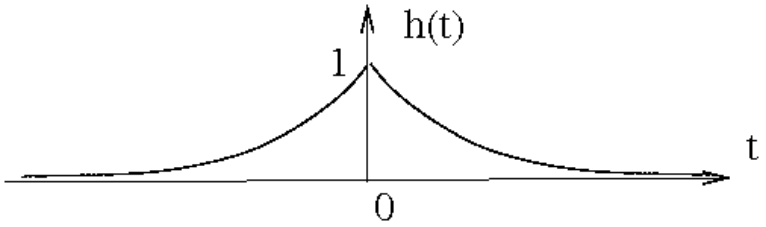
Fonction sgn : c'est le signal en *temps continu* tel que :

$$\mathrm{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t \end{cases} .$$

1. 1. A. D. Poularikas pp. 1-94
2. § 1.2 pp. 12-25
3. § 2.3 pp. 17-25
4. § 1.1 pp. 4-12
5. § 2.4 pp. 26-35
6. ssi signifie si et seulement si

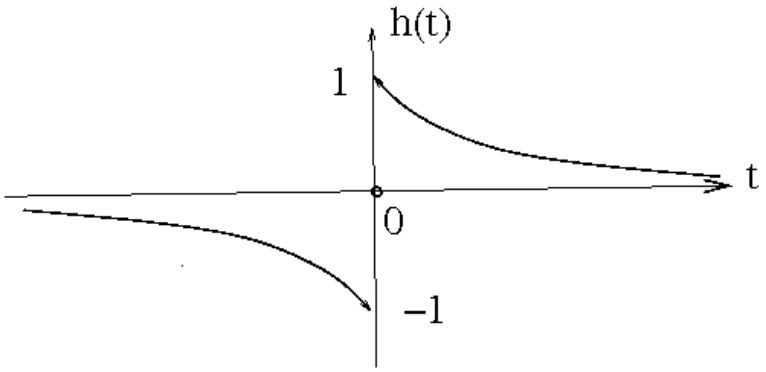


Exemple 1 : $h(t) = e^{-a\,|t|}$ $(a > 0)$ (h fonction *paire*).



Remarques : h est *continu* donc $\frac{1}{2}\,[h(t-0) + h(t+0)] = h(t)$,
$h_p = h$ est *continu* donc $\frac{1}{2}\,[h_p(t-0) + h_p(t+0)] = h_p(t)$,
$h_i = 0$ est *continu* donc $\frac{1}{2}\,[h_i(t-0) + h_i(t+0)] = h_i(t) = 0$.

Exemple 5 : $h(t) = \mathrm{sgn}(t)\, e^{-a\,|t|}$ $(a > 0)$ (h fonction *impaire*).

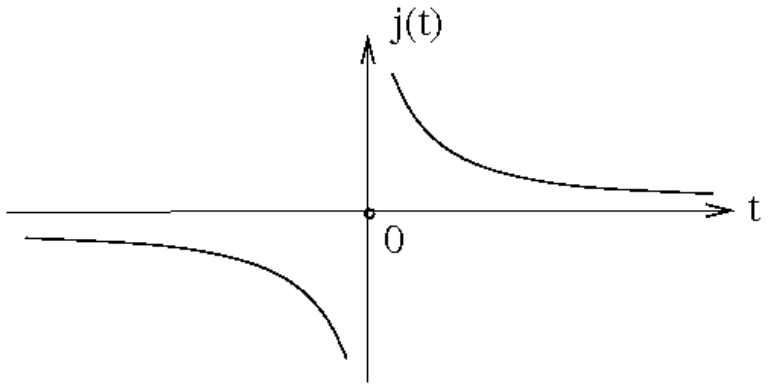


Remarques : h n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[h(t-0) + h(t+0)] = h(t)$,
$h_p = 0$ n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[h_p(t-0) + h_p(t+0)] = h_p(t) = 0$,
$h_i = h$ n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[h_i(t-0) + h_i(t+0)] = h_i(t)$.

Exemple 7 : $j(t) = Pf(\frac{1}{t})$ (Pf *Partie-finie*) qualifiée de *pseudo-fonction* [29] [7] [30] [8]. Il s'agit en fait d'une *distribution impaire*, parfois notée $v.p.\,\frac{1}{t}$

7. p. 9
8. pp. 28-29

(*v.p. valeur principale de Cauchy*) [31] [9]. Il n'est pas possible d'en donner une définition précise sans la théorie des distributions. Cette *distribution* sera précisée par la suite par la valeur de ses transformées directes et inverses. Pour l'instant on peut en donner l'image fonctionnelle, très approximative, suivante :



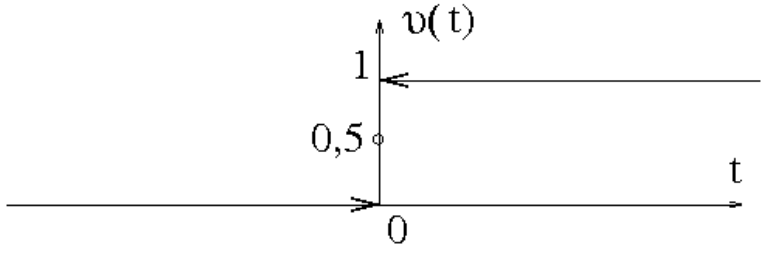
Remarque : au sens des distributions on peut définir $j(t)$ par la relation $t\,j(t) = 1$ [30] [10] ou $j(t) = \frac{d}{dt}\left[\ln(t)\right]$ [31] [11] ou $j(t) = 2\,\pi \int_0^\infty \sin(2\,\pi\,t\,\tau)\,d\tau$ (cf. ci-après).

3.2.1 Signaux en *temps continu* causaux

On remarquera que pour un signal h en *temps continu* causal en général les signaux h_p et h_i en *temps continu* ne sont pas causaux.

Exemple 0 : échelon de Heaviside (ou échelon unité) υ. C'est le signal υ en *temps continu* causal tel que [12] :

$\upsilon(t) \triangleq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$:



9. pp. 90-91
10. p. 36
11. p. 92
12. attention : il existe d'autres définitions selon la valeur en 0

Remarques :

υ n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[\upsilon(t-0)+\upsilon(t+0)]=\upsilon(t)$,

$\upsilon_p=\frac{1}{2}$ est *continu* et $\frac{1}{2}\,[\upsilon_p(t-0)+\upsilon_p(t+0)]=\upsilon_p(t)=\frac{1}{2}$,

$\upsilon_i(t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$ n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[\upsilon_i(t-0)+\upsilon_i(t+0)]=\upsilon_i(t)$.

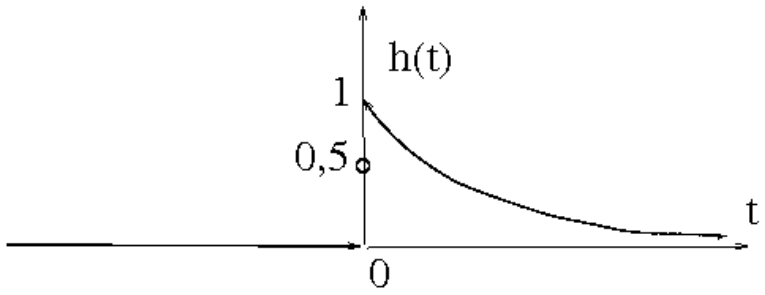
Cas général

Soit un signal h en *temps continu* causal. On constate que :

$h(t)=2\,h_p(t)\,\upsilon(t)$ et $h(t)=2\,h_i(t)\,\upsilon(t)+h(0)\,u_0(t)$; avec :

$u_0(t)\triangleq\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & t\neq 0\\ 1 & \text{si} & t=0\end{array}\right.$.

Exemple 6 : $h(t)=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & t<0\\ \frac{1}{2} & \text{si} & t=0\\ e^{-a\,t} & \text{si} & 0<t\end{array}\right.$ $(a>0)$.



Remarques : h n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)]=h(t)$,

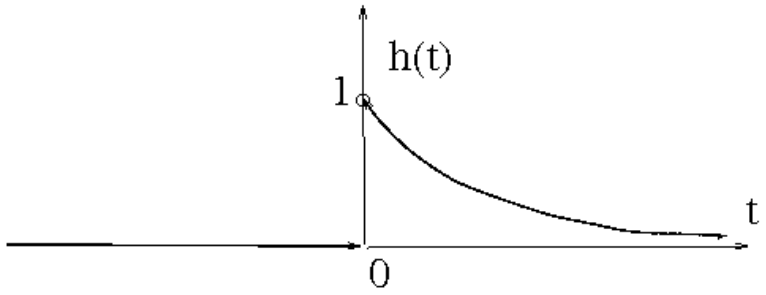
$h_p(t)=\left\{\begin{array}{lll}\frac{1}{2}\,e^{a\,t} & \text{si} & t<0\\ \frac{1}{2} & \text{si} & t=0\\ \frac{1}{2}\,e^{-a\,t} & \text{si} & 0<t\end{array}\right.$ est *continu* et $\frac{1}{2}\,[h_p(t-0)+h_p(t+0)]=h_p(t)$,

$h_i(t)=\left\{\begin{array}{lll}-\frac{1}{2}\,e^{a\,t} & \text{si} & t<0\\ 0 & \text{si} & t=0\\ \frac{1}{2}\,e^{-a\,t} & \text{si} & 0<t\end{array}\right.$ n'est pas *continu* mais $\frac{1}{2}\,[h_i(t-0)+h_i(t+0)]=h_i(t)$.

Remarque : $h(t)=e^{-a\,|t|}\,\upsilon(t)=e^{-a\,t}\,\upsilon(t)$ et si $a\to 0$ cet *exemple 6* « tend » vers l'*exemple 0.*

Exemple 6 bis : $h(t)=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & t<0\\ e^{-a\,t} & \text{si} & 0\leqslant t\end{array}\right.$ $(a>0)$.

La différence avec l'*exemple 6* provient du fait que maintenant $h(0)=1$ et non plus $h(0)=\frac{1}{2}$.



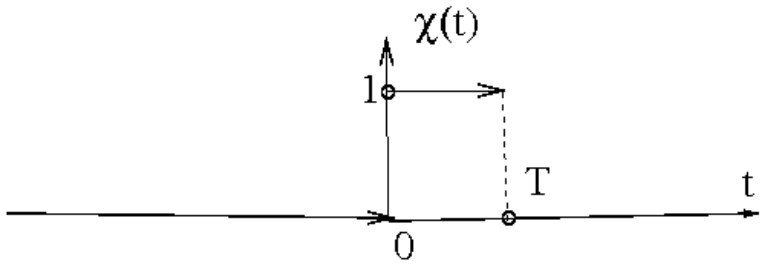
3.2.2 Signaux en *temps continu* causaux à supports bornés

Soit un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$; i.e. nul en dehors de cet intervalle :

h est le signal en *temps continu* « dépériodisé » du signal h_T en *temps continu* défini ci-après.

Attention : alors h_p et h_i sont à supports bornés $]-T\ T[$ et ne sont pas causaux.

Exemple 2 : signal χ en *temps continu* caractéristique de l'intervalle $[0\ T[$:



$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases},$$

$$\chi_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -T < t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}, \quad \chi_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad -T < t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}.$$

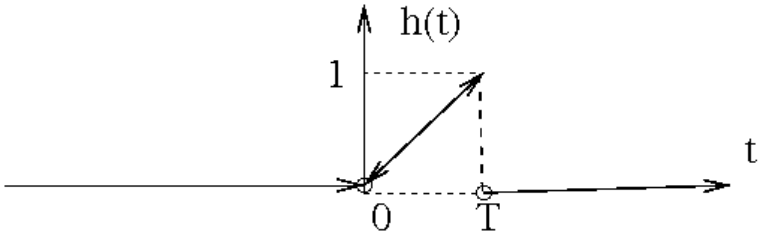
Remarques :

χ n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[\chi(t-0) + \chi(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq \chi[t],$

χ_p n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[\chi_p(t-0)+\chi_p(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<-T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=-T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -T<t<T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=T \\ 0 & \text{si} \quad T<t \end{cases} \neq \chi_p(t),$

χ_i n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[\chi_i(t-0)+\chi_i(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<-T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t=-T \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad -T<t<0 \\ 0 & \text{si} \quad t=0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0<t<T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=T \\ 0 & \text{si} \quad T<t \end{cases} \neq \chi_i(t).$

Exemple 3 :



$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \frac{t}{T} & \text{si} \quad 0 \leqslant t<T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases},$$

$$h_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ \frac{|t|}{2T} & \text{si} \quad -T<t<T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}, \; h_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ \frac{t}{2T} & \text{si} \quad -T<t<T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}.$$

Remarques :

h n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[h(t-0)+h(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \frac{t}{T} & \text{si} \quad 0 \leqslant t<T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t=T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases} \neq h(t),$

h_p n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[h_p(t-0)+h_p(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<-T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=-T \\ \frac{|t|}{2T} & \text{si} \quad -T<t<T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=T \\ 0 & \text{si} \quad T<t \end{cases} \neq h_p(t),$

h_i n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\left[h_i(t-0)+h_i(t+0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<-T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t=-T \\ \frac{t}{2T} & \text{si} \quad -T<t<T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t=T \\ 0 & \text{si} \quad T<t \end{cases} \neq h_i(t).$

Exemple 4 :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}, \; h_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ \frac{1}{2}\, e^{-\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad -T < t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ \frac{1}{2}\, e^{\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases},$$

$$h_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant -T \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)\, e^{\frac{2\,\pi\,i\,|t|}{T}} & \text{si} \quad -T < t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}.$$

Remarques :

h n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ e^{\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h(t),$

h_p n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\,[h_p(t-0)+h_p(t+0)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{1}{2}\, e^{\frac{2\,\pi\,i\,|t|}{T}} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_p(t),$

h_i n'est pas *continu* et $\frac{1}{2}\,[h_i(t-0)+h_i(t+0)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)\, e^{\frac{2\,\pi\,i\,|t|}{T}} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_i(t).$

3.2.3 Signaux en *temps continu* périodiques

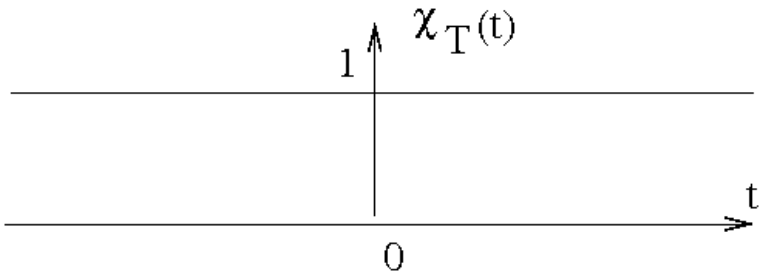
$h_T(t) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n\,T)$.

h_T est le signal en *temps continu* « périodisé », de période T, du signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$. On a donc :

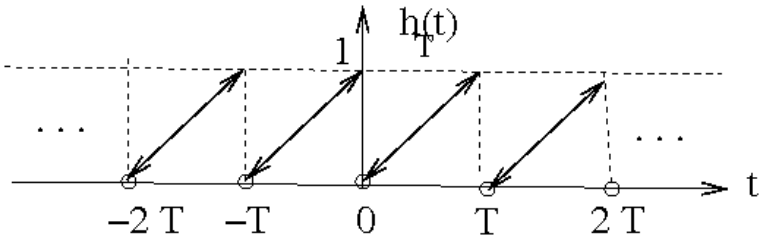
$h_T(t + l\,T) \triangleq h_T(t)\,;\, \forall l \in \mathbb{Z}$ et $h_T(t) \triangleq h(t)$ si $t \in [0\ T[$.

On note *exemple* i_T l'*exemple* « périodisé », de période T, de l' *exemple* i.

Exemple 2_T : $\chi_T = 1$.



Exemple 3_T : le signal h_T en *temps continu* est le suivant :



Exemple 4_T : $h_T(t) = e^{i\,\Omega\,t}$.

3.2.4 Décomposition en série de Fourier

La théorie des séries de Fourier permet de dire que le signal h_T en *temps continu*, en général *non continu* aux points $l\,T$ ($\forall l \in \mathbb{Z}$), est tel que [13] :

$\frac{1}{2}\,[h_T(t-0) + h_T(t+0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\,n\,\Omega\,t}$,

où $\Omega = \frac{2\,\pi}{T}$ est la pulsation fondamentale et le coefficient de Fourier c_n est donné par :

$c_n = \frac{1}{T}\,\int_0^T h_T(t)\, e^{-i\,n\,\Omega\,t}\,dt = \frac{1}{T}\,\int_0^T h(t)\, e^{-i\,n\,\Omega\,t}\,dt$ [14].

Exemple 2_T : $c_n = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & n \neq 0 \\ 1 & \text{si} & n = 0 \end{array} \right.$.

Exemple 3_T : $c_n = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{i\,[1-(-1)^n]}{2\,\pi\,n} & \text{si} & n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} & n = 0 \end{array} \right.$.

Exemple 4_T : $c_n = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & n \neq 1 \\ 1 & \text{si} & n = 1 \end{array} \right.$.

13. cette théorie s'applique souvent même si le signal h en *temps continu* n'est pas *continu* sur son support ou même si h est un signal en *temps discret* (cf. ci-après)

14. on verra que $c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\frac{n}{T})$ où $\widehat{h}$ est la transformée de Fourier directe de h

3.2.5 Stabilité des signaux en *temps continu*

Le signal h en *temps continu* est *stable* ssi [16] [15] :

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$.

Alors si le signal h est *causal* et *stable* les signaux h_p et h_i en *temps continu non causaux* sont *stables*.

Démonstrations

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_p(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ donc h_p est *stable* QED.

$\int_{-\infty}^{\infty} |h_i(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ donc h_i est *stable* QED.

3.3 Valeurs discrètes des signaux en *temps continu*

On pose $h_k \triangleq h(k\,\Delta)$; $k \in \mathbb{Z}$; avec $\Delta \neq 0$ et on qualifie $\{h_k\}$ de *suite*.

On pose également $h_{p\,k} \triangleq h_p(k\,\Delta)$ et $h_{i\,k} \triangleq h_i(k\,\Delta)$. Alors :

$h_{p\,k} = \frac{1}{2}\,(h_k + h_{-k})$ [avec $h_{p(-k)} = h_{p\,k}$ et donc $h_{p\,0} = h_0$] et
$h_{i\,k} = \frac{1}{2}\,(h_k - h_{-k})$ [avec $h_{i(-k)} = -h_{i\,k}$ et donc $h_{i\,0} = 0$].

On en déduit que :

$h_k = h_{p\,k} + h_{i\,k}$ et $h_{-k} = h_{p\,k} - h_{i\,k}$.

3.3.1 Valeurs discrètes des signaux en *temps continu* causaux

$h_k = 2\,h_{p\,k}\,\upsilon_k = 2\,h_{i\,k}\,\upsilon_k + h_0\,\delta_{0k}$ ou δ_{0k} est le symbole de Kronecker [16]. On constate donc que l'on peut retrouver h_k à partir de $h_{p\,k}$ mais que l'on ne peut pas retrouver h_k à partir de $h_{i\,k}$ (il faut également connaître h_0) [23]. Cette constation nous sera utile dans la suite pour la transformation en z.

3.3.2 Valeurs discrètes des signaux en *temps continu* causaux à support borné

On choisit $\Delta = \frac{T}{N}$; $N \in \mathbb{N}^*$. Alors $h_k = 0$ si $k \notin \{0, \ldots, N-1\}$.

3.3.3 Valeurs discrètes des signaux en *temps continu* périodiques

On choisit toujours $\Delta = \frac{T}{N}$; $N \in \mathbb{N}^*$.

Alors $h_{T\,(q\,N+r)} = h_{T\,r} = h_r$; avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r = 0, \ldots, N-1$.

15. p. 217
16. $\delta_{0k} = 0$ si $k \neq 0$ et $\delta_{00} = 1$

3.3.4 *Exemples*

Exemple 0 ; $\upsilon_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} & k = 0 \\ 1 & \text{si} & 0 < k \end{array} \right.$.

Exemple 1 : $h_k = q^{|k|}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

Exemple 2 : $\chi_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \text{si} & k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{si} & k \neq 0, \ldots, N-1 \end{array} \right.$.

Exemple 2_T : $\chi_{T\,k} = 1$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3 : $h_k = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{k}{N} & \text{si} & k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{si} & k \neq 0, \ldots, N-1 \end{array} \right.$.

Exemple 3_T : $h_{T\,(q\,N+r)} = \frac{r}{N}$ pour $q \in \mathbb{Z}$ et $r = 0, \ldots, N-1$.

Exemple 4 : $h_k = \left\{ \begin{array}{ccc} \omega_N^{-k} & \text{si} & k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{si} & k \neq 0, \ldots, N-1 \end{array} \right.$ (avec $\omega_N \triangleq e^{-\frac{2\,\pi\,i}{N}}$).

Exemple 4_T : $h_{T\,k} = \omega_N^{-k}$.

Exemple 5 : $h_k = \left\{ \begin{array}{ccc} -q^{-k} & \text{si} & k < 0 \\ 0 & \text{si} & k = 0 \\ q^k & \text{si} & 0 < k \end{array} \right.$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

Exemple 6 : $h_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} & k = 0 \\ q^k & \text{si} & 0 < k \end{array} \right.$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

Exemple 6 bis : $h_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k < 0 \\ q^k & \text{si} & 0 \leqslant k \end{array} \right.$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

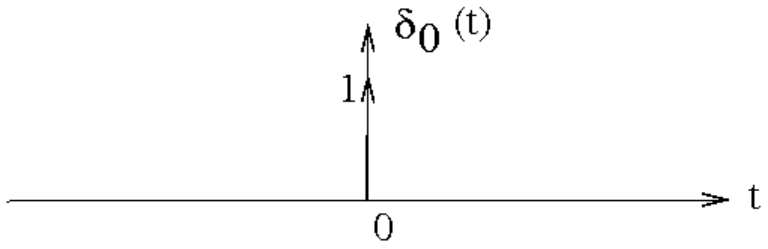
3.4 Signaux en *temps discret*

On pourra consulter [25] [17].

3.4.1 Impulsions

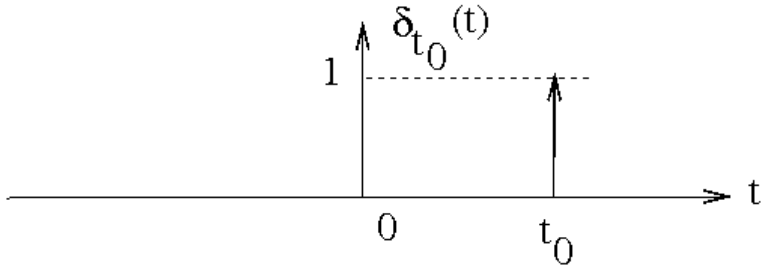
Soit $\delta_0 \triangleq \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\,\chi$ l'impulsion de Dirac en 0. Ce n'est pas une *fonction* mais une *distribution* [31][30]. Néanmoins nous utilisons l'écriture fonctionnelle $\delta_0(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\,\chi(t)$. L'impulsion de Dirac $\delta_0(t)$ est représentée par une flêche unité à l'abcisse 0 :

17. Ch. 2 pp. 8-93



Remarque : $\delta_0(c\,t) = \frac{1}{|c|}\,\delta_0(t)\,;\ \forall c \neq 0$ et en particulier ; avec $c = -1$: $\delta_0(-t) = \delta_0(t)$.

Et $\delta_{t_0}(t)$ est l'impulsion de Dirac en t_0 notée par une flêche unité à l'abcisse t_0. Elle est telle que $\delta_{t_0}(t) = \delta_0(t - t_0)$:



Remarque : $\delta_{t_0}(c\,t) = \frac{1}{|c|}\,\delta_{\frac{t_0}{c}}(t)\,;\ \forall c \neq 0$ et en particulier ; avec $c = -1$: $\delta_{t_0}(-t) = \delta_{-t_0}(t)$.

Pour tout signal h en *temps continu* on a :

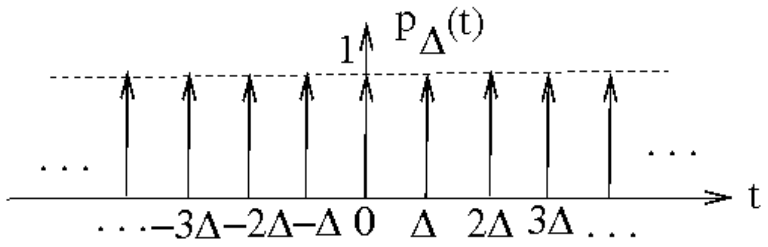
$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\delta_{t_0}(t) = \frac{1}{2}\,[h(t_0 - 0) + h(t_0 + 0)]$.

Si le signal h en *temps continu* est *continu* en t_0 on a :

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\delta_{t_0}(t) = h(t_0)$ et on pourra écrire : $h(t)\,\delta_{t_0}(t) = h(t_0)\,\delta_{t_0}(t)$.

Finalement $p_\Delta(t)$ le « peigne » de Dirac est défini par :

$p_\Delta(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\,\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(t - k\,\Delta)$:



Remarques :

a) $p_\Delta(-t) = p_\Delta(t)$.

b) Le « peigne » de Dirac $p_\Delta(t)$ est périodique, de période Δ. Il est donc également périodique, de période $T = N\,\Delta$; avec $N \in \mathbb{N}^*$.

c) On peut considérer que le « peigne » de Dirac $p_\Delta(t)$ est le « périodisé », de période Δ, du signal δ_0, à support borné $(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$. En généralisant la décomposition en série de Fourier au signal p_Δ en *temps discret* on peut donc dire :

$p_\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{\Delta}}$; avec $c_n = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta_0(t)\, e^{-\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{\Delta}}\, dt = \frac{1}{\Delta}$.

On en déduit la *formule de Poisson, en temps* :

$$\boxed{p_\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{k\,\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{\Delta}}}.$$

3.4.2 Signaux en *temps discret*

i) Signaux en temps discret *quelconques*

Soit h_e un signal en *temps discret* quelconque i.e. tel que :

$$\boxed{h_e(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)}.$$

Un signal en *temps discret* est donc une *distribution*.

Soient également h_{ep} et h_{ei} les signaux en *temps discret* tels que :

$h_{ep}(t) = \frac{1}{2}\,[h_e(t) + h_e(-t)]$
$h_{ei}(t) = \frac{1}{2}\,[h_e(t) - h_e(-t)]$; alors :

$h_e(t) = h_{ep}(t) + h_{ei}(t)$ et $h_e(-t) = h_{ep}(t) - h_{ei}(t)$. De plus :

$h_{ep}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{pk}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec $h_{pk} = \frac{1}{2}\,(h_k + h_{-k})$ et
$h_{ei}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{ik}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec $h_{ik} = \frac{1}{2}\,(h_k - h_{-k})$.

Si h_e correspond à l'échantillonnage du signal h en *temps continu* [24] [18] [25] [19] on peut dire que h_e est le « peigne » de Dirac p_Δ modulé en amplitude par le signal h en *temps continu* [24] [20].

18. Ch. 8 pp. 513-572
19. Ch. 4 pp. 140-239
20. p. 219

Bien entendu il existe une infinité de signaux h en *temps continu* qui, par échantillonnage, conduisent au même signal h_e en *temps discret*.

Si h_{pe} correspond à l'échantillonnage du signal h_p et h_{ie} à celui de h_i on a $h_{pe} = h_{ep}$ et $h_{ie} = h_{ei}$ et on note *exemple* i_e l'*exemple* qui correspond à l'échantillonnage de l'*exemple* i.

Exemple 1_e : $h_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{|k|}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

Exemple 5_e : $h_e(t) = \sum_{k=-1}^{-\infty} -q^{-k}\, \delta_{k\,\Delta}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$
(avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

ii) Signaux en temps discret *causaux*

Soit h_e un signal en *temps discret* causal i.e. tel que :

$$\boxed{h_e(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)}.$$

Exemple 0_e : $\upsilon_e(t) = \frac{1}{2}\, \delta_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k\,\Delta}(t)$.

Exemple 6_e : $h_e(t) = \frac{1}{2}\, \delta_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} q^k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

Exemple 6 *bis*$_e$: $h_e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$).

iii) Signaux en temps discret *causaux à supports bornés*

Soit h_e un signal en *temps discret* causal, à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$, i.e. tel que :

$$\boxed{h_e(t) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)}.$$

Exemple 2_e : $\chi_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k\,\Delta}(t)$.

Exemple 3_e : $h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{N}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$.

Exemple 4_e : $h_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{-k}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$.

iv) Signaux en temps discret *périodiques*

Soit $h_{e\,T}$ le signal en *temps discret* périodique, de période T, qui correspond à la « périodisation », de période T, du signal h_e en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$ i.e. tel que :

$h_{e\,T}(t) \triangleq \sum_{q=-\infty}^{\infty} h_e(t - q\,T)$. Alors :

$$\boxed{h_{e\,T}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} h_r\, \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{(q\,N+r)\,\Delta}(t)}.$$

Démonstration

$h_{e\,T}(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} h_r\, \delta_{r\,\Delta}(t - q\,T) = \sum_{r=0}^{N-1} h_r\, \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{q\,T+r\,\Delta}(t)$
$= \sum_{r=0}^{N-1} h_r\, \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{(q\,N+r)\,\Delta}(t)$ QED.

Posons $h_{e\,T}(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{T\,k}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$, alors $h_{T\,(q\,N+r)} = h_r$; avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r = 0, \ldots, N-1$.

Démonstration (évidente)

Si h_e correspond à l'échantillonnage du signal h en *temps continu* causal, à support borné $[0\ T[$ et si $h_{T\,e}$ correspond à l'échantillonnage du signal h_T en *temps continu* périodique, de période T, « périodisé » , de période T, du signal h on a $h_{T\,e} = h_{e\,T}$ et on note *exemple* i_{Te} le signal en *temps discret* périodique qui correspond à l'échantillonnage du signal en *temps continu* périodique de l'*exemple* i_T.

Exemple 2_{Te} : $\chi_{T\,e} = 1_e = p_\Delta$.

Exemple 3_{Te} : $h_{Te}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{r}{N} [\sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{(q\,N+r)\,\Delta}(t)]$.

Exemple 4_{Te} : $h_{Te}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} \omega_N^{-r} [\sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta_{(q\,N+r)\,\Delta}(t)]$.

v) Stabilité des signaux en temps discret

Le signal h_e en *temps discret* est *stable* ssi [23] [21] :

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$.

Alors si le signal h_e est *causal* et *stable* les signaux $h_{e\,p}$ et $h_{e\,i}$ en *temps discret non causaux* sont *stables*.

Démonstrations

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_{p\,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty$ donc $h_{e\,p}$ est *stable* QED.

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_{i\,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| - h_0 < \infty$ donc $h_{e\,i}$ est *stable* QED.

21. p. 15

4 Convolutions

4.1 Convolution linéaire

4.1.1 Convolution linéaire de deux signaux en *temps continu*

i) Cas général

Soient h et x deux signaux en *temps continu*. Leur convolée linéaire s, notée $h * x$, est le signal en *temps continu* tel que (et à condition que les intégrales aient un sens) :

$$\boxed{s(t) \triangleq (h * x)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau}.$$

L'opération $*$ s'appelle convolution linéaire ; elle est commutative.

Une condition suffisante à l'existence de la convolée linéaire de deux signaux en *temps continu* est qu'ils soient sommables, mais elle n'est pas nécessaire.

Exemple 1 « étendu » : soient le signal h de l'*exemple 1* et le signal x également de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b $(0 < b)$:

$$s(t) = (h * x)(t) = \begin{cases} \frac{2\,a\,e^{-b\,|t|} - 2\,b\,e^{-a\,|t|}}{a^2 - b^2} & \text{si} \quad b \neq a \\ \frac{1 + a\,|t|}{a}\, e^{-a\,|t|} & \text{si} \quad b = a \end{cases}.$$

Échantillonnage

Soit $s_e = (h * x)_e$ le signal en *temps discret* qui correspond à l'échantillonnage du signal $s = h * x$ en *temps continu*. Il est tel que :

$s_e(t) = (h * x)_e(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\, \delta_{k\,\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h * x)_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$s_k = (h * x)_k = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(k\,\Delta - \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(k\,\Delta - \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$

On peut dire que $s_e = (h * x)_e$ est le « peigne » de Dirac p_Δ modulé en amplitude par le signal $s = h * x$ en *temps continu* .

Exemple 1 « étendu » précédent :

L'échantillonnage conduit à $s_{-k} = (h * x)_{-k} = s_k = (h * x)_k$.

Et pour $k \geqslant 0$ (avec $q = e^{-a\,\Delta}$ et $q' = e^{-b\,\Delta}$) :

$$s_k = (h * x)_k = \begin{cases} \frac{2\,a\,q'^{\,k} - 2\,b\,q^k}{a^2 - b^2} & \text{si} \quad b \neq a \\ \frac{1 + k\,a\,\Delta}{a}\, q^k & \text{si} \quad b = a \end{cases}.$$

Transformées de Hilbert [18] [22] [8] [23] [41] [24] [27] [25] [38] [26] [39] [27] [40] [28].

On appelle Transformation de Hilbert Directe (THD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{H} \ : \ h \mapsto \mathrm{h}$$

qui fait correspondre à un signal h en *temps continu* le signal h en *temps continu* tel que (cf. *Exemple 7*) :

$\mathrm{h} \triangleq \frac{1}{\pi}\,(h * j)$.

Par conséquent :

$\mathrm{h}(t) \triangleq \frac{1}{\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \triangleq \frac{1}{\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t-\tau)}{\tau}\,d\tau$, où $v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \triangleq \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}$ (il s'agit de la valeur principale de Cauchy).

On a donc $\mathrm{h} \triangleq \mathcal{H}\,h$.

Exemple : soit $h(t) = \frac{2\,a}{a^2+4\,\pi^2\,t^2}$ $(a > 0)$. Alors $\mathrm{h}(t) = \frac{4\,\pi\,t}{a^2+4\,\pi^2\,t^2}$.

On appelle Transformation de Hilbert Inverse (THI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{H}} = -\mathcal{H} \ : \ \mathrm{g} \mapsto \overline{\mathrm{g}}$$

qui fait correspondre à un signal g en *temps continu* le signal $\overline{\mathrm{g}}$ en *temps continu* tel que (cf. *Exemple 7*) :

$\overline{\mathrm{g}} \triangleq -\frac{1}{\pi}\,(\mathrm{g} * j)$.

Par conséquent :

$\overline{\mathrm{g}}(t) \triangleq -\frac{1}{\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{g}(\tau)}{t-\tau}\,d\tau \triangleq -\frac{1}{\pi}\,v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{g}(t-\tau)}{\tau}\,d\tau$

On a donc $\overline{\mathrm{g}} \triangleq \overline{\mathcal{H}}\,\mathrm{g} = -\mathcal{H}\,\mathrm{g}$.

Cas particulier

Si $\mathrm{g} = \mathrm{h} = \mathcal{H}\,h$ on a $\overline{\mathrm{h}} = \overline{\mathcal{H}}\,\mathcal{H}\,h = -\mathcal{H}^2\,h$ et, en général, avec des hypothèses de régularité suffisantes on a $\overline{\mathrm{h}} = h$ et la THD est *anti-involutive* ($\mathcal{H}^2 = -1$) [41] [29] (cf. démonstration ci-après avec la transformation de Fourier).

22. § 220.E pp. 839-840
23. pp. 267-272
24. Ch. 14 pp. 273-290
25. 7. S. L. Hahn pp. 463-630
26. p. 843 et p. 1810 théorème de Titchmarsh
27. « Transformée de Hilbert » 6 pages
28. « Hilbert transform » 2 pages
29. § 14.6 pp. 280-282

Exemple : soit $\mathrm{h}(t) = \frac{4\,\pi\,t}{a^2+4\,\pi^2\,t^2}$ $(a > 0)$. Alors : $\overline{\mathrm{h}}(t) = \frac{2\,a}{a^2+4\,\pi^2\,t^2}$ et donc $\overline{\mathrm{h}} = h$.

ii) Convolution linéaire de deux signaux en temps continu *causaux*

Soient h et x deux signaux en *temps continu* causaux. Alors leur convolée linéaire s est, d'après ce qui précède, le signal en *temps continu* tel que (et à condition que les intégrales aient un sens) :

$$\boxed{s(t) \triangleq (h * x)(t) = \int_0^t h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau}.$$

Alors on constate aisément que $s = h * x$ est à causal.

Exemple 6 « étendu » : soient le signal h de l'*exemple 6* et le signal x également de l'*exemple 6*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b $(0 < b)$:

Pour $t < 0$: $s(t) = 0$.

Pour $0 \leqslant t$:

$$s(t) = (h * x)(t) = \begin{cases} \frac{e^{-a\,t} - e^{-b\,t}}{b-a} & \text{si} \quad b \neq a \\ t\,e^{-a\,t} & \text{si} \quad b = a \end{cases}.$$

iii] Convolution linéaire de deux signaux en temps continu *causaux à même support borné*

Soient h et x deux signaux en *temps continu* causaux à même support borné $[0\ T[$. Alors leur convolée linéaire s est, d'après ce qui précède, le signal en *temps continu* tel que (et à condition que les intégrales aient un sens) :

$$s(t) \triangleq (h * x)(t) \triangleq \int_0^T h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau = \int_0^T h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

Alors on constate aisément que $s = h * x$ est à causal support borné $[0\ 2\,T[$.

Exemple : soient le signal h de l'*exemple 3* et le signal χ de l'*exemple 2* :

$$(h * \chi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ \frac{t^2}{2\,T} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant T \\ \frac{2\,T\,t - t^2}{2\,T} & \text{si} \quad T \leqslant t \leqslant 2\,T \\ 0 & \text{si} \quad 2\,T \leqslant t \end{cases}$$

Le signal $h * \chi$ en *temps continu* causal à support borné $[0\ 2\,T[$ est donc *continu*.

4.1.2 Convolution linéaire d'un signal en *temps continu* et d'un signal en *temps discret*

i) Cas général

Soit h un signal en *temps continu* et x_e un signal en *temps discret*. Alors leur convolée linéaire est le signal en *temps continu* tel que (et à condition que les intégrales aient un sens) :

$$\boxed{(h * x_e)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x_e(t-\tau)\, d\tau \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x_e(\tau)\, d\tau}.$$

Alors (et à condition que les séries aient un sens) :

$$\boxed{(h * x_e)(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [h(t - l\,\Delta - 0) + h(t - l\,\Delta + 0)]\, x_l}.$$

Démonstration

$(h * x_e)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, [\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l\, \delta_{l\,\Delta}(\tau)]\, d\tau$
$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, \delta_{l\,\Delta}(\tau)\, d\tau]\, x_l$
$= \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [h(t - l\,\Delta - 0) + h(t - l\,\Delta + 0)]\, x_l$ QED.

ii) Convolution linéaire d'un signal en temps continu *et d'un signal en* temps discret *causaux*

Soit h un signal en *temps continu* et x_e un signal en *temps discret* causaux. Alors, d'après ce qui précède, leur convolée linéaire est le signal en temps continu tel que (et à condition que les séries aient un sens) :

$$(h * x_e)(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} [h(t - l\,\Delta - 0) + h(t - l\,\Delta + 0)]\, x_l$$

On constate aisément que $h * x_e$ est un signal en *temps continu* causal.

iii) Convolution linéaire d'un signal en temps continu *et d'un signal en* temps discret *causaux à « même » support borné*

Soit h un signal en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$ et x_e un signal en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$. Alors, d'après ce qui précède, leur convolée linéaire est le signal en temps continu tel que (et à condition que les séries aient un sens) :

$$(h * x_e)(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{l=0}^{N-1} [h(t - l\,\Delta - 0) + h(t - l\,\Delta + 0)]\, x_l$$

On constate aisément que $h * x_e$ est un signal en *temps continu* causal à support borné $[0\ (2\,N-1)\,\Delta[$.

4.1.3 Convolution linéaire de deux signaux en *temps discret*

i) Cas général

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret*. Leur convolée linéaire u_e, notée $h_e * x_e$, est le signal en *temps discret* tel que :

$$\boxed{u_e(t) \triangleq (h_e * x_e)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h_e(\tau)\, x_e(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t-\tau)\, x_e(\tau)\, d\tau}.$$

$u_e = h_e * x_e$ est bien un signal en *temps discret* car :

$u_e(t) = (h_e * x_e)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k\, \delta_{k\,\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h_e * x_e)_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$;
avec (et à condition que les séries aient un sens) :

$$\boxed{u_k = (h_e * x_e)_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l\, x_{k-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{k-l}\, x_l}.$$

Et on peut poser $h_k * x_k \triangleq (h_e * x_e)_k = u_k$.

Démonstration de la première égalité ci-devant

$u_e(t) = (h_e * x_e)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l\, \delta_{l\,\Delta}(\tau)]\, [\sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, \delta_{j\,\Delta}(t-\tau)]\, d\tau$
$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{l\,\Delta}(\tau)\, \delta_{j\,\Delta}(t-\tau)\, d\tau$
$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, \delta_{j\,\Delta}(t - l\,\Delta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j\, \delta_{(j+l)\,\Delta}(t)$.

Posons $k = j + l$; alors :

$u_e(t) = (h_e * x_e)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l\, x_{k-l}]\, \delta_{k\,\Delta}(t)$ et, par conséquent
$u_k = (h_e * x_e)_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l\, x_{k-l}$ QED.

La seconde égalité ci-devant se démontre de même.

Exemple 1_e « *étendu* » : soient le signal h_e de l'*exemple* 1_e et le signal x_e également de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b $(0 < b)$:

$u_{-k} = (h_e * x_e)_{-k} = u_k = (h_e * x_e)_k$. Et pour $k \geqslant 0$
(avec $q = e^{-a\,\Delta}$ et $q' = e^{-b\,\Delta}$) :

$$u_k = (h_e * x_e)_k = \begin{cases} \frac{q^k + q'^k}{1 - q\,q'} + \frac{q^{1-k} - q'^{(1-k)}}{q^{-1} - q'^{-1}}\, (q\,q')^{k-1} & \text{si} \quad b \neq a \\ \frac{(1+k)\,q^{-1} + (1-k)\,q}{q^{-1} - q}\, q^k & \text{si} \quad b = a \end{cases}.$$

Cet *exemple* montre que, d'une manière générale, si h_e et x_e correspondent, respectivement, à l'échantillonnage des deux signaux h et x en *temps continu* on a :

$$\boxed{u_e = h_e * x_e \neq s_e = (h * x)_e}.$$

ii) Convolution linéaire de deux signaux en temps discret *causaux*

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret* causaux. Alors leur convolée linéaire u_e est, d'après ce qui précède, le signal en temps discret tel que (et à condition que les séries aient un sens) :

$$u_k = (h_e * x_e)_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ \sum_{l=0}^{k} h_l \, x_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} h_{k-l} \, x_l & \text{si} \quad 0 \leqslant k \end{cases}$$

On constate que le signal $u_e = h_e * x_e$ est causal.

Exemple 6 *bis*$_e$ « *étendu* » : soient le signal h_e de l'*exemple* 6 *bis*$_e$ et le signal x_e egalement de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b $(0 < b)$:

$$u_k = (h_e * x_e)_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ \frac{q^k - q'^k}{q - q'} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \end{cases} \quad (\text{avec } q = e^{-a\,\Delta} \text{ et } q' = e^{-b\,\Delta}).$$

Soit pour $0 \leqslant k$: $u_0 = 1$, $u_1 = q + q'$, $u_1 = q^2 + q\,q' + q'^2$, ... (c'est donc valable si $q' = q$ i.e. si $b = a$).

iii) Convolution linéaire de deux signaux en temps discret *causaux à même support borné*

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret* causaux à même support borné $\{0, \ldots, N-1\}$. Alors leur convolée linéaire u_e est, d'après ce qui précède, le signal en *temps discret* tel que (et à condition que les séries aient un sens) :

$$u_k = (h_e * x_e)_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ \sum_{l=0}^{N-1} h_l \, x_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} h_{k-l} \, x_l & \text{si} \quad k = 0, \ldots, 2\,N-2 \\ 0 & \text{si} \quad 2\,N-1 \leqslant k \end{cases}$$

On constate que le signal $u_e = h_e * x_e$ est causal à supprt borné $\{0, \ldots, 2\,N-2\}$.

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e :

$(h_e * \chi_e)_0 = h_0\,\chi_0 + h_1\,\chi_{-1} = h_0\,\chi_0 = 0$
$(h_e * \chi_e)_1 = h_0\,\chi_1 + h_1\,\chi_0 = \frac{1}{2}$
$(h_e * \chi_e)_2 = h_0\,\chi_2 + h_1\,\chi_1 = h_1\,\chi_1 = \frac{1}{2}$

4.1.4 Remarque concernant la convolution linéaire

On verra que la transformée de Fourier directe d'une convolution linéaire de deux signaux est le produit des transformées de Fourier directes de chacun d'eux.

4.2 Convolution circulaire

On pourra consulter [23] [30] [36] [31].

4.2.1 Convolution circulaire de deux signaux en *temps discret* causaux à même support borné

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret* causaux à même support borné $\{0, \ldots, N-1\}$. Leur convolée circulaire y_e, notée $h_e \circledast x_e$, est le signal en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$, tel que :

$y_e(t) \triangleq (h_e \circledast x_e)(t) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} y_k \, \delta_{k\,\Delta}(t) \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} (h_e \circledast x_e)_k \, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$y_k \triangleq (h_e \circledast x_e)_k \triangleq \sum_{l=0}^{N-1} h_l \, x_{(k-l) \bmod N} \triangleq \sum_{l=0}^{N-1} h_{(k-l) \bmod N} \, x_l$;
$k = 0, \ldots, N-1$ et avec $(k-l) \bmod N \ \in \ \{0, \ldots, N-1\}$.

Et on peut poser $h_k \circledast x_k \triangleq (h_e \circledast x_e)_k = y_k$.

En effet :

$\sum_{l=0}^{N-1} h_l \, x_{(k-l) \bmod N} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{(k-l) \bmod N} \, x_l$; $k = 0, \ldots, N-1$.

Démonstration :

Pour $k = 0, \ldots, N-1$:

$\sum_{l=0}^{N-1} h_l \, x_{(k-l) \bmod N} = \sum_{l=0}^{k} h_l \, x_{(k-l)} + \sum_{l=k+1}^{N-1} h_l \, x_{(k-l) \bmod N}$
$= \sum_{m=k}^{0} h_{k-m} \, x_m + \sum_{m=N-1}^{k+1} h_{k-m+N} \, x_{(m-N) \bmod N}$
$= \sum_{m=0}^{k} h_{k-m} \, x_m + \sum_{m=k+1}^{N-1} h_{(k-m) \bmod N} \, x_m = \sum_{l=0}^{N-1} h_{(k-l) \bmod N} \, x_l$ QED.

Par conséquent la convolution circulaire est commutative :
$h_e \circledast x_e = x_e \circledast h_e$.

Calcul explicite de y_k :

$$
\begin{aligned}
y_0 &= h_0 \, x_0 + h_1 \, x_{N-1} + h_2 \, x_{N-2} + \ldots + h_{N-2} \, x_2 + h_{N-1} \, x_1 \\
y_1 &= h_0 \, x_1 + h_1 \, x_0 + h_2 \, x_{N-1} + \ldots + h_{N-2} \, x_3 + h_{N-1} \, x_2 \\
y_2 &= h_0 \, x_2 + h_1 \, x_1 + h_2 \, x_0 + \ldots + h_{N-2} \, x_4 + h_{N-1} \, x_3 \\
&\vdots \\
y_{N-2} &= h_0 \, x_{N-2} + h_1 \, x_{N-3} + h_2 \, x_{N-4} + \ldots + h_{N-2} \, x_0 + h_{N-1} \, x_{N-1} \\
y_{N-1} &= h_0 \, x_{N-1} + h_1 \, x_{N-2} + h_2 \, x_{N-3} + \ldots + h_{N-2} \, x_1 + h_{N-1} \, x_0
\end{aligned}
$$

30. § 3.6.4 pp. 105-109
31. § 5.3.E pp. 135-136 et § 5.5 pp. 147-156

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e :

$y_0 = h_0 \chi_0 + h_1 \chi_1 = \frac{1}{2}$
$y_1 = h_0 \chi_1 + h_1 \chi_0 = \frac{1}{2}$.

Cas particulier

Soient $\grave{h}_e$ et $\grave{x}_e$ les deux signaux en *temps discret* causaux à même support borné $\{0, \ldots, 2N-1\}$, tels que [32] :

$\grave{h}_e(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \grave{h}_k \, \delta_{k\Delta}(t)$ et $\grave{x}_e(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} \grave{x}_k \, \delta_{k\Delta}(t)$; avec :

$$\grave{h}_k \triangleq \begin{cases} h_k & \text{si} \quad k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{si} \quad k = N, \ldots, 2N-1 \end{cases} \quad \text{et :}$$

$$\grave{x}_k \triangleq \begin{cases} x_k & \text{si} \quad k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & \text{si} \quad k = N, \ldots, 2N-1 \end{cases} .$$

Leur convolée circulaire $\grave{y}_e \triangleq \grave{h}_e \circledast \grave{x}_e$ est le signal en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, 2N-1\}$, donc tel que :

$\grave{y}_e(t) \triangleq \sum_{k=0}^{2N-1} \grave{y}_k \, \delta_{k\Delta}(t)$ et le calcul explicite de $\grave{y}_k$ donne :

$\grave{y}_0 = h_0 \, x_0$
$\grave{y}_1 = h_0 \, x_1 + h_1 \, x_0$
$\vdots$
$\grave{y}_{N-1} = h_0 \, x_{N-1} + h_1 \, x_{N-2} + \ldots + h_{N-2} \, x_1 + h_{N-1} \, x_0$
$\grave{y}_N = h_1 \, x_{N-1} + \ldots + h_{N-1} \, x_1$
$\grave{y}_{N+1} = h_2 \, x_{N-1} + \ldots + h_{N-1} \, x_2$
$\vdots$
$\grave{y}_{2N-2} = h_{N-1} \, x_{N-1}$
$\grave{y}_{2N-1} = 0$.

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e :

$\grave{y}_0 = h_0 \, \chi_0 = 0$
$\grave{y}_1 = h_0 \, \chi_1 + h_1 \, \chi_0 = \frac{1}{2}$
$\grave{y}_2 = h_1 \, \chi_1 = \frac{1}{2}$
$\grave{y}_3 = 0$.

32. attention : bien que $\grave{h}_e = h_e$ et $\grave{x}_e = x_e$ on a $\grave{h}_e \circledast \grave{x}_e \neq h_e \circledast x_e$ car les supports de $\grave{h}_e$ et h_e, d'une part et de $\grave{x}_e$ et x_e, d'autre part, ne sont pas les mêmes

4.2.2 Convolution circulaire de deux signaux en *temps discret*, périodiques, de même période

$h_{e\,T} \circledast x_{e\,T} \triangleq (h_e \circledast x_e)_T \triangleq y_{e\,T}$.

Alors $y_{e\,T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{T\,k}\, \delta_{k\,\Delta}(t)$ et :

$y_{T\,(q\,N+r)} = y_r$; avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r = 0, \ldots, N-1$.

Donc le signal $h_{e\,T} \circledast x_{e\,T}$ en *temps discret*, périodique, de période T, est la « périodisation », de période T, du signal $h_e \circledast x_e$ causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$.

4.3 Lien entre convolutions linéaire et circulaire

La convolée linéaire $\grave{h}_e * \grave{x}_e$ est un signal en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, 4\,N-2\}$, tel que :

$(\grave{h}_e * \grave{x}_e)(t) = \sum_{k=0}^{4\,N-2} (\grave{h}_e * \grave{x}_e)_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$(\grave{h}_e * \grave{x}_e)_k = \sum_{l=0}^{2\,N-1} \grave{h}_l\, \grave{x}_{k-l} = \sum_{l=0}^{2\,N-1} \grave{h}_{k-l}\, \grave{x}_l$; $k = 0, \ldots, 4\,N-2$.

Le calcul montre que :

$$(\grave{h}_e * \grave{x}_e)_k = \begin{cases} (\grave{h}_e \circledast \grave{x}_e)_k = \grave{y}_k & \text{si} \quad k = 0, \ldots, 2\,N-1 \\ 0 & \text{si} \quad k = 2\,N, \ldots, 4\,N-2 \end{cases}.$$

Il s'agit du lien qui existe entre les convolutions linéaire et circulaire.

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e. Alors :

$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_0 = (\grave{h}_e \circledast \grave{\chi}_e)_0 = \grave{y}_0 = 0$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_1 = (\grave{h}_e \circledast \grave{\chi}_e)_1 = \grave{y}_1 = \frac{1}{2}$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_2 = (\grave{h}_e \circledast \grave{\chi}_e)_2 = \grave{y}_2 = \frac{1}{2}$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_3 = (\grave{h}_e \circledast \grave{\chi}_e)_3 = \grave{y}_3 = 0$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_4 = 0$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_5 = 0$
$(\grave{h}_e * \grave{\chi}_e)_6 = 0$.

4.4 Convolutions linéaires complexe et fréquentielle

4.4.1 Convolution linéaire complexe

La définition de le convolution linéaire complexe de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable complexe, est différente selon qu'elles sont *non périodiques* ou *périodiques*. Dans la suite soient $p = \sigma + i\,\omega$ et $s = \varsigma + i\,\varpi$ (σ, ω, ς, $\varpi \in \mathbb{R}$) deux variables complexes.

Cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable complexe, non périodiques

Soient $\widetilde{h}$ et $\widetilde{x}$ deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable complexe, non périodiques, avec leurs propres Régions De Convergence (RDC) i.e. leurs propres régions du plan complexe dans lesquelles elles sont définies et holomorphes [33].
Alors leur convolution linéaire complexe $\widetilde{z}$, notée $\widetilde{h} * \widetilde{x}$, est la *fonction* ou *distribution* complexe, d'une variable complexe, telle que :

$$\widetilde{z}(p) \triangleq (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) \triangleq \tfrac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - i\,\infty}^{\varsigma_0 + i\,\infty} \widetilde{h}(s)\,\widetilde{x}(p-s)\,ds \triangleq \tfrac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - i\,\infty}^{\varsigma_0 + i\,\infty} \widetilde{h}(p-s)\,\widetilde{x}(s)\,ds\,;$$

avec : $s \in RDC$ de $\widetilde{h}$ et $p - s \in RDC$ de $\widetilde{x}$ pour la première intégrale et $p - s \in RDC$ de $\widetilde{h}$ et $s \in RDC$ de $\widetilde{x}$ pour la seconde.

L'une ou l'autre de ces intégrales peut se calculer le long d'un contour fermé incluant la droite $s = \varsigma_0$ et se refermant, à l'infini, à droite ou à gauche en utilisant le théorème des résidus.

On peut également faire le changement de variable $s = \varsigma_0 + i\,\varpi$ et donc $ds = i\,d\varpi$:

$$\widetilde{z}(p) = (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \tfrac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(\varsigma_0 + i\,\varpi)\,\widetilde{x}(p - \varsigma_0 - i\,\varpi)\,d\varpi$$
$$= \tfrac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(p - \varsigma_0 - i\,\varpi)\,\widetilde{x}(\varsigma_0 + i\,\varpi)\,d\varpi.$$

Ces intégrales peuvent se calculer dans le cas où les intégrandes sont des fractions rationnelles en les décomposant en éléments simples. Ces intégrales doivent alors être prises au sens de la valeur principale de Cauchy.

Exemple : soient :

$\widetilde{h}(p) = \frac{-4}{(p+2)\,(p-2)}$; avec une RDC telle que $-2 < \sigma < 2$ et :
$\widetilde{x}(p) = \frac{2}{(p+1)\,(p+3)}$; avec une RDC telle que $-1 < \sigma$. Alors :

$\widetilde{z}(p) = (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \frac{2}{(p+3)\,(p+5)}$ pour $-3 < \sigma$.

33. ou analytiques

Démonstration

$\widetilde{z}(p) = (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\varsigma_0 - i\,\infty}^{\varsigma_0 + i\,\infty} \frac{-8}{(s+2)\,(s-2)\,(p-s+1)\,(p-s+3)}\,ds$; avec :

$-2 < \varsigma_0 < 2$ et $-1 < \sigma - \varsigma_0$; ce qui impose $-3 < \varsigma_0 - 1 < \sigma$. Par conséquent :

$\widetilde{z}(p) = (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \frac{-4}{\pi\,i}\,\int_{\varsigma_0 - i\,\infty}^{\varsigma_0 + i\,\infty} \frac{ds}{D(s)}$;
avec $D(s) = (s+2)\,(s-2)\,(s-p-1)\,(s-p-3)$; soit
$D^{'}(s) = (s-2)\,(s-p-1)\,(s-p-3) + (s+2)\,(s-p-1)\,(s-p-3)$
$+\,(s+2)\,(s-2)\,(s-p-3) + (s+2)\,(s-2)\,(s-p-1)$.

Les pôles de l'intégrande sont simples et égaux à $s_1 = -2$, $s_2 = 2$, $s_3 = p+1$ et $s_4 = p+3$ et leurs parties réelles sont respectivement $\varsigma_1 = -2$, $\varsigma_2 = 2$, $\varsigma_3 = \sigma + 1$ et $\varsigma_4 = \sigma + 3$.

Pour calculer l'intégrale précédente :

- si $1 \leqslant \sigma$ choisissons $\varsigma_0 = 0$,
- si $-3 < \sigma \leqslant 1$ choisissons $-2 < \varsigma_0 = \frac{\sigma - 1}{2} < 0$,

Si on considère un contour γ constitué par la droite du plan complexe s d'équation $\varsigma_0 = 0$, dans le premier cas et $\varsigma_0 = \frac{\sigma-1}{2}$, dans le second et se refermant, à gauche de ce plan complexe par un demi-cercle de rayon infini on constate que seul le pôle $s_1 = 2$ est strictement à l'intérieur de ce contour.

Dans les 2 cas soit $I \triangleq \oint_\gamma \frac{ds}{D(s)}$. D'après le théoréme des résidus on a :

$I = 2\,\pi\,i\,\text{Rés}\,[\frac{1}{D(s)}, -2] = \frac{2\,\pi\,i}{D^{'}(-2)} = \frac{-\pi\,i}{2\,(p+3)\,(p+5)}$.

Mais l'intégrale sur le demi-cercle est nulle car $|s| = \infty$ et par conséquent :

$\widetilde{z}(p) = (\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \frac{-4}{\pi\,i}\,I = \frac{2}{(p+3)\,(p+5)}$ pour $-3 < \sigma$ QED.

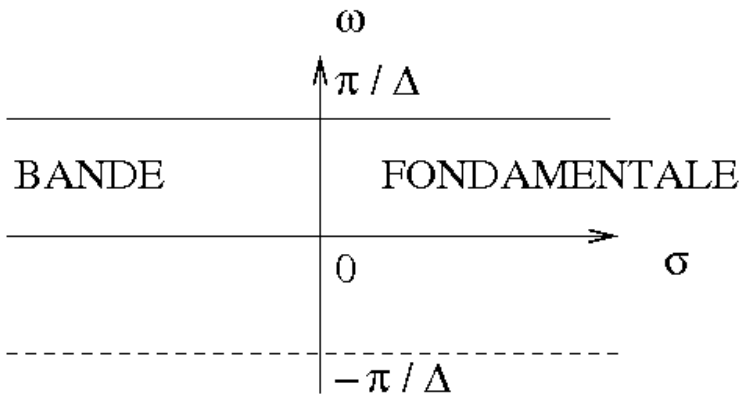
Cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable complexe, périodiques

Soient $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{x_e}$ deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable complexe, périodiques, i.e. telles que :

$\widetilde{h_e}(p \pm \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}) = \widetilde{h_e}(p)$ et $\widetilde{x_e}(p \pm \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}) = \widetilde{x_e}(p)$; $\forall n \in \mathbb{Z}$; avec $\Delta \in \mathbb{R}^+$.

Il suffit alors de définir ces *fonctions* ou *distributions* dans la bande fondamentale $\mathbb{B}$ du plan complexe telle que :

$\mathbb{B} = \{p = \sigma + i\,\omega \in \mathbb{C} \mid \omega \in]-\frac{\pi}{\Delta}\ \frac{\pi}{\Delta}]\}$.



Alors leur convolution linéaire complexe $\widetilde{z_e}$, notée $\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e}$, est la *fonction* ou *distribution* complexe, telle que :

$\widetilde{z_e}(p) \triangleq (\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e})(p) \triangleq \frac{\Delta}{2\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - \frac{\pi\,i}{\Delta}}^{\varsigma_0 + \frac{\pi\,i}{\Delta}} \widetilde{h_e}(s)\,\widetilde{x_e}(p-s)\,ds \triangleq \frac{\Delta}{2\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - \frac{\pi\,i}{\Delta}}^{\varsigma_0 + \frac{\pi\,i}{\Delta}} \widetilde{h_e}(p-s)\,\widetilde{x_e}(s)\,ds$; avec :

$s \in RDC$ de $\widetilde{h_e}$ et $p - s \in RDC$ de $\widetilde{x_e}$ pour la première intégrale et $p - s \in RDC$ de $\widetilde{h_e}$ et $s \in RDC$ de $\widetilde{x_e}$ pour la seconde.

On peut également faire le changement de variable $s = \varsigma_0 + i\,\varpi$ et donc $ds = i\,d\varpi$:

$\widetilde{z_e}(p) = (\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e})(p) = \frac{\Delta}{2\,\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \widetilde{h_e}(\varsigma_0 + i\,\varpi)\,\widetilde{x_e}(p - \varsigma_0 - i\,\varpi)\,d\varpi$
$= \frac{\Delta}{2\,\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} \widetilde{h_e}(p - \varsigma_0 - i\,\varpi)\,\widetilde{x_e}(\varsigma_0 + i\,\varpi)\,d\varpi.$

Exemple : soient :

$\widetilde{h_e}(p) = \frac{1}{2}\,e^{-\Delta\,p}$; avec $RDC = \mathbb{C}$ et
$\widetilde{x_e}(p) = 1 + e^{-\Delta\,p}$; avec $RDC = \mathbb{C}$; alors :

$\widetilde{z_e}(p) = \frac{1}{2}\,e^{-\Delta\,p} = \widetilde{h_e}(p)$; avec $RDC = \mathbb{C}$

Démonstration

$\widetilde{z_e}(p) = (\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e})(p) = \frac{\Delta}{2\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - \frac{\pi\,i}{\Delta}}^{\varsigma_0 + \frac{\pi\,i}{\Delta}} \frac{1}{2}\,e^{-\Delta\,s}\,[1 + e^{-\Delta\,(p-s)}]\,ds$
$= \frac{\Delta}{4\,\pi\,i} \int_{\varsigma_0 - \frac{\pi\,i}{\Delta}}^{\varsigma_0 + \frac{\pi\,i}{\Delta}} (e^{-\Delta\,s} + e^{-\Delta\,p})\,ds = \frac{\Delta}{4\,\pi\,i} \left\{ \left[\frac{e^{-\Delta\,s}}{-\Delta} \right]_{\varsigma_0 - \frac{\pi\,i}{\Delta}}^{\varsigma_0 + \frac{\pi\,i}{\Delta}} + e^{-\Delta\,p}\,\frac{2\,\pi\,i}{\Delta} \right\} = \frac{1}{2}\,e^{-\Delta\,p}$
$= \widetilde{h_e}(p)$; avec $RDC = \mathbb{C}$ QED.

4.4.2 Remarque concernant la convolution linéaire complexe

On verra que la transformée de Laplace directe d'un produit de deux signaux est la convolution linéaire complexe des transformées de Laplace directes de chacun d'eux.

4.4.3 Convolution linéaire fréquentielle

La définition de le convolution linéaire fréquentielle de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle fréquentielle, est différente selon qu'elles sont *non périodiques* ou *périodiques*. Dans la suite soient ν et μ deux variables réelles fréquentielles.

Cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle, non périodiques

Soient $\widehat{h}$ et $\widehat{x}$ deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle fréquentielle, non périodiques.
Alors leur convolée linéaire fréquentielle $\widehat{z}$, notée $\widehat{h} * \widehat{x}$, est la *fonction* ou *distribution* complexe, d'une variable réelle fréquentielle, telle que :

$$\widehat{z}(\nu) = (\widehat{h} * \widehat{x})(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\mu)\, \widehat{x}(\nu - \mu)\, d\mu \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu - \mu)\, \widehat{x}(\mu)\, d\mu.$$

Exemple : soient :

$\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{1+\pi^2\,\nu^2}$ et :
$\widehat{x}(\nu) = \frac{2}{(1+2\,\pi\,i\,\nu)\,(3+2\,\pi\,i\,\nu)}$; alors :

$\widehat{z}(\nu) = \frac{2}{(3+2\,\pi\,i\,\nu)\,(5+2\,\pi\,i\,\nu)}$.

Cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle, périodiques

Soient $\widehat{h_e}$ et $\widehat{x_e}$ deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle fréquentielle, périodiques, i.e. telles que :

$\widehat{h_e}(\nu \pm \ \frac{n}{\Delta}) = \widehat{h_e}(\nu)$ et $\widehat{x_e}(\nu \pm \ \frac{n}{\Delta}) = \widehat{x_e}(\nu)$; $\forall n \ \in \ \mathbb{Z}$; avec $\Delta \ \in \ \mathbb{R}^+$.

Il suffit alors de définir ces *fonctions* ou *distributions* sur l'intervalle
$]-\frac{1}{2\,\Delta}\ \frac{1}{2\,\Delta}]$.

Alors leur convolution linéaire fréquentielle $\widehat{z_e}$, notée $\widehat{h_e} * \widehat{x_e}$, est la *fonction* ou *distribution* complexe, d'une variable réelle fréquentielle, telle que :

$$\widehat{z_e}(\nu) \triangleq (\widehat{h_e} * \widehat{x_e})(\nu) \triangleq \Delta \int_{-\frac{1}{2\,\Delta}}^{\frac{1}{2\,\Delta}} \widehat{h_e}(\mu)\, \widehat{x_e}(\nu - \mu)\, d\mu \triangleq \Delta \int_{-\frac{1}{2\,\Delta}}^{\frac{1}{2\,\Delta}} \widehat{h_e}(\nu - \mu)\, \widehat{x_e}(\mu)\, d\mu.$$

Exemple : soient :

$\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1}{2}\, e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ et :
$\widehat{x_e}(\nu) = 1 + e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$; alors :

$\widehat{z_e}(\nu) \triangleq (\widehat{h_e} * \widehat{x_e})(\nu) = \frac{1}{2}\, e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu} = \widehat{h_e}(\nu)$.

4.4.4 Remarque concernant la convolution linéaire fréquentielle

On verra que la transformée de Fourier directe d'un produit de deux signaux est la convolution linéaire fréquentielle des transformées de Fourier directes de chacun d'eux.

TRANSFORMATIONS CONTINUES

Les transformations continues que nous allons considérer sont des transformations intégrales [18] [34] [38] [35].

Définition des transformations intégrales

Soit une *fonction* $h(t)$ complexe, de la variable réelle t (donc un signal en *temps continu*) et $K(x,t)$ une *fonction*, complexe, de deux variables réelles x et t telles que le produit $K(x,t)\,h(t)$ est sommable en tant que fonction de t dans l'intervale $(a\ b)$. Alors soit :

$$\boxed{g(x) \triangleq \int_a^b K(x,t)\,h(t)\,dt}.$$

Cette *transformation directe* de h à g est appelée *transformation intégrale* de *noyau* K. Lorsque le noyau est fixé et que la correspondance de h à g est bijective d'un ensemble de fonctions h à un ensemble de fonctions g on considère la *transformation inverse* qui fait correspondre h à g. La formule qui décrit cette transformation inverse en terme de transformation intégrale s'appelle la *formule d'inversion*.

Nous allons considérer les principales transformations intégrales directes et inverses qui sont utilisées en traitement du signal déterministe. Elles correspondent à diverses variables x, à divers noyaux K et divers intervalles $(a\ b)$. Lorsque a et b sont finis il s'agit de transformations *finies* et lorsque a ou b est infini de transformations *infinies* [41].

Transformations continues infinies présentées dans ce rapport

• Transformations de Fourier [18] [36] [2] [37] [28] [38] [30] [39] [24] [40] [8] [41] [27] [42] [38] [43] [3] [44] [39] [45] [40] [46] et transformation de Fourier-Stieltjes [15] [38] [47] [39].

34. § 220 pp. 838-840
35. p. 911
36. § 160 pp. 624-628 et Table 11.II pp. 1761-1764
37. § 2.2.8 pp. 88-90
38. pp. 371-374
39. Ch. IV pp. 53-85
40. Ch. 4 pp. 161-289
41. Ch. 12 pp. 221-263
42. 2. K. B. Howell. pp. 95-226
43. pp. 668-672
44. pp. 905-935
45. « Fourier transform » 21 pages
46. « Fourier transform » 5 pages
47. p. 667

• Transformations de Fourier en cosinus [18] [48] [27] [49] [38] [50] [39] [51] et en sinus [18] [52] [27] [53] [38] [54] [39] [55].

• Transformations de Hartley [9] [8] [56] [41] [57] [27] [58] [38] [59] [39] [60].

• Transformations de Hankel [32] [61] [18] [62] [8] [63] [41] [64] [27] [65] [38] [66] [3] [67] [39] [68].

• Transformations de Laplace [18] [69] [2] [70] [31] [71] [28] [72] [24] [73] [8] [74] [41] [75] [38] [76] [27] [77] [3] [78] [39] [79] et transformation de Laplace-Stieltjes [18] [80] [38] [81]. [39] [82].

---

48. pp. 625-626
49. 3. K. P. Yip. pp. 227-280
50. pp. 663-668
51. « Sine and cosine transforms » 3 pages
52. pp. 625-626
53. 3. K. P. Yip. pp. 227-280
54. pp. 663-668
55. « Sine and cosine transforms » 3 pages
56. pp.385-410 (surtout discrète)
57. Ch. 13 pp. 265-271
58. 4. K. J. Olejniczak. pp. 281-330
59. pp. 801-802 (surtout discrète)
60. « Hartley transform » 4 pages
61. pp. 6, 53, 59, 60, 62, 82 (surtout discrètes)
62. pp. 838-839 p. 911
63. Ch. 12 pp. 241, 244, 249, 254 (à n dimensions), 296, 420
64. Ch. 21 pp. 371-388
65. 9. R. Piessens. pp. 719-746
66. pp. 790-791
67. pp. 906-908
68. « Hankel transform » 8 pages
69. § 240 pp. 886-891 et Table 12 pp. 1764-1766
70. § 8.3 Analyse symbolique pp. 510-559
71. pp. 238-267
72. pp. 395-420
73. pp. 573-627
74. Ch. 11 pp.219-240
75. Ch. 5 et 6 pp. 115-147 et pp. 147-161
76. pp. 1032-1034
77. 5. S. Seely. pp. 331-386
78. Ch. 15 pp. 905-981
79. « Laplace transform » 24 pages
80. Partie D p. 839
81. p. 1032
82. « Laplace-Stieltjes transform » 4 pages

• Transformations de Mellin [22] [18] [83] [8] [84] [41] [85] [27] [86] [38] [87] [3] [88] [39] [89] [5] [13].

• Transformations de Carson [2] [90].

• Transformations de Gabor [41] [91] [39] [92].

• Transformations en ondelettes [41] [93] [27] [94] [39] [95] [38] [96] [12].

• Transformations en z modifiées [20] [97] [39] [98].

Il existe, en fait, un grand nombre de transformations mathématiques continues infinies ou finies, dont les noms et parfois les définitions varient selon les auteurs. A notre connaissance les ouvrages les plus complets dans ce domaine sont ceux de A. I. Zayed [41] et de A. D. Poularikas [27].

Les transformations mathématiques répertoriées dans le premier ouvrage sont indiquées en Annexe A et celles répertoriées dans le second en Annexe B.

83. Partie C p. 839
84. pp.254-257
85. Ch. 10 pp. 201-214
86. 11. J. Bertrand, P. Bertrand et J.-P. Ovarlez. pp. 829-886
87. p. 1157
88. p. 906
89. « Transformation de Mellin » 4 pages
90. pp. 510,538
91. Ch. 30 pp. 491-505
92. « Gabor transform » 3 pages
93. Ch. 32 pp. 531-555
94. 10. Y. Sheng. pp. 747-828
95. « Ondelette » 5 pages, « Transformée en ondelette continue » 3 pages, « Transformée en ondelette discrète » 1 page, « Compression par ondelette » 5 pages, « Une exploration des signaux en ondelette par Stéphane Mallat » (hypertexte) 3 pages
96. p. 185 pp. 781-782 p.1063 pp. 1924-1925
97. pp.41-50
98. « Advanced Z-transform » 3 pages

5 Transformations de Fourier

On pourra consulter [18] [99] [2] [100] [28] [101] [30] [102] [24] [103] [8] [41] [104] [27] [105] [38] [106] [3] [107] [39] [108] [40] [109].

Attention [41] utilise, dans la définition ci-après, un signe + dans l'exponentielle et non un signe -.

Nous ne définissons que les transformations de Fourier à une dimension. On peut généraliser à plusieurs dimensions (cf. ci-après Transformation de Hankel).

5.1 TFD : Transformation de Fourier Directe

On appelle Transformation de Fourier Directe (TFD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{F} \ : \ h \mapsto \widehat{h}$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $\widehat{h}$ [110] complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, telle que :

$$\boxed{\widehat{h}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt}.$$

On a donc $\widehat{h} \triangleq \mathcal{F}\, h$ et on note parfois $\widehat{h} \triangleq \mathcal{F}\,[h(t)]$ [111].

Condition nécessaire et/ou suffisante pour que $\widehat{h}$ soit une fonction

Lorsque h est un signal en *temps continu* une condition nécessaire, mais non suffisante, pour que $\widehat{h}$ soit une *fonction* est que $\lim_{t\to\pm\infty} h(t) = 0$. Une condition suffisante, mais non nécessaire est que le signal h soit sommable ; alors on démontre que $\widehat{h}$ est une *fonction continue* et *bornée* [28] [112].

99. § 160 pp. 624-628 et Table 11.II pp. 1761-1764
100. § 2.2.8 pp. 88-90
101. pp. 371-374
102. Ch. IV pp. 53-85
103. Ch. 4 pp. 161-289
104. Ch. 12 pp. 221-263
105. 2. K. B. Howell. pp. 95-226
106. pp. 668-672
107. pp. 905-935
108. « Fourier transform » 21 pages
109. « Fourier transform » 5 pages
110. notation de la majorité des auteurs
111. *Remarque* : parfois l'intégrande intervenant dans la définition de la TFD n'est pas sommable et on définit alors la TFD par la valeur principale de Cauchy de l'intégrale
112. p. 374

• On a $\widehat{h} = \widehat{h}_R + i\,\widehat{h}_I$, avec $\widehat{h}_R \in \mathbb{R}$ et $\widehat{h}_I \in \mathbb{R}$. De plus, étant donné que $h = h_R + i\,h_I$, avec $h_R \in \mathbb{R}$ et $h_I \in \mathbb{R}$, on a également, par linéarité, $\widehat{h} = \widehat{h_R} + i\,\widehat{h_I}$, avec $\widehat{h_R} \in \mathbb{C}$ et $\widehat{h_I} \in \mathbb{C}$.

On trouve immédiatement :

$\widehat{h}_R(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}[h_R(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t) + h_I(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)]\,dt$,
$\widehat{h}_I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}[h_I(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t) - h_R(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)]\,dt$,
$\widehat{h_R}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_R(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt$,
$\widehat{h_I}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_I(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt$.

• De même on a $\widehat{h_p} = \widehat{h_{pR}} + i\,\widehat{h_{pI}}$, avec $\widehat{h_{pR}} \in \mathbb{R}$ et $\widehat{h_{pI}} \in \mathbb{R}$. De plus, étant donné que $h_p = h_{pR} + i\,h_{pI}$, avec $h_{pR} \in \mathbb{R}$ et $h_{pI} \in \mathbb{R}$, on a également, par linéarité, $\widehat{h_p} = \widehat{h_{pR}} + i\,\widehat{h_{pI}}$ et on va voir que $\widehat{h_{pR}} \in \mathbb{R}$ et $\widehat{h_{pI}} \in \mathbb{R}$.

Étant donné que les signaux $h_{pR}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)$ et $h_{pI}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)$ sont *pairs* et les signaux $h_{pR}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)$ et $h_{pI}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)$ *impairs* on trouve immédiatement :

$\widehat{h_{pR}}(\nu) = \widehat{h_{pR}}(\nu) = 2\,\int_0^{\infty} h_{pR}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{R}$, *fonction* ou *distribution paire*,
$\widehat{h_{pI}}(\nu) = \widehat{h_{pI}}(\nu) = 2\,\int_0^{\infty} h_{pI}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{R}$, *fonction* ou *distribution paire*. Et donc :
$\widehat{h_p}(\nu) = 2\,\int_0^{\infty} h_p(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{C}$, *fonction* ou *distribution paire* (cf. $TFCD$).

• De même on a $\widehat{h_i} = \widehat{h_{iR}} + i\,\widehat{h_{iI}}$, avec $\widehat{h_{iR}} \in \mathbb{R}$ et $\widehat{h_{iI}} \in \mathbb{R}$. De plus, étant donné que $h_i = h_{iR} + i\,h_{iI}$, avec $h_{iR} \in \mathbb{R}$ et $h_{iI} \in \mathbb{R}$, on a également, par linéarité, $\widehat{h_i} = \widehat{h_{iR}} + i\,\widehat{h_{iI}}$ et on va voir que $\widehat{h_{iR}} \in i\,\mathbb{R}$ et $\widehat{h_{iI}} \in i\,\mathbb{R}$.

Étant donné que les signaux $h_{iR}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)$ et $h_{iI}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)$ sont *pairs* et les signaux $h_{iR}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)$ et $h_{iI}(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)$ *impairs* on trouve immédiatement :

$\widehat{h_{iR}}(\nu) = i\,\widehat{h_{iI}}(\nu) = 2\,\int_0^{\infty} h_{iI}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{R}$, *fonction* ou *distribution impaire*,
$\widehat{h_{iI}}(\nu) = -i\,\widehat{h_{iR}}(\nu) = -2\,\int_0^{\infty} h_{iR}(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{R}$, *fonction* ou *distribution impaire*. Et donc :
$\widehat{h_i}(\nu) = -2\,i\,\int_0^{\infty} h_i(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt \in \mathbb{C}$, *fonction* ou *distribution impaire* (cf. $TFSD$).

• Comme $h = h_p + h_i$ on a $\widehat{h} = \widehat{h_p} + \widehat{h_i}$ et donc $\widehat{h}_R = \widehat{h_{pR}} + \widehat{h_{iR}} \in \mathbb{R}$ et $\widehat{h}_I = \widehat{h_{pI}} + \widehat{h_{iI}} \in \mathbb{R}$.

Étant donné que $\widehat{h_p}$, $\widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{pI}}$ sont *paires* et $\widehat{h_i}$, $\widehat{h_{iR}}$ et $\widehat{h_{iI}}$ *impaires* on constate que $\widehat{h_p}$ et $\widehat{h_i}$ sont respectivement les parties *paire* et *impaire* de $\widehat{h}$ (donc $\widehat{h_p} = \widehat{h_p}$ et $\widehat{h_i} = \widehat{h_i}$), que $\widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{iR}}$ sont respectivement les parties *paire* et *impaire* de $\widehat{h_R}$ (donc $\widehat{h_{Rp}} = \widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{Ri}} = \widehat{h_{iR}}$) et que $\widehat{h_{pI}}$ et $\widehat{h_{iI}}$ sont respectivement les parties *paire* et *impaire* de $\widehat{h_I}$ (donc $\widehat{h_{Ip}} = \widehat{h_{pI}}$ et $\widehat{h_{Ii}} = \widehat{h_{iI}}$).

Par conséquent :

$\widehat{h_p}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h}(\nu) + \widehat{h}(-\nu)]$ et $\widehat{h_i}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h}(\nu) - \widehat{h}(-\nu)]$
$\widehat{h_{pR}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_R}(\nu) + \widehat{h_R}(-\nu)]$ et $\widehat{h_{iR}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_R}(\nu) - \widehat{h_R}(-\nu)]$
$\widehat{h_{pI}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_I}(\nu) + \widehat{h_I}(-\nu)]$ et $\widehat{h_{iI}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_I}(\nu) - \widehat{h_I}(-\nu)]$.

• Comme $h = h_p + h_i$ on a $h_R = h_{pR} + h_{iR} \in \mathbb{R}$ et $h_I = h_{pI} + h_{iI} \in \mathbb{R}$ et : $\widehat{h_R} = \widehat{h_{pR}} + \widehat{h_{iR}} = \widehat{h_{pR}} + i\,\widehat{h_{iI}}$ et $\widehat{h_I} = \widehat{h_{pI}} + \widehat{h_{iI}} = \widehat{h_{pI}} - i\,\widehat{h_{iR}}$

Étant donné que $\widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{pI}}$ sont *paires* et $\widehat{h_{iR}}$ et $\widehat{h_{iI}}$ *impaires* on constate que $\widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{iR}}$ sont respectivement les parties *paire* et *impaire* de $\widehat{h_R}$ (donc $\widehat{h_{Rp}} = \widehat{h_{pR}}$ et $\widehat{h_{Ri}} = \widehat{h_{iR}}$) et $\widehat{h_{pI}}$ et $\widehat{h_{iI}}$ respectivement les parties *paire* et *impaire* de $\widehat{h_I}$ (donc $\widehat{h_{Ip}} = \widehat{h_{pI}}$ et $\widehat{h_{Ii}} = \widehat{h_{iI}}$).

Par conséquent :

$\widehat{h_{pR}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_R}(\nu) + \widehat{h_R}(-\nu)]$ et $\widehat{h_{iR}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_R}(\nu) - \widehat{h_R}(-\nu)]$
$\widehat{h_{pI}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_I}(\nu) + \widehat{h_I}(-\nu)]$ et $\widehat{h_{iI}}(\nu) = \frac{1}{2}\,[\widehat{h_I}(\nu) - \widehat{h_I}(-\nu)]$.

5.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret*

Soit h_e un signal en *temps discret* ; alors :

$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}}$.

Démonstration

$\widehat{h_e}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)]\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt$
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, \delta_{k\,\Delta}(t)\, dt] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$
(car $e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}$ est un signal en *temps continu* qui est *continu*) QED.

On en déduit que $\widehat{h_e}$ est une *fonction* ou *distribution* périodique, de période $\nu_e \triangleq \frac{1}{\Delta}$; il suffit de l'étudier, par exemple, sur l'intervalle $]-\frac{1}{2\,\Delta}\ \frac{1}{2\,\Delta}]$ ou sur l'intervalle $]-\pi\ \pi]$ si on la considère comme une fonction de $\theta \triangleq 2\,\pi\,\Delta\,\nu$.

On constate que :

$\widehat{h_{e\,p}}(\nu) = h_{p\,0} + 2\,\sum_{k=1}^{\infty} h_{p\,k}\,\cos(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ [car $h_{p\,k}\,\cos(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ est *pair* en fonction de k et $h_{p\,k}\,\sin(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ est *impair* en fonction de k] et :

$\widehat{h_{e\,i}}(\nu) = -2\,i\,\sum_{k=1}^{\infty} h_{i\,k}\,\sin(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ [car $h_{i\,k}\,\sin(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ est *pair* en fonction de k et $h_{i\,k}\,\cos(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ est *impair* en fonction de k].

5.1.2 Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h quelconque

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* quelconque il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]\,;\,\forall k \in \mathbb{Z}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]-\infty\ \infty[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu - \frac{n}{\Delta})}.$$

Démonstration : cf. Annexe C.

Formule de Poisson, en fréquence

Soit le signal en *temps continu* constant égal à 1 et donc *continu*.
On a $1_e = p_\Delta$ et $\mathcal{F}\,1 = \delta_0$ (cf. ci-après) et on en déduit que :

$$\boxed{\widehat{p_\Delta}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu} = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_0(\nu - \frac{n}{\Delta}) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{\Delta}}(\nu)}.$$

Il s'agit de la formule de Poisson, en fréquence. On constate que $\widehat{p_\Delta}$ est une *distribution*.

5.1.3 *Exemples* de TFD

i) Exemples de TFD de signaux en temps continu

Exemple : TFD de la fonction sgn [29] [30] [113]

La théorie des distributions conduit à :

$\mathcal{F}\,[\mathrm{sgn}(t)] = \frac{1}{\pi\,i}\,j$ (cf. *Exemple 7*). Soit :

$j(t) = \pi\,i\,v.p.\,\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(\tau)\,e^{-2\,\pi\,i\,t\,\tau}\,d\tau = 2\,\pi\,\int_0^{\infty} \sin(2\,\pi\,t\,\tau)\,d\tau$ car la fonction $\mathrm{sgn}(\tau)\,\sin(2\,\pi\,t\,\tau)$ est *paire* et la fonction $\mathrm{sgn}(\tau)\,\cos(2\,\pi\,t\,\tau)$ est *impaire*.

113. p. 71

On peut d'ailleurs considérer la dernière égalité comme la *définition* de la *distribution j* (cf. *Exemple 7*).

Exemple 1 : $\widehat{h}(\nu) = \frac{2\,a}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* réelle *paire*.

Exemple 5 : $\widehat{h}(\nu) = -\frac{4\,\pi\,i\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* imaginaire pure *impaire*.

Exemple 7 : $\widehat{j}(\nu) \triangleq v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}}{t}\,dt = -\pi\,i\,\mathrm{sgn}(\nu)$, *fonction* imaginaire pure *impaire* [18] [114] [29] [115] [30] [116].

ii) Exemples de TFD de signaux en temps discret

TFD d'une impulsion de Dirac

$\widehat{\delta_{t_0}}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt = e^{-2\,\pi\,i\,t_0\,\nu}$ (car $e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}$ est un signal en *temps continu* qui est *continu*), *fonction* complexe.

En particulier, en faisant $t_0 = 0$, $\widehat{\delta_0}(\nu) = 1$, *fonction* réelle *paire*.

Exemple 1_e : $\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1-q^2}{1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* réelle périodique *paire*.

Exemple 5_e : $\widehat{h_e}(\nu) = -\frac{2\,i\,q\,\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)}{1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* imaginaire pure périodique *impaire*.

5.1.4 Formule de Parseval-Plancherel pour la TFD

Soient h et x deux signaux complexes, ayant des propriétés de continuité et de sommabilité suffisantes. On définit le produit scalaire, dans l'espace temporel :

$< h,\, x > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,x^*(t)\,dt$.

Et le produit scalaire, dans l'espace fréquentiel :

$< \widehat{h},\, \widehat{x} > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\,\widehat{x}^*(\nu)\,d\nu$. Alors :

$< h,\, x > = < \widehat{h},\, \widehat{x} >$

et en particulier si $h = x$:

$||h|| \triangleq \sqrt{< h,\, h >} = ||\widehat{h}|| \triangleq \sqrt{< \widehat{h},\, \widehat{h} >}$ [rappel : $x^*(t)$ et $\widehat{x}^*(\nu)$ sont, respectivement les nombres complexes *conjugés* de $x(t)$ et $\widehat{x}(\nu)$].

114. p. 1762 mais avec un signe érroné
115. pp. 40-41
116. p. 71

Démonstration

Supposons que les propriétés de continuité et de sommabilité de x permettent d'écrire l'Intégrale de Fourier (IF) (cf. TFI) :

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$; donc :

$x^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{x}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}]^*\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}^*(\nu)\, e^{-2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$. En conséquence :

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, x^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, [\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}^*(\nu)\, e^{-2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu]\, dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt]\, \widehat{x}^*(\nu)\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, \widehat{x}^*(\nu)\, d\nu$ QED.

Exemple 1 : $h(t) = e^{-a\,|t|}$ et $\widehat{h}(\nu) = \frac{2\,a}{a^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2}$; alors on vérifie que :

$||h|| \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,a\,|t|}\, dt} = ||\widehat{h}|| \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,a^2}{(a^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

5.1.5 TFD d'une convolution linéaire de signaux

i) Signaux en temps continu

Soit $s \triangleq h * x$; alors $\widehat{s} \triangleq \widehat{h * x} = \widehat{h}\, \widehat{x}$.

Démonstration

$\widehat{s}(\nu) \triangleq \widehat{h * x}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (h * x)(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)\, x(\tau)\, d\tau]\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt$.

Soit, dans l'intégrale externe, le changement de variable $u = t - \tau$; avec τ fixé. Alors $du = dt$ et :

$\widehat{s}(\nu) \triangleq \widehat{h * x}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, x(\tau)\, d\tau]\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, (u + \tau)}\, du$
$= [\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, u}\, du]\, [\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, \tau}\, d\tau] = \widehat{h}(\nu)\, \widehat{x}(\nu)$ QED.

Une condition suffisante au calcul de la convolée linéaire de deux signaux en *temps continu* est qu'ils soient sommables, mais elle n'est pas nécessaire.

Exemple 1 « étendu » : soient le signal h de l'*exemple 1* et le signal x également de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b ($0 < b$; $b \neq a$). On a vu (cf. Convolution linéaire de deux signaux en *temps continu*) que :

$(h * x)(t) = \frac{2\,a\, e^{-b\,|t|} - 2\,b\, e^{-a\,|t|}}{a^2 - b^2}$.

Or (cf. ci-devant) $\widehat{h}(\nu) = \frac{2\,a}{a^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2}$ et donc $\widehat{x}(\nu) = \frac{2\,b}{b^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2}$ et on vérifie que :

$\widehat{h * x}(\nu) = \widehat{h}(\nu)\, \widehat{x}(\nu) = \frac{4\,a\,b}{(a^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2)\,(b^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2)}$.

Cas particulier des transformées de Hilbert [26] [117]

Nous avons vu que h la transformée de Hilbert directe de h est, au facteur multiplicatif $\frac{1}{\pi}$ près, la convolée linéaire entre h et j (cf. *Exemple 7*) :

$\mathrm{h}(t) \triangleq \frac{1}{\pi}\,(h * j)(t)$. Donc $\widehat{\mathrm{h}}(\nu) = \frac{1}{\pi}\,\widehat{h}(\nu)\,\widehat{j}(\nu) = -i\,\widehat{h}(\nu)\,\mathrm{sgn}(\nu)$.

De même nous avons vu que $\overline{\mathrm{h}}$ la transformée de Hilbert inverse de h est, au même facteur multiplicatif $\frac{1}{\pi}$ près, l'opposée de la convolée linéaire entre h et j :

$\overline{\mathrm{h}}(t) \triangleq -\frac{1}{\pi}\,(\mathrm{h} * j)(t)$. Donc $\widehat{\overline{\mathrm{h}}}(\nu) = -\frac{1}{\pi}\,\widehat{\mathrm{h}}(\nu)\,\widehat{j}(\nu) = i\,\widehat{\mathrm{h}}(\nu)\,\mathrm{sgn}(\nu)$.

On en déduit que :

$\widehat{\overline{\mathrm{h}}}(\nu) = i\,[-i\,\widehat{h}(\nu)\,\mathrm{sgn}(\nu)]\,\mathrm{sgn}(\nu) = \widehat{h}(\nu)$

Par conséquent, avec des hypothèses de régularités suffisantes, on aura $\overline{\mathrm{h}} = h$ (cf. TFI), comme annoncé dans la partie « Convolutions ».

ii) Signaux en temps discret

Soit $u_e \triangleq h_e * x_e$; alors $\widehat{u_e} \triangleq \widehat{h_e * x_e} = \widehat{h_e}\,\widehat{x_e}$.

Démonstration

$\widehat{u_e}(\nu) \triangleq \widehat{h_e * x_e}(\nu) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{k-l}\,x_l]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$.

Soit dans la somme externe $j = k - l$; avec l fixé. Alors :

$\widehat{u_e}(\nu) \triangleq \widehat{h_e * x_e}(\nu) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_j\,x_l)\,e^{-2\,(j+l)\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$
$= (\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j\,e^{-2\,j\,\pi\,i\,\Delta\,\nu})\,(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l\,e^{-2\,l\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}) = \widehat{h_e}(\nu)\,\widehat{x_e}(\nu)$ QED.

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e, On a vu (cf. Convolution linéaire de deux signaux en *temps discret* causaux à même support borné) que :

$(h_e * \chi_e)_0 = 0$, $(h_e * \chi_e)_1 = \frac{1}{2}$, $(h_e * \chi_e)_2 = \frac{1}{2}$.

Or, de manière immédiate d'après la définition :

$\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ et $\widehat{\chi_e}(\nu) = 1 + e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$.

On vérifie donc que :

$\widehat{h_e * x_e}(\nu) = \widehat{h_e}(\nu)\,\widehat{x_e}(\nu) = \frac{1}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu} + \frac{1}{2}\,e^{-4\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$.

117. pp. 118-119 et 251-257

5.1.6 TFD d'un produit de signaux

i) Signaux en temps continu

Soit $z = h\,x$; alors $\widehat{z} \triangleq \widehat{h\,x} = \widehat{h} * \widehat{x}$.

Démonstration

$(\widehat{h} * \widehat{x})(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\mu)\,\widehat{x}(\nu-\mu)\,d\mu$
$\triangleq \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\mu\,t}\,dt]\,[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-2\,\pi\,i\,(\nu-\mu)\,\tau}\,d\tau]\,d\mu$
$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,\tau}\,[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\,i\,(\tau-t)\,\mu}\,d\mu]\,d\tau\}\,dt.$

Mais nous verrons (cf. ci-après : Transposition du temps et de la fréquence) que :

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\,i\,(\tau-t)\,\mu}\,d\mu = \delta_t(\tau)$ et, par conséquent :

$(\widehat{h} * \widehat{x})(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,x(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt \triangleq \widehat{h\,x}(\nu) \triangleq \widehat{z}(\nu)$ QED.

Une condition suffisante au calcul de la TFD du produit de deux *signaux en* temps continu est qu'ils soient de carrés sommables ; si de plus on peut calculer leur TFD alors la formule précédente a lieu.

Exemple : soient le signal non causal $h(t) = e^{-2\,|t|}$ (cf. *Exemple 1*, avec $a = 2$) ; alors on a vu que $\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{1+\pi^2\,\nu^2}$ et soit le signal causal $x(t) = (e^{-t} - e^{-3\,t})\,\upsilon(t)$ (cf. *Exemple 6* ci-après, avec $a = 1$ puis $a = 3$). Alors on verra que $\widehat{x}(\nu) = \frac{1}{1+2\,\pi\,i\,\nu} - \frac{1}{3+2\,\pi\,i\,\nu} = \frac{2}{(1+2\,\pi\,i\,\nu)\,(3+2\,\pi\,i\,\nu)}$.

On en déduit que $h(t)\,x(t) = (e^{-3\,t} - e^{-5\,t})\,\upsilon(t)$ (cf. *Exemple 6* ci-après, avec $a = 3$ puis $a = 5$). Alors on verra que :
$\widehat{h\,x}(\nu) = \frac{1}{3+2\,\pi\,i\,\nu} - \frac{1}{5+2\,\pi\,i\,\nu} = \frac{2}{(3+2\,\pi\,i\,\nu)\,(5+2\,\pi\,i\,\nu)}$.

Or nous avions vu (cf. Convolution linéaire fréquentielle : cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle, non périodiques) que :

$(\widehat{h} * \widehat{x})(\nu) = \frac{2}{(3+2\,\pi\,i\,\nu)\,(5+2\,\pi\,i\,\nu)}$. On vérifie bien que $\widehat{h\,x} = \widehat{h} * \widehat{x}$.

ii) Signaux en temps discret

Soit $z_e = h_e\,x_e$; alors $\widehat{z_e} \triangleq \widehat{h_e\,x_e} = \widehat{h_e} * \widehat{x_e}$.

Démonstration

$(\widehat{h_e} * \widehat{x_e})(\nu) \triangleq \Delta \int_{-\frac{1}{2\,\Delta}}^{\frac{1}{2\,\Delta}} \widehat{h_e}(\mu)\,\widehat{x_e}(\nu-\mu)\,d\mu$
$\triangleq \Delta \int_{-\frac{1}{2\,\Delta}}^{\frac{1}{2\,\Delta}} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\mu})\,[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l\,e^{-2\,l\,\pi\,i\,\Delta\,(\nu-\mu)}]\,d\mu$
$= \Delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\,\{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l\,e^{-2\,l\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}\,[\int_{-\frac{1}{2\,\Delta}}^{\frac{1}{2\,\Delta}} e^{2\,(l-k)\,\pi\,i\,\Delta\,\mu}\,d\mu]\}.$

Mais $\int_{-\frac{1}{2\Delta}}^{\frac{1}{2\Delta}} e^{2(l-k)\pi i \Delta \mu}\, d\mu = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si} \quad l = k \\ 0 & \text{si} \quad l \neq k \end{cases}$ et, par conséquent :

$(\widehat{h_e} * \widehat{x_e})(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, x_k\, e^{-2k\pi i \Delta \nu} \triangleq (\widehat{h_e\, x_e})(\nu) \triangleq \widehat{z_e}(\nu)$ QED.

Exemple : soient, avec $N = 2$, les signaux h_e de l'*exemple* 3_e et χ_e de l'*exemple* 2_e.

Alors $z_0 = h_0\, \chi_0 = h_0 = 0$ et $z_1 = h_1\, \chi_1 = h_1 = \frac{1}{2}$. Et, par conséquent $z_e = h_e$, soit $\widehat{z_e} = \widehat{h_e}$; c'est bien ce que nous avions trouvé (cf. Convolution linéaire fréquentielle : cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle, périodiques).

5.1.7 Dualité

$\widehat{s} = \widehat{h * x} = \widehat{h}\,\widehat{x}$ et $\widehat{u_e} = \widehat{h_e * x_e} = \widehat{h_e}\,\widehat{x_e}$,
$\widehat{z} = \widehat{h\, x} = \widehat{h} * \widehat{x}$ et $\widehat{z_e} = \widehat{h_e\, x_e} = \widehat{h_e} * \widehat{x_e}$.

5.1.8 Translation temporelle

Soit $h'(t) \triangleq h(t - t_0)$; alors :

$\widehat{h'}(\nu) = e^{-2\pi i t_0 \nu}\, \widehat{h}(\nu)$.
Démonstration

$\widehat{h'}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t_0)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt$.

Posons $\tau = t - t_0$; avec t_0 fixé ; alors $d\tau = dt$ et :

$\widehat{h'}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-2\pi i \nu (t_0 + \tau)}\, dt = e^{-2\pi i t_0 \nu}\, \widehat{h}(\nu)$ QED.

5.1.9 TFD d'un signal causal

i) Signal en temps continu

Soit h un signal en *temps continu* causal, alors :

$\boxed{\widehat{h}(\nu) \triangleq \int_0^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt}$.

ii) Signal en temps discret

Soit h_e un signal en *temps discret* causal, alors :

$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, e^{-2k\pi i \Delta \nu}}$.

iii) Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]\,;\ \forall k \in \mathbb{Z}^{+*}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta$, $\forall k \in \mathbb{Z}^{+*}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ \infty[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu - \tfrac{n}{\Delta}) + h_0 - \tfrac{h(0+0)}{2}}.$$

Démonstration : cf. Annexe D.

iv) Exemples

a) Exemples de TFD de signaux en temps continu

Exemple 0 : $\widehat{v}(\nu) = \frac{1}{2}\,\delta_0(\nu) + \frac{1}{2\,\pi\,i}\,j(\nu)$, *distribution* complexe [30] [118].

Exemple 6 : $\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{a+2\,\pi\,i\,\nu} = \widehat{h}_R(\nu) + i\,\widehat{h}_I(\nu)$, *fonction* complexe ; avec :

$\widehat{h}_R(\nu) = \frac{a}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$ et :

$\widehat{h}_I(\nu) = \frac{-2\,\pi\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$.

Remarque : attention en faisant tendre a vers 0 on ne retrouve pas l'*exemple 0* car la limite de la *fonction* $\widehat{h}$ n'est pas une *fonction* mais une *distribution*.

b) Exemples de TFD de signaux en temps discret

Exemple 6_e : $\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1+q\,e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}}{2\,(1-q\,e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu})} = \widehat{h}_{e\,R}(\nu) + i\,\widehat{h}_{e\,I}(\nu)$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* complexe périodique ; avec :

$\widehat{h}_{e\,R}(\nu) = \frac{1-q^2}{2\,[1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2]}$ et :

$\widehat{h}_{e\,I}(\nu) = \frac{-2\,q\,\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)}{2\,[1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2]}$.

5.1.10 TFD d'un signal causal à support borné

i) Signal en temps continu

Soit h un signal en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$, alors :

$$\boxed{\widehat{h}(\nu) \triangleq \int_0^T h(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt}.$$

118. p. 71 éq. 105

ii) Signal en temps discret

Soit h_e un signal en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$, alors :

$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}}$.

iii) Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal à support borné.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$ il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]\,;\ k = 1, \ldots, N-1$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta\,;\ k = 1, \ldots, N-1$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ T[$) on a :

$\boxed{\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu - \frac{n}{\Delta}) + h_0 - \frac{h(0+0)}{2} - \frac{h(T-0)}{2}\, e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}}$.

Démonstration : cf. Annexe E.

iv) Exemples

a) Exemples de TFD de signaux en temps continu

Exemple 2 : $\widehat{\chi}(\nu) = \frac{1-e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}}{2\,\pi\,i\,\nu} = \widehat{\chi}_R(\nu) + i\,\widehat{\chi}_I(\nu)$, *fonction* complexe ; avec :

$\widehat{\chi}_R(\nu) = \frac{\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,\nu}$ et :
$\widehat{\chi}_I(\nu) = -\frac{1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,\nu}$
[et, par continuité, $\widehat{\chi}(0) = T$] .

Exemple 3 : $\widehat{h}(\nu) = \frac{(2\,\pi\,i\,T\,\nu+1)\,e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}-1}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2} = \widehat{h}_R(\nu) + i\,\widehat{h}_I(\nu)$, *fonction* complexe ; avec :

$\widehat{h}_R(\nu) = \frac{\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-1+2\,\pi\,T\,\nu\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2}$ et :
$\widehat{h}_I(\nu) = \frac{2\,\pi\,T\,\nu\,\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2}$
[et, par continuité, $\widehat{h}(0) = \frac{T}{2}$].

Exemple 4 : $\widehat{h}(\nu) = \frac{i\,T\,(e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}-1)}{2\,\pi\,(T\,\nu-1)} = \widehat{h}_R(\nu) + i\,\widehat{h}_I(\nu)$, *fonction* complexe ; avec :

$\widehat{h}_R(\nu) = \frac{T\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,(T\,\nu-1)}$ et :
$\widehat{h}(\nu) = \frac{T\,[\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-1]}{2\,\pi\,(T\,\nu-1)}$
[et, par continuité $\widehat{h}(\frac{1}{T}) = T$].

b) Exemples de TFD de signaux en temps discret

Exemple 2_e : $\widehat{\chi_e}(\nu) = \frac{1-e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}}{1-e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}} = \widehat{\chi_e}_R(\nu) + i\,\widehat{\chi_e}_I(\nu)$, *fonction* complexe périodique ; avec :

$\widehat{\chi_e}_R(\nu) = \frac{1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+\cos[2\,\pi\,(T-\Delta)\,\nu]}{2\,[1-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)]}$ et :

$\widehat{\chi_e}_I(\nu) = \frac{\sin(2\,\pi\,T\,\nu)-\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)-\sin[2\,\pi\,(T-\Delta)\,\nu]}{2\,[1-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)]}$

[et, par continuité, $\widehat{\chi_e}(0) = N$].

Exemple 3_e : $\widehat{h_e}(\nu) = \widehat{h_e}_R(\nu) + i\,\widehat{h_e}_I(\nu)$, *fonction* complexe périodique ; avec :

$\widehat{h_e}_R(\nu) = \frac{N\,\sin(\pi\,\Delta\,\nu)\,\sin[(2\,N-1)\,\pi\,\Delta\,\nu]-\sin^2(N\,\pi\,\Delta\,\nu)}{2\,N\,\sin^2(\pi\,\Delta\,\nu)}$ et :

$\widehat{h_e}_I(\nu) = \frac{N\,\sin(\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos[(2\,N-1)\,\pi\,\Delta\,\nu]-\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos(N\,\pi\,\Delta\,\nu)}{2\,N\,\sin^2(\pi\,\Delta\,\nu)}$.

[et, par continuité, $\widehat{h_e}(0) = \frac{N-1}{2}$].

Exemple 4_e : $\widehat{h_e}(\nu) = \frac{1-e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}}{1-\omega_N^{-1}\,e^{-2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}} = \widehat{h_e}_R(\nu)+i\,\widehat{h_e}_I(\nu)$, *fonction* complexe périodique ; avec :

$\widehat{h_e}_R(\nu) = \frac{\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos\{\pi\,[(N-1)\,\Delta\,\nu+\frac{1}{N}]\}}{\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]}$ et :

$\widehat{h_e}_I(\nu) = \frac{\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\sin\{\pi\,[(N-1)\,\Delta\,\nu+\frac{1}{N}]\}}{\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]}$

[et, par continuité, $\widehat{h_e}(\frac{1}{T}) = N$] (rappel : $\omega_N = e^{-\frac{2\,\pi\,i}{N}}$).

v) Valeurs discrètes de la TFD d'un signal en temps continu *causal à support borné*

Soit h un signal en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$, alors :

$\widehat{h}(\frac{n}{T}) = \int_0^T h(t)\,e^{-\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{T}}\,dt = \int_0^T h(t)\,e^{-i\,n\,\Omega\,t}\,dt = T\,c_n$ [avec $\Omega = \frac{2\,\pi}{T}$ et $c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\frac{n}{T})$ (cf. Décomposition en série de Fourier ; c_n est le coefficient du développement en série de Fourier de h_T)] .

Exemple 2 : $\widehat{\chi}(\frac{n}{T}) = \begin{cases} T & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$.

Exemple 3 : $\widehat{h}(\frac{n}{T}) = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{si} \quad n = 0 \\ \frac{T\,i}{2\,n\,\pi} & \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$.

Exemple 4 : $\widehat{h}(\frac{n}{T}) = \begin{cases} T & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \end{cases}$.

vi) Valeurs discrètes de la TFD d'un signal en temps discret *causal à support borné*

Soit h_e un signal en *temps discret* causal à support borné $0, \ldots N-1$, alors (avec $\omega_N = e^{-\frac{2\,\pi\,i}{N}}$) :

$\boxed{\widehat{h_e}(\frac{r}{T}) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \omega_N^{r\,k}\,;\, r = 0,\, \ldots,\, N-1}$. Et :

$\boxed{h_n = \frac{1}{N}\, \sum_{r=0}^{N-1} \widehat{h_e}(\frac{r}{T})\, \omega_N^{-n\,r}\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1}$.

Démonstration

$\sum_{r=0}^{N-1} \widehat{h_e}(\frac{r}{T})\, \omega_N^{-n\,r} = \sum_{r=0}^{N-1} [\sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \omega_N^{r\,k}]\, \omega_N^{-n\,r} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, [\sum_{r=0}^{N-1} \omega_N^{(k-n)\,r}]$.

Mais $\sum_{r=0}^{N-1} \omega_N^{(k-n)\,r} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k \neq n \\ N & \text{si} & k = n \end{array} \right.$ et, par conséquent :

$\sum_{r=0}^{N-1} \widehat{h_e}(\frac{r}{T})\, \omega_N^{-n\,r} = N\, h_n$ QED.

Remarque 1 : ces calculs sont la base de ceux des Transformations de Fourier Discrète Directe et Inverse (cf. $TFDD$ et $TFDI$).

Remarque 2 : $\widehat{h_e}$ étant une fonction périodique, de période $\nu_e = \frac{1}{\Delta} = \frac{N}{T}$ il suffisait bien de calculer les valeurs discrètes $\widehat{h_e}(\frac{r}{T})$; avec $r = 0,\, \ldots,\, N-1$, puisque si $n = q\, N + r$; avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r = 0,\, \ldots,\, N-1$ on a $\widehat{h_e}(\frac{n}{T}) = \widehat{h_e}(\frac{r}{T})$.

Exemple 2_e : $\widehat{\chi_e}(\frac{r}{T}) = \left\{ \begin{array}{ccc} N & \text{si} & r = 0 \\ 0 & \text{si} & r = 1,\, \ldots,\, N-1 \end{array} \right.$.

Exemple 3_e : $\widehat{h_e}(\frac{r}{T}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{N-1}{2} & \text{si} & r = 0 \\ \frac{1}{\omega_N^r - 1} & \text{si} & r = 1,\, \ldots,\, N-1 \end{array} \right.$.

Exemple 4_e : $\widehat{h_e}(\frac{r}{T}) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & r = 0,\, 2,\, \ldots,\, N-1 \\ N & \text{si} & r = 1 \end{array} \right.$.

5.1.11 TFD d'un signal périodique

i) Signal en temps continu

Soit h_T un signal en *temps continu* périodique, de période T, qui correspond à la « périodisation » du signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$, alors :

$\boxed{\widehat{h_T}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h_T(t)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt = \frac{1}{T}\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\frac{n}{T})\, \delta_{\frac{n}{T}}(\nu)}$.

Et on constate que $\widehat{h_T}$ est une *distribution*.

Démonstration

$\widehat{h_T}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - n\,T)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\,T}^{(n+1)\,T} h(t - n\,T)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt$.

Faisons le changement de variables $\tau = t - n\,T$; alors $d\tau = dt$ et :

$\widehat{h_T}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^T h(\tau)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,(\tau + n\,T)}\, d\tau = \widehat{h}(\nu)\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\,n\,\pi\,i\,T\,\nu}$.

D'après la formule de Poisson en fréquence on en déduit :

$\widehat{h_T}(\nu) = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\nu)\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{n}{T}}(\nu) = \frac{1}{T}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\frac{n}{T})\,\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)$ car $\widehat{h}$ est une *fonction continue* QED.

Remarque : $c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\frac{n}{T})$ est le coefficient du développement en série de Fourier de h_T et $\widehat{h_T}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)$.

ii) Signal en temps discret

Soit $h_{e\,T}$ un signal en *temps discret* périodique, de période T, qui correspond à la « périodisation » du signal h_e en *temps discret* causal à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$, alors :

$\boxed{\widehat{h_{e\,T}}(\nu) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{T\,k}\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}}$ et :

$\boxed{\widehat{h_{e\,T}}(\nu) = \frac{1}{T}\,\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{r\,n}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q\,N+n}{T}}(\nu)}$.

Et on constate que $\widehat{h_{e\,T}}$ est une *distribution.*

Démonstration

$h_{e\,T}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{(q\,N+r)\,\Delta}(t)$, donc :

$\widehat{h_{e\,T}}(\nu) = \sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-2\,(q\,N+r)\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$

$= (\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu})\,(\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-2\,q\,\pi\,i\,T\,\nu})$.

Soit, d'après la formule de Poisson en fréquence :

$\widehat{h_{e\,T}}(\nu) = \frac{1}{T}\,(\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu})\,(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{k}{T}}(\nu))$.

Étant donné que $e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ est une fonction *continue* de ν :

$\widehat{h_{e\,T}}(\nu) = \frac{1}{T}\,\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\frac{k}{T}}\,\delta_{\frac{k}{T}}(\nu)$

$= \frac{1}{T}\,\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_N^{r\,k}\,\delta_{\frac{k}{T}}(\nu)$.

Posons $k = q\,N + n$; avec $q \in \mathbb{Z}$ et $n = 0, \ldots, N-1$; alors $\omega_N^{r\,k} = \omega_N^{r\,n}$ et :

$\widehat{h_{e\,T}}(\nu) = \frac{1}{T}\,\sum_{r=0}^{N-1} h_r\,\sum_{n=0}^{N-1}\omega_N^{r\,n}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q\,N+n}{T}}(\nu)$ QED.

iii) Lien éventuel entre $\widehat{h_{T\,e}}$ et $\widehat{h_T}$ si $h_{T\,e}$ correspond à l'échantillonnage de h_T périodique.

Dans le cas général d'un signal h_T « périodisé » d'un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$ quelconque il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_{T\,e}}$ [119] et $\widehat{h_T}$.

119. $\widehat{h_{T\,e}} = \widehat{h_{e\,T}}$ car $h_{T\,e} = h_{e\,T}$

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]\,;\ k = 1,\,\ldots,\,N-1$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta\,;\ k = 1,\,\ldots,\,N-1$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ T[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_{Te}}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu - \tfrac{n}{\Delta}) + \frac{1}{T}\,[h_0 - \tfrac{h(0+0)}{2} - \tfrac{h(T-0)}{2}]\,\sum_{r=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)}.$$

Démonstration : cf. Annexe F.

iv) Exemples

a) Exemples de TFD de signaux en temps continu

$$\textit{Exemple } 2_T : c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{\chi}(\tfrac{n}{T}) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & n = 0 \\ 0 & \text{si} & n \neq 0 \end{array}\right. .$$

Donc $\widehat{\chi_T}(\nu) = \delta_0(\nu)$. Comme $\chi_T = 1$ on trouve que $\mathcal{F}\,1 = \delta_0$.

$$\textit{Exemple } 3_T : c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\tfrac{n}{T}) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{2} & \text{si} & n = 0 \\ \frac{i}{2\,n\,\pi} & \text{si} & n \neq 0 \end{array}\right. .$$

Donc $\widehat{h_T}(\nu) = \frac{1}{2}\,\delta_0(\nu) + \frac{i}{2\,\pi}\,(\sum_{n=-\infty}^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty})\,[\frac{1}{n}\,\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)]$,

$$\textit{Exemple } 4_T : c_n = \frac{1}{T}\,\widehat{h}(\tfrac{n}{T}) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & n = 1 \\ 0 & \text{si} & n \neq 1 \end{array}\right. .$$

Donc $\widehat{h_T}(\nu) = \delta_{\frac{1}{T}}(\nu) = \delta_{\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu)$. Comme $h_T(t) = e^{i\,\Omega\,t}$ on trouve que :

$(\mathcal{F}\,[e^{i\,\Omega\,t}])(\nu) = \delta_{\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu)$. On en déduit que $(\mathcal{F}\,[e^{-i\,\Omega\,t}])(\nu) = \delta_{-\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu)$,

et, par linéarité :

$(\mathcal{F}\,[\cos(\Omega\,t)])(\nu) = (\mathcal{F}\,[\frac{1}{2}\,(e^{i\,\Omega\,t} + e^{-i\,\Omega\,t})])(\nu) = \frac{1}{2}\,[\delta_{\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu) + \delta_{-\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu)]$, et :

$(\mathcal{F}\,[\sin(\Omega\,t)])(\nu) = (\mathcal{F}\,[\frac{1}{2\,i}\,(e^{i\,\Omega\,t} - e^{-i\,\Omega\,t})])(\nu) = -\frac{i}{2}\,[\delta_{\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu) - \delta_{-\frac{\Omega}{2\,\pi}}(\nu)]$.

b) Exemples de TFD de signaux en temps discret

Exemple $2_{Te} : \widehat{\chi_{T\,e}}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}}(\nu)$. C'est normal car $\chi_{T\,e} = 1_e = p_\Delta$ et on retrouve la formule de Poisson en fréquence.

Exemple $3_{Te} : \widehat{h_{Te}}(\nu) = \frac{N-1}{2\,T}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q\,N}{T}}(\nu) + \frac{1}{T}\,\sum_{r=1}^{N-1}[\frac{1}{\omega_N^r - 1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q\,N+r}{T}}(\nu)]$.

Exemple $4_{Te} : \widehat{h_{Te}}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{1}{T}}(\nu)$.

5.2 TFI : Transformation de Fourier Inverse

On appelle Transformation de Fourier Inverse (TFI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{F}} \ : \ g \mapsto \overline{g}$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* g complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, le signal $\overline{g}$ tel que :

$\boxed{\overline{g}(t) \triangleq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu}$.

Remarque : si g est sommable on a, plus simplement :

$\overline{g}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$.

On a donc $\overline{g} \triangleq \overline{\mathcal{F}}\, g$ et on note parfois $\overline{g} \triangleq \overline{\mathcal{F}}\, [g(\nu)]$.

Soient g_p et g_i les parties *paire* et *impaire* de g, respectivement, alors on a aussi :

$\boxed{\overline{g}(t) = \overline{g_p}(t) + \overline{g_i}(t)}$; avec :

$\overline{g_p}(t) = 2 \int_0^{\infty} g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu$ et $\overline{g_i}(t) = 2\, i \int_0^{\infty} g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu$.

Démonstration

• $\overline{g_p}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_p(\nu)\, [\cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu$
$= 2 \int_0^{\infty} g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu$
[car $g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)$ est une *fonction* ou *distribution paire* et $g_p(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)$ une *fonction* ou *distribution impaire*].

• $\overline{g_i}(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\nu)\, [\cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu$
$= 2\, i \int_0^{\infty} g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu$
[car $g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)$ est une *fonction* ou *distribution paire* et $g_i(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)$ une *fonction* ou *distribution impaire*].

• $\overline{g}(t) \triangleq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} [g_p(\nu) + g_i(\nu)]\, [\cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu$
$= v.p. \int_{-\infty}^{\infty} [g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu$
$+ v.p. \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, g_p(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu$
$= 2 \int_0^{\infty} g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)]\, d\nu = \overline{g_p}(t) + \overline{g_i}(t)$
[car $g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)$ est une *fonction* ou *distribution paire* et $g_i(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu) + i\, g_p(\nu)\, \sin(2\,\pi\, t\, \nu)$ est une *fonction* ou *distribution impaire*] QED.

On constate que $\overline{g_p}$ est un signal *pair* et $\overline{g_i}$ un signal *impair*.

Dans le cas particulier où g est *réelle* on a :

$\overline{g}_R(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = 2\, \int_0^{\infty} g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = \overline{g_p}(t)$ [car $g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)$ est une *fonction* ou *distribution paire* et $g_i(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)$ une *fonction* ou *distribution impaire*] et :

$\overline{g}_I(t)] = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = 2\, \int_0^{\infty} g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = -i\,\overline{g_i}(t)$ [car $g_i(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)$ est une *fonction* ou *distribution paire* et $g_p(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)$ une *fonction* ou *distribution impaire*].

5.2.1 Cas particuliers

a) $g = \widehat{h}$ *où* h *est un signal en temps continu quelconque.* Alors :

$\boxed{\overline{\widehat{h}}(t) \triangleq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\, d\nu}$. Et également :

$\boxed{\overline{\widehat{h}}(t) = 2\, \int_0^{\infty} [\widehat{h_p}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu) + i\, \widehat{h_i}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)]\, d\nu}$;
car $\widehat{h_p} = \widehat{h_p}$ et $\widehat{h_i} = \widehat{h_i}$.

Exemple 1 ($\widehat{h}$ est une fonction réelle *paire* sommable)

$\overline{\widehat{h}}(t) = 2\,a\, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}\, d\nu = 4\,a\, \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\,\pi\,t\,\nu)}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}\, d\nu$

Ces intégrales se calculent aisement grâce au théorème des résidus :

$\overline{\widehat{h}}(t) = e^{-a\,|t|} = h(t)$.

Exemple 2 ($\widehat{\chi}$ est une fonction complexe)

$\overline{\widehat{\chi}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\,\pi\,T\,\nu) - i\,[1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)]}{2\,\pi\,\nu}\, e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\, d\nu$

Cette intégrale se calcule aisement grâce au résultat $\int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$ [18] [120] :

$\overline{\widehat{\chi}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases}$. Et on constate que $\overline{\widehat{\chi}}(t) \neq \chi(t)$.

Exemple 3 ($\widehat{h}$ est une fonction complexe)

$\overline{\widehat{h}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\cos(2\,\pi\,T\,\nu) - 1 + 2\,\pi\,T\,\nu\, \sin(2\,\pi\,T\,\nu)] + i\,[2\,\pi\,T\,\nu\, \cos(2\,\pi\,T\,\nu) - \sin(2\,\pi\,T\,\nu)]}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2}\, e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\, d\nu$

120. p. 1756

Cette intégrale se calcule aisement grâce au résultat précédent $\int_0^\infty \frac{\sin(u)}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ et au résultat que l'on en déduit $\int_0^\infty \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}$:

$$\overline{\widehat{h}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{t}{T} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases} \text{. Et on constate que } \overline{\widehat{h}}(t) \neq h(t).$$

Exemple 4 ($\widehat{h}$ est une fonction complexe)

$\overline{\widehat{h}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{T\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)+i\,T\,[\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-1]}{2\,\pi\,(T\,\nu-1)}]\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu$

Cette intégrale se calcule aisement grâce aux résultats :

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a\,x+b)}{x}\,dx = \text{sgn}(a)\,\pi\,\cos(b)$ et :

$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a\,x+b)}{x}\,dx = -\text{sgn}(a)\,\pi\,\sin(b)$:

$$\overline{\widehat{h}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ e^{\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \text{. Et on constate que } \overline{\widehat{h}}(t) \neq h(t).$$

Exemple 5 ($\widehat{h}$ est une fonction imaginaire pure *paire*)

$\overline{\widehat{h}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{4\,\pi\,i\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu = 8\,\pi\,\int_0^\infty \frac{\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}\,\sin(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu$

Cette intégrale se calcule aisement à partir de celle de l'*exemple 1* en dérivant, par rapport à t, sous le signe $\int$:

$\overline{\widehat{h}}(t) = h(t) = \text{sgn}(t)\,e^{-a\,|t|}$.

Exemple 6 : (h est une fonction complexe)

$\overline{\widehat{h}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a-2\,\pi\,i\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu$.

Cette intégrale se calcule aisement à partir de celle de l'*exemple 1* :

$$\overline{\widehat{h}}(t) = h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ e^{-a\,t} & \text{si} \quad 0 < t \end{cases} .$$

Exemple 7 (j est une distribution *impaire*)

$\overline{\widehat{j}}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} -\pi\,i\,\text{sgn}(\nu)\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu = 2\,\pi\,\int_0^\infty \sin(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu = j(t).$

b) $g = \widehat{h_e}$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque*. Alors :

$$\boxed{\overline{\widehat{h_e}}(t) \triangleq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h_e}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu = h_e(t)}.$$

Démonstration

$\overline{\widehat{h_e}}(t) \triangleq v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h_e}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$
$= v.p. \int_{-\infty}^{\infty} (\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-2\,k\,\pi\, i\, \Delta\, \nu})\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$
$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,\pi\, i\, (t-k\,\Delta)\, \nu}\, d\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t) = h_e(t)$ car, d'après ce qui suit $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,\pi\, i\, (t-k\,\Delta)\, \nu}\, d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,\pi\, i\, (t-k\,\Delta)\, \nu}\, d\nu = \delta_{k\,\Delta}(t)$ QED.

Exemple : δ_{t_0} est un signal en *temps discret* et on a vu (cf. TFD) que $\widehat{\delta_{t_0}}(\nu) = e^{-2\,\pi\, t_0\, \nu}$. Alors :

$\overline{\widehat{\delta_{t_0}}}(t) = \delta_{t_0}(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\, t_0\, \nu}\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,\pi\, i\, (t-t_0)\, \nu}\, d\nu$ et, en particulier $\overline{\widehat{\delta_0}}(t) = \delta_0(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$.

5.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

On vient de voir que pour les signaux en *temps discret* quelconques on a $h_e = \overline{\widehat{h_e}}$ et donc $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$; *l'inverse* de la Transformée de Fourier Directe (TFD) est la Transformée de Fourier Inverse (TFI).

Mais on vient de voir également que pour les signaux en *temps continu* quelconques $h \neq \overline{\overline{h}}$ et donc $\mathcal{F}^{-1} \neq \overline{\mathcal{F}}$; *l'inverse* de la Transformée de Fourier Directe (TFD) n'est pas la Transformée de Fourier Inverse (TFI).

On peut se poser la question : pour quels signaux en *temps continu*s *l'inverse* de la Transformée de Fourier Directe (TFD) est-elle la Transformée de Fourier Inverse (TFI) ? Le théorème suivant répond à la question.

Théorème : si h est un signal en *temps continu* sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\,[h(t-0) + h(t+0)] = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu}.$$

Démonstration : cf. [28] [121] [41] [122] [27] [123] [37] [124].

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* on a :

121. pp. 378-379
122. § 12.8 pp. 234-236
123. 2. K. B. Howell § 2.2.1 p. 107
124. § 7.4 pp. 171-176

$h(t) = v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$.

Et si, de plus, $\widehat{h}$ est *sommable* on a $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$.

Cette intégrale est appelée Intégrale de Fourier (IF).

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

Transposition du temps et de la fréquence

Si on est dans les conditions d'existence de l'Intégrale de Fourier (IF) on a donc :

$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu}\, d\nu$, soit si on transpose le temps t et la fréquence ν :

$h(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(t)\, e^{2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt$ ou $h(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt$ et par conséquent :

$(\mathcal{F}\,[\widehat{h}(t)])(\nu) = h(-\nu)$

Exemple : on a trouvé $\widehat{\delta_{t_0}}(\nu) = e^{-2\,\pi\, i\, t_0\, \nu}$. Par conséquent on retrouve que (cf. TFD d'un signal périodique avec $\Omega = 2\,\pi\, t_0$) :

$(\mathcal{F}\,[e^{-2\,\pi\, i\, t_0\, t}])(\nu) = \delta_{t_0}(-\nu) = \delta_{-t_0}(\nu)$. Soit :

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\, 2\,\pi\, i\, (t_0 - \nu)\, t}\, dt = \delta_{t_0}(\nu)$ d'où l'on déduit que :

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm\, 2\,\pi\, i\, (t_0 - t)\, \tau}\, d\tau = \delta_{t_0}(t)$.

5.2.3 TFI d'un produit de TFD

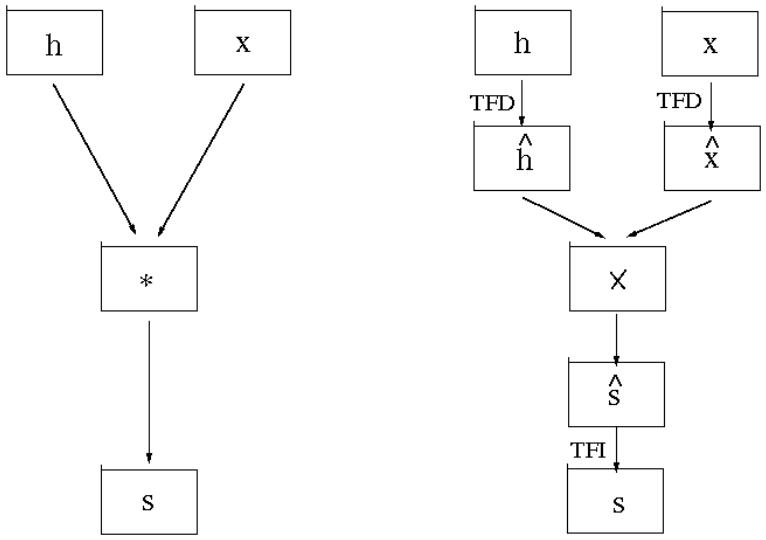
Soit $\widehat{s} = \widehat{h}\,\widehat{x}$ le produit des deux TFD $\widehat{h}$ et $\widehat{x}$. Si h et x sont les TFI respectives de $\widehat{h}$ et $\widehat{x}$ alors s, la TFI de $\widehat{s}$, est donnée d'après ce qui précède, par :

$s = h * x$.

De même soit $\widehat{u_e} = \widehat{h_e}\,\widehat{x_e}$ le produit des deux TFD $\widehat{h_e}$ et $\widehat{x_e}$. Si h_e et x_e sont les TFI respectives de $\widehat{h_e}$ et $\widehat{x_e}$ alors u_e, la TFI de $\widehat{u_e}$ est donnée, d'après ce qui précède, par :

$u_e = h_e * x_e$.

Pour calculer la convolution linéaire de deux signaux en *temps continu* on a donc les deux possibilités suivantes [36] [125] :



La seconde possibilité, qui utilise les transformations de Fourier, est souvent préférable au point de vue du temps de calcul.

5.3 Transformation de Fourier-Stieltjes

On pourra consulter [15] [38] [126] [39].

Soit α une mesure de Borrel. On appelle :

$$\boxed{\widehat{\alpha}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t}\, d\alpha(t)}.$$

la transformée de Fourier-Stieljtes de cette mesure.

Si $d\alpha(t) = h(t)\, dt$ on retrouve la définition de la transformée de Fourier directe classique.

125. p. 31
126. p. 667

6 Transformations de Fourier en cosinus et en sinus

La définition de ces transformations varie selon les auteurs. Certains ne considèrent que des signaux définis pour $0 \leqslant t$ [18] d'autres des signaux *pairs* pour la transformation en cosinus directe et *impairs* pour la transformation en sinus directe [39]. Nous avons adopté ce second point de vue qui conduit à ne considérer que des *fonctions* ou *distributions* complexes *paires* pour la transformation en cosinus inverse et *impaires* pour la transformation en sinus inverse.

6.1 Transformations de Fourier en cosinus

On pourra consulter [18] [127] [27] [128] [27] [129] [38] [130] [39] [131].

6.1.1 $TFCD$: Transformation de Fourier en Cosinus Directe

On ne considère que la Transformation de Fourier en Cosinus Directe ($TFCD$) d'un signal *pair* et alors elle se confond avec la Transformation de Fourier en Directe (TFD). Par conséquent on a déjà vu que :

$$\boxed{\widehat{h_p}(\nu) = 2 \int_0^\infty h_p(t)\, \cos(2\,\pi\,\nu\,t)\, dt}.$$

Et on a déjà constaté que $\widehat{h_p}$ est une *fonction* ou *distribution paire*.

Dans le cas particulier où le signal h_p est *réel* la *fonction* ou *distribution* $\widehat{h_p}$ est *réelle*.

Cas particulier d'un signal *pair* en *temps discret*

On a déjà vu que $\widehat{h_{e\,p}}(\nu) = h_{p\,0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} h_{p\,k}\, \cos(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$

Exemples de $TFCD$

i) Exemples de $TFCD$ de signaux pairs *en temps continu*

Exemple 0 : $\widehat{\upsilon_p}(\nu) = \frac{1}{2}\,\delta_0(\nu)$, *distribution* réelle *paire*.

Exemple 1 : $\widehat{h_p}(\nu) = \frac{2\,a}{a^2 + 4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* réelle *paire*.

127. pp. 625-626
128. 2. K. B. Howell. § 2.4.4. pp. 158-160
129. 3. K. P. Yip. pp. 227-280
130. pp. 663-668
131. « Sine and cosine transforms » 3 pages

Exemple 2 : $\widehat{\chi_p}(\nu) = \frac{\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,\nu}$, *fonction* réelle *paire.*

Exemple 3 : $\widehat{h_p}(\nu) = \frac{\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-1+2\,\pi\,T\,\nu\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2}$, *fonction* réelle *paire.*

Exemple 4 : $\widehat{h_p}(\nu) = \widehat{h_{p\,R}}(\nu) + i\,\widehat{h_{p\,I}}(\nu)$, *fonction* complexe *paire* ; avec :

$\widehat{h_{p\,R}}(\nu) = \frac{T^2\,\nu\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,(T^2\,\nu^2-1)}$ et :

$\widehat{h_{p\,I}}(\nu) = \frac{T\,[\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-1]}{2\,\pi\,(T^2\,\nu^2-1)}$.

Exemple 5 : $\widehat{h_p}(\nu) = 0$.

Exemple 6 : $\widehat{h_p}(\nu) = \frac{a}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* réelle *paire.*

Exemple 7 : $\widehat{j_p} = 0$.

ii) Exemples de TFCD de signaux pairs *en temps discret*

Si $h_{p\,e}$ correspond à l'échantillonnage du signal h_p on a $\widehat{h_{p\,e}} = \widehat{h_{e\,p}}$ car $h_{p\,e} = h_{e\,p}$.

Exemple 0_e : $\widehat{v_{p\,e}}(\nu) = \frac{1}{2}\,\widehat{p_\Delta}(\nu) = \frac{1}{2}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu} = \frac{1}{2\,\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{\Delta}}(\nu)$, *distribution* réelle *paire.*

Exemple 1_e : $\widehat{h_{p\,e}}(\nu) = \frac{1-q^2}{1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* réelle *paire.*

Exemple 2_e : $\widehat{\chi_{p\,e}}(\nu) = \frac{1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+\cos[2\,\pi\,(T-\Delta)\,\nu]}{2\,[1-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)]}$, *fonction* réelle *paire.*

Exemple 3_e : $\widehat{h_{p\,e}}(\nu) = \frac{N\,\sin(\pi\,\Delta\,\nu)\,\sin[(2\,N-1)\,\pi\,\Delta\,\nu]-\sin^2(N\,\pi\,\Delta\,\nu)}{2\,N\,\sin^2(\pi\,\Delta\,\nu)}$, *fonction* réelle *paire.*

Exemple 4_e : $\widehat{h_{p\,e}}(\nu) = \widehat{h_{p\,e\,R}}(\nu) + i\,\widehat{h_{p\,e\,I}}(\nu)$, *fonction* complexe *paire* ; avec :

$\widehat{h_{p\,e\,R}}(\nu) = \frac{\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\{\cos(\frac{2\,\pi}{N})\,\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)-\sin[(N-2)\,\pi\,\Delta\,\nu]\}}{2\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu+\frac{1}{N})]}$ et :

$\widehat{h_{p\,e\,I}}(\nu) = \frac{\sin^2(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\sin(\frac{2\,\pi}{N})}{2\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu+\frac{1}{N})]}$.

Exemple 5_e : $\widehat{h_{p\,e}}(\nu) = 0$.

Exemple 6_e : $\widehat{h_{p\,e}}(\nu) = \frac{1-q^2}{2\,[1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2]}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* réelle *paire.*

6.1.2 $TFCI$: Transformation de Fourier en Cosinus Inverse

On ne considère que la Transformation de Fourier en Cosinus Inverse ($TFCI$) d'une *fonction* ou *distribution paire* g_p de la fréquence ν et alors elle

se confond avec la Transformation de Fourier Inverse (TFI). Par conséquent on a déjà vu que :

$$\boxed{\overline{g_p}(t) = 2 \int_0^\infty g_p(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu}.$$

Et on a déjà constaté que $\overline{g_p}$ est un signal *pair*.

Cas particulier : si $g_p = \widehat{h_p}$ on a $\overline{g_p} = \overline{\widehat{h_p}}$.

Exemples

Exemple 0 : $\overline{\widehat{\upsilon_p}}(t) = \upsilon_p(t)$.

Exemple 1 : $\overline{\widehat{h_p}}(t) = h_p(t) = e^{-a\,|t|}$.

Exemple 2 : $\overline{\widehat{\chi_p}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq \chi_p(t).$

Exemple 3 : $\overline{\widehat{h_p}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{|t|}{2\,T} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_p(t).$

Exemple 4 : $\overline{\widehat{h_p}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{1}{2}\, e^{\frac{2\,\pi\, i\, |t|}{T}} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_p(t).$

Exemple 5 : $\overline{\widehat{h_p}}(t) = 0 = h_p(t)$.

Exemple 6 : $\overline{\widehat{h_p}}(t) = \frac{1}{2}\, e^{-a\,|t|} = h_p(t)$.

Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h_p est un signal *pair* en *temps continu* sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\,[h_p(t-0) + h_p(t+0)] = 2 \int_0^\infty \widehat{h_p}(\nu)\, \cos(2\,\pi\, t\, \nu)\, d\nu}.$$

Démonstration

cf. la formule de réciprocité pour la TFD QED.

Donc si le signal h_p en *temps continu* est *continu* on a :

$h_p(t) = 2 \int_0^\infty \widehat{h_p}(\nu) \cos(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu$.

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

6.2 Transformations de Fourier en sinus

On pourra consulter [18] [132] [27] [133] [27] [134] [38] [135] [39] [136].

6.2.1 $TFSD$: Transformation de Fourier en Sinus Directe

On ne considère que la Transformation de Fourier en Sinus Directe ($TFSD$) d'un signal *impair* et alors elle se confond avec le produit par i de la Transformation de Fourier Directe (TFD). Par conséquent on a déjà vu que :

$$\boxed{i\,\widehat{h_i}(\nu) = 2 \int_0^\infty h_i(t) \sin(2\,\pi\,\nu\,t)\,dt}.$$

On constate que $i\,\widehat{h_i}$ est une *fonction* ou *distribution impaire* car on a déjà constaté que $\widehat{h_i}$ en est une.

Dans le cas particulier où le signal h_i est *réel* la *fonction* ou *distribution* $i\,\widehat{h_i}$ est *réelle*.

Cas particulier d'un signal *impair* en *temps discret*

On a, d'après ce qu'on a déjà vu :

$i\,\widehat{h_{e\,i}}(\nu) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} h_{i\,k} \sin(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$.

Exemples de $TFSD$

i) Exemples de $TFSD$ de signaux impairs *en temps continu*

Exemple 0 : $i\,\widehat{\upsilon_i}(\nu) = \frac{1}{2\,\pi}\,j(\nu)$, *distribution* réelle *impaire*.

Exemple 1 : $i\,\widehat{h_i}(\nu) = 0$.

Exemple 2 : $i\,\widehat{\chi_i}(\nu) = \frac{1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,\nu}$, *fonction* réelle *impaire*.

132. pp. 625-626
133. 2. K. B. Howell. § 2.4.4. pp. 158-160
134. 3. K. P. Yip. pp. 227-280
135. pp. 663-668
136. « Sine and cosine transforms » 3 pages

Exemple 3 : $i\,\widehat{h_i}(\nu) = -\frac{2\,\pi\,T\,\nu\,\cos(2\,\pi\,T\,\nu)-\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{4\,\pi^2\,T\,\nu^2}$, *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 4 : $i\,\widehat{h_i}(\nu) = -\widehat{h_{iI}}(\nu) + i\,\widehat{h_{iR}}(\nu)$, *fonction* complexe *impaire* ; avec :

$\widehat{h_{iI}}(\nu) = -\frac{T^2\,\nu\,[1-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)]}{2\,\pi\,(T^2\,\nu^2-1)}$ et :

$\widehat{h_{iR}}(\nu) = \frac{T\,\sin(2\,\pi\,T\,\nu)}{2\,\pi\,(T^2\,\nu^2-1)}$.

Exemple 5 : $i\,\widehat{h_i}(\nu) = \frac{4\,\pi\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 6 : $i\,\widehat{h_i}(\nu) = \frac{2\,\pi\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 7 : $i\,\widehat{j_i}(\nu) = \pi\,\mathrm{sgn}(\nu)$, *fonction* réelle *impaire.*

ii) Exemples de $TFSD$ de signaux impairs *en temps discret*

Si $h_{i\,e}$ correspond à l'échantillonnage du signal h_i on a $\widehat{h_{i\,e}} = \widehat{h_{e\,i}}$ car $h_{i\,e} = h_{e\,i}$.

Exemple 0_e : $i\,\widehat{v_{i\,e}}(\nu) = \frac{1}{2\,\pi\,\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} j(\nu - \frac{n}{\Delta})$, *distribution* réelle *impaire.*

Exemple 1_e : $i\,\widehat{h_{i\,e}}(\nu) = 0$.

Exemple 2_e : $i\,\widehat{\chi_{i\,e}}(\nu) = -\frac{\sin(2\,\pi\,T\,\nu)-\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)-\sin[2\,\pi\,(T-\Delta)\,\nu]}{2\,[1-\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)]}$, *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 3_e : $i\,\widehat{h_{i\,e}}(\nu) = -\frac{N\,\sin(\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos[(2\,N-1)\,\pi\,\Delta\,\nu]-\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos(N\,\pi\,\Delta\,\nu)}{2\,N\,\sin^2(\pi\,\Delta\,\nu)}$, *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 4_e : $i\,\widehat{h_{i\,e}}(\nu) = -\widehat{h_{i\,e\,I}}(\nu) + i\,\widehat{h_{i\,e\,R}}(\nu)$, *fonction* complexe *impaire* ; avec :

$\widehat{h_{i\,e\,I}}(\nu) = \frac{\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\{-\cos(\frac{2\,\pi}{N})\,\cos(N\,\pi\,\Delta\,\nu)+\cos[(N-2)\,\pi\,\Delta\,\nu]\}}{2\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu+\frac{1}{N})]}$ et :

$\widehat{h_{i\,e\,R}}(\nu) = \frac{\sin(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\cos(N\,\pi\,\Delta\,\nu)\,\sin(\frac{2\,\pi}{N})}{2\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu-\frac{1}{N})]\,\sin[\pi\,(\Delta\,\nu+\frac{1}{N})]}$.

Exemple 5_e : $i\,\widehat{h_{i\,e}}(\nu) = \frac{2\,q\,\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)}{1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* réelle *impaire.*

Exemple 6_e : $i\,\widehat{h_{i\,e}}(\nu) = \frac{q\,\sin(2\,\pi\,\Delta\,\nu)}{1-2\,q\,\cos(2\,\pi\,\Delta\,\nu)+q^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$), *fonction* réelle *impaire.*

6.2.2 $TFSI$: Transformation de Fourier en Sinus Inverse

On ne considère que la Transformation de Fourier en Sinus Inverse ($TFSI$) d'une *fonction* ou *distribution* complexe *impaire* g_i de la fréquence ν et alors

elle se confond avec le produit par $-i$ de la Transformation de Fourier Inverse (TFI). Par conséquent on a, d'après ce qu'on a déjà vu :

$$\boxed{-i\,\overline{g_i}(t) = 2\int_0^\infty g_i(\nu)\,\sin(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu}.$$

On constate que $-i\,\overline{g_i}(t)$ est un signal *impair* car on a déjà constaté que $\overline{g_i}$ en est un.

Cas particulier : si $g_i = i\,\widehat{h_i}$ on a $-i\,\overline{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}$.

Exemples

Exemple 0 : $\overline{\widehat{\upsilon_i}}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) = \upsilon_i(t)$.

Exemple 1 : $\overline{\widehat{h_i}}(t) = 0$.

Exemple 2 :
$$\overline{\widehat{\chi_i}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad -T < t < 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq \chi_i(t).$$

Exemple 3 :
$$\overline{\widehat{h_i}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{t}{2T} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_i(t).$$

Exemple 4 :
$$\overline{\widehat{h_i}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -T \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad t = -T \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)\,e^{\frac{2\,\pi\,i\,|t|}{T}} & \text{si} \quad -T < t < T \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h_i(t).$$

Exemple 5 : $\overline{\widehat{h_i}}(t) = \mathrm{sgn}(t)\,e^{-a\,|t|} = h_i(t)$.

Exemple 6 : $\overline{\widehat{h_i}}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)\,e^{-a\,|t|} = h_i(t)$.

Exemple 7 : $\overline{\widehat{j_i}}(t) = Pf(\frac{1}{t}) = j_i(t)$.

Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h_i est un signal *impair* en *temps continu* sommable et à

variation bornée sur tout intervalle borné on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$\boxed{\frac{1}{2}\,[h_i(t-0)+h_i(t+0)] = 2\,i\,\int_0^\infty \widehat{h_i}(\nu)\,\sin(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu}$.

Démonstration

cf. la formule de réciprocité pour la TFD QED.

Donc si le signal h_i en *temps continu* est *continu* on a :

$h_i(t) = 2\,i\,\int_0^\infty \widehat{h_i}(\nu)\,\sin(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu$.

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

6.3 Liens avec les transformations de Fourier

6.3.1 Lien direct

$\widehat{h} = \widehat{h_p} - i\,(i\,\widehat{h_i})$ donc $\mathcal{F}\,h = \mathcal{F}\,h_p - i\,(i\,\mathcal{F})\,h_i$.

6.3.2 Lien inverse

$\widehat{\overline{h}} = \overline{\widehat{h_p}} + \overline{\widehat{h_i}}$ donc $\overline{\mathcal{F}}\,\overline{h} = \overline{\mathcal{F}}\,\widehat{h_p} + (-i\,\overline{\mathcal{F}})\,(i\,\widehat{h_i})$.

7 Transformations de Hartley

On pourra consulter [9] [8] [137] [41] [138] [27] [139] [38] [140] [39] [141].

L'intérêt des transformations de Hartley est que les transformations directe et inverse sont égales. Alors, avec des hypothèses de régularités suffisantes, elles sont *involutives*.

7.1 $THarD$: Transformation de Hartley Directe

On appelle Transformation de Hartley Directe ($THarD$) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{H}_{ar} \ : \ h \mapsto \mathcal{H}_{ar}\, h$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $\mathcal{H}_{ar}\, h$ complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, telle que :

$\boxed{(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,\nu\,t)\, dt}$;

avec $\mathrm{cas}(t) \triangleq \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2}\, \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\, \cos(t - \frac{\pi}{4})$.

Dans le cas particulier où le signal h est *réel* on a :

$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \widehat{h}_R(\nu) - \widehat{h}_I(\nu) = [(1+i)\, \widehat{h}(\nu)]_R$.

7.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret*

Soit h_e un signal en *temps discret* ; alors :

$\boxed{(\mathcal{H}_{ar}\, h_e)(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \mathrm{cas}(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)}$.

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'un signal en *temps discret* QED.

137. pp.385-410 (surtout discrète)
138. Ch. 13 pp. 265-271
139. 4. K. J. Olejniczak. pp. 281-330
140. pp. 801-802 (surtout discrète)
141. « Hartley transform » 4 pages

7.1.2 Calcul de la transformation de Hartley directe en fonction des transformations de Fourier directes des parties *paire* et *impaire* ou des transformations de Fourier directes en cosinus et sinus

On a :

$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \widehat{h_p}(\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)$,
$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu) = \widehat{h_p}(\nu) - i\,\widehat{h_i}(\nu)$,

Démonstrations

$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}[h_p(t) + h_i(t)]\,[\cos(2\,\pi\,\nu\,t) + \sin(2\,\pi\,\nu\,t)]\,dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty}[h_p(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t) + h_i(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)]\,dt$

car $h_i(t)\,\cos(2\,\pi\,\nu\,t)$ et $h_p(t)\,\sin(2\,\pi\,\nu\,t)$ sont des signaux *impairs*.

Donc :

$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \widehat{h_p}(\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)$ et
$(\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu) = \widehat{h_p}(\nu) - i\,\widehat{h_i}(\nu)$, car $\widehat{h_p}$ est *paire* et $\widehat{h_i}$ *impaire* QED.

7.1.3 Calcul de la transformation de Fourier directe en fonction de la transformation de Hartley directe

On a :

$\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) + (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)] - i\,\frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) - (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)]$.

Démonstration

$\frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) + (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)] = \widehat{h_p}(\nu)$ et :
$\frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) - (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)] = i\,\widehat{h_i}(\nu)$. Donc :

$\frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) + (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)] - i\,\frac{1}{2}\,[(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) - (\mathcal{H}_{ar}\, h)(-\nu)]$
$= \widehat{h_p}(\nu) + \widehat{h_i}(\nu) = \widehat{h}(\nu)$ QED.

7.1.4 *Exemples*

Exemple 1 : $(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \frac{2\,a}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, fonction réelle *paire*.

Exemple 4 : $(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \frac{T^2\,\nu\,[-\cos(2\,\pi\,T\,\nu)+\sin(2\,\pi\,T\,\nu)+1]+i\,T\,[\cos(2\,\pi\,T\,\nu)+\sin(2\,\pi\,T\,\nu)-1]}{2\,\pi\,(T^2\,\nu^2-1)}$, fonction complexe.

Exemple 5 : $(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \frac{4\,\pi\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, fonction réelle *impaire*.

Exemple 6 : $(\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu) = \frac{a+2\,\pi\,\nu}{a^2+4\,\pi^2\,\nu^2}$, fonction réelle.

7.2 $THarI$: Transformation de Hartley Inverse

On appelle Transformation de Hartley Inverse ($THarI$) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{H}_{ar} : \ g \mapsto \mathcal{H}_{ar}\, g$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* g complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, le signal $\mathcal{H}_{ar}\, g$ tel que :

$$\boxed{(\mathcal{H}_{ar}\, g)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu}.$$

Par conséquent la Transformée de Hartley Inverse ($THarI$) est, en fait, identique à la Transformée de Hartley Directe ($THarD$).

7.2.1 Cas particuliers

a) $g = \mathcal{H}_{ar}\, h$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\mathcal{H}_{ar}\, (\mathcal{H}_{ar}\, h)](t) = (\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu}.$$

b) $g = \mathcal{H}_{ar}\, h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\mathcal{H}_{ar}\, (\mathcal{H}_{ar}\, h_e)](t) = (\mathcal{H}_{ar}^2\, h_e)(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}_{ar}\, h_e)(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = h_e(t)}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFI de la TFD d'un signal en *temps discret* quelconque QED.

7.2.2 Propriété des transformations de Hartley

On a $\mathcal{H}_{ar}^2 = \overline{\mathcal{F}}\, \mathcal{F}$ donc $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = \overline{\widehat{h}}(t)$.

Démonstration

$(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = [\mathcal{H}_{ar}\, (\mathcal{H}_{ar}\, h)](t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}_{ar})(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu$
$= \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{h_p}(\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)]\, [\cos(2\,\pi\,t\,\nu) + \sin(2\,\pi\,t\,\nu)]\, d\nu$
$= \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{h_p}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)]\, d\nu$
$+ \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{h_p}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)]\, d\nu$
$= 2\, \int_{0}^{\infty} [\widehat{h_p}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)]\, d\nu$ car la fonction
$\widehat{h_p}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu)$ est *paire* et la fonction
$\widehat{h_p}(\nu)\, \sin(2\,\pi\,t\,\nu) + i\,\widehat{h_i}(\nu)\, \cos(2\,\pi\,t\,\nu)$ est *impaire* QED.

7.2.3 *Exemples*

Puisque $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = \overline{\widehat{h}}(t)$ on a (cf. TFI) :

Exemple 1 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = e^{-a\,|t|} = h(t)$.

Exemple 2 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, \chi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq \chi(t).$

Exemple 3 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{t}{T} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases} \neq h(t).$

Exemple 4 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ e^{\frac{2\,\pi\,i\,t}{T}} & \text{si} \quad 0 < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = T \\ 0 & \text{si} \quad T < t \end{cases} \neq h(t).$

Exemple 5 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad t = 0 \\ e^{-a\,t} & \text{si} \quad 0 < t \end{cases} = h(t).$

Exemple 7 : $(\mathcal{H}_{ar}^2\, j)(t) = 2\,\pi\, \int_0^\infty \sin(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = j(t)$.

7.2.4 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h est un signal en *temps continu* sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\,[h(t-0) + h(t+0)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu}.$$

Démonstration [41] [142]

cf. la formule de réciprocité pour la TFD QED.

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* on a :

$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{H}_{ar}\, h)(\nu)\, \mathrm{cas}(2\,\pi\,t\,\nu)\, d\nu = [\mathcal{H}_{ar}\, (\mathcal{H}_{ar}\, h)](t) = (\mathcal{H}_{ar}^2\, h)(t)$, soit $\mathcal{H}_{ar}^2 = 1$ et $\mathcal{H}_{ar}$ est *involutive*.

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

142. § 13.5 p. 269

8 Transformations de Hankel

On pourra consulter [32] [143] [18] [144] [8] [145] [41] [146] [27] [147] [38] [148] [3] [149] [39] [150].

L'intérêt des transformations de Hankel, également appelées transformations de Fourier-Bessel, est que les transformations directe et inverse sont égales. Alors, avec des hypothèses de régularités suffisantes, elles sont *involutives*.

8.1 $THanD$: Transformation de Hankel Directe d'un signal strictement causal

On appelle Transformation de Hankel Directe ($THanD$), d'indice (ou d'ordre) r ($-\frac{1}{2} < r$), l'application :

$$\mathcal{H}_{an} \ : \ h \mapsto \mathcal{H}_{an}\, h$$

qui fait correspondre à un signal h strictement causal la *fonction* ou *distribution* $\mathcal{H}_{an}\, h$ complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, telle que :

$$\boxed{(\mathcal{H}_{an}\, h)(\nu) \triangleq 2\,\pi\ \int_0^\infty h(t)\, J_r(2\,\pi\,\nu\,t)\, t\, dt},$$

où J_r est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice r [2] [151] [31] [152] (ou d'ordre r [18] [153]).

8.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret* strictement causal

Soit h_e un signal en *temps discret* stictement causal ; alors :

$$\boxed{(\mathcal{H}_{an}\, h_e)(\nu) = 2\,\pi\ \sum_{k=1}^{\infty} k\,\Delta\, h_k\, J_r(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)}.$$

143. pp. 6, 53, 59, 60, 62, 82 (surtout discrètes)
144. pp. 838-839 p. 911
145. Ch. 12 pp. 241, 244, 249, 254 (à n dimensions), 296, 420
146. Ch. 21 pp. 371-388
147. 9. R. Piessens. pp. 719-746
148. pp. 790-791
149. pp. 906-908
150. « Hankel transform » 8 pages
151. ch. 7.5 pp. 364-387
152. pp. 368-392
153. pp. 1801-1805

Démonstration

$(\mathcal{H}_{an}\, h_e)(\nu) \triangleq 2\,\pi\, \int_0^\infty [\sum_{k=1}^\infty h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)]\, J_r(2\,\pi\,\nu\,t)\, t\, dt$
$= 2\,\pi\, \sum_{k=1}^\infty h_k\, \int_0^\infty J_r(2\,\pi\,\nu\,t)\, t\, \delta_{k\,\Delta}(t)\, dt$
$= 2\,\pi\, \sum_{k=1}^\infty k\,\Delta\, h_k\, J_r(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)$ QED.

8.1.2 Lien entre la transformation de Hankel directe, d'indice 0, et la transformation de Fourier directe

La transformation de Hankel directe, d'indice 0, est essentiellement la transformation de Fourier directe à deux dimensions d'une *fonction* ou *distribution* à symétrie circulaire.

Soit $f(t_1, t_2)$ une *fonction* ou *distribution* à deux variables temporelles t_1 et t_2. Sa transformée de Fourier est, par définition, la *fonction* ou *distribution* $\widehat{f}(\nu_1, \nu_2)$ à deux variables fréquentielles ν_1 et ν_2 telle que :

$\widehat{f}(\nu_1, \nu_2) \triangleq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t_1, t_2)\, e^{-2\,\pi\, i\, (\nu_1\, t_1 + \nu_2\, t_2)}\, dt_1\, dt_2.$

Posons $t_1 = t\, \cos(\alpha)$, $t_2 = t\, \sin(\alpha)$; avec $0 < t$ et $\alpha \in (\varphi, \varphi + 2\,\pi)$; $\forall \varphi$. Alors $dt_1\, dt_2 = t\, dt\, d\alpha$ et supposons que la fonction f est à symétrie circulaire, donc ne dépend que de t ; alors $f(t_1, t_2) = h(t)$. Posons également $\nu_1 = \nu\, \cos(\beta)$, $\nu_2 = \nu\, \sin(\beta)$; avec $0 < \nu$ et $\beta \in (\psi, \psi + 2\,\pi)$; $\forall \psi$; alors :

$\widehat{f}(\nu_1, \nu_2) = \int_{t=0}^\infty \int_{\alpha=\varphi}^{\varphi+2\,\pi} h(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, [\nu\, t\, \cos(\alpha-\beta)]}\, t\, dt\, d\alpha.$

Posons $\gamma = \alpha - \beta$; avec β fixé et choisissons $\varphi = \beta$. Il vient $d\gamma = d\alpha$ et par conséquent :

$\widehat{f}(\nu_1, \nu_2) = \int_{t=0}^\infty \int_{\gamma=0}^{2\,\pi} h(t)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t\, \cos(\gamma)}\, t\, dt\, d\gamma = \int_{t=0}^\infty h(t)\, [\int_{\gamma=0}^{2\,\pi} e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t\, \cos(\gamma)}\, d\gamma]\, t\, dt.$

Par conséquent on constate que la fonction $\widehat{f}(\nu_1, \nu_2)$ est également à symétrie circulaire car elle ne dépend que de ν ; alors $\widehat{f}(\nu_1, \nu_2) = (\mathcal{H}_{an}\, h)(\nu)$. De plus $\int_{\gamma=0}^{2\,\pi} e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t\, \cos(\gamma)}\, d\gamma = 2\,\pi\, J_0(2\,\pi\,\nu\,t)$ où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice 0 [38] [154] et par conséquent :

$(\mathcal{H}_{an}\, h)(\nu) = 2\,\pi\, \int_0^\infty h(t)\, J_0(2\,\pi\,\nu\,t)\, t\, dt.$

$\mathcal{H}_{an}\, h$ est la transformée de Hankel directe, d'indice 0, du signal h.

Exemple : Soit $h(t) = \frac{1}{t}$; pour $0 < t$; alors sa transformée de Hankel directe, d'indice 0, est $(\mathcal{H}_{an}\, h)(\nu) = \frac{1}{\nu}$; pour $0 < \nu$.

154. p. 121 éq. (49)

8.2 $THanI$: Transformation de Hankel Inverse

On appelle Transformation de Hankel Inverse ($THanI$) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{H}_{an} : \; g \mapsto \mathcal{H}_{an}\, g$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* g complexe, de la variable réelle ν appelée fréquence, définie pour $0 < \nu$, le signal $\mathcal{H}_{an}\, g$ strictement causal tel que :

$$\boxed{(\mathcal{H}_{an}\, g)(t) \triangleq 2\,\pi \int_0^\infty g(\nu)\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu\,;\, 0 < t}.$$

Par conséquent la Transformée de Hankel Inverse ($THanI$) est, en fait, identique à la Transformée de Hankel Directe ($THanD$).

8.2.1 Cas particuliers

a) $g = \mathcal{H}_{an}\, h$ *où* h *est un signal en* temps continu *strictement causal quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\, h)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\, h)(t) \triangleq 2\,\pi \int_0^\infty (\mathcal{H}_{an}\, h)(\nu)\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu\,;\, 0 < t}.$$

b) $g = \mathcal{H}_{an}\, h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *strictement causal quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\, h_e)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\, h_e)(t) \triangleq 2\,\pi \int_0^\infty (\mathcal{H}_{an}\, h_e)(\nu)\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu = h_e(t)\,;\, 0 < t}.$$

Démonstration

$[\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\, h_e)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\, h_e)(t)$
$= 2\,\pi \int_0^\infty [2\,\pi \sum_{k=1}^\infty k\,\Delta\, h_k\, J_r(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)]\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu$
$= 4\,\pi^2 \sum_{k=1}^\infty k\,\Delta\, h_k \int_0^\infty J_r(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu.$

Mais les fonctions de Bessel forment une base orthogonale, avec un facteur de pondération [39] et précisemment :

$\int_0^\infty J_r(2\,k\,\pi\,\Delta\,\nu)\, J_r(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu \; = \; \frac{\delta_0(2\,k\,\pi\,\Delta - 2\,\pi\, t)}{2\,k\,\pi\,\Delta} \; = \; \frac{\delta_0(k\,\Delta - t)}{4\,k\,\pi^2\,\Delta} \; = \; \frac{\delta_{k\,\Delta}(t)}{4\,k\,\pi^2\,\Delta}$ et par conséquent :

$[\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\, h_e)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\, h_e)(t) = \sum_{k=1}^\infty h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t) = h_e(t)$ QED.

8.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h est un signal en *temps continu* strictement causal sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$\boxed{\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = 2\,\pi\,\int_0^\infty (\mathcal{H}_{an}\,h)(\nu)\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,\nu\,d\nu\,;\,0<t}$.

Démonstration [41] [155] [27] [156]

$2\,\pi\,\int_0^\infty (\mathcal{H}_{an}\,h)(\nu)\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,\nu\,d\nu$
$\triangleq 2\,\pi\,\int_0^\infty [2\,\pi\,\int_0^\infty h(\tau)\,J_r(2\,\pi\,\nu\,\tau)\,\tau\,d\tau]\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,\nu\,d\nu$
$= 4\,\pi^2\,\int_0^\infty h(\tau)\,[\int_0^\infty J_r(2\,\pi\,\tau\,\nu)\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,\nu\,d\nu]\,\tau\,d\tau$.

Mais les fonctions de Bessel formant une base orthogonale, on a maintenant :

$\int_0^\infty \nu\,J_r(2\,\pi\,\tau\,\nu)\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,d\nu = \frac{\delta_0(2\,\pi\,\tau-2\,\pi\,t)}{2\,\pi\,\tau} = \frac{\delta_0(\tau-t)}{4\,\pi^2\,\tau}$ et par conséquent :

$[\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\,h)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\,h)(t) = \int_0^\infty h(\tau)\,\delta_0(\tau-t)\,d\tau$
$= \frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)]$, pour $0<t$ QED.

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* sur $]0\ \infty[$:

$h(t) = 2\,\pi\,\int_0^\infty (\mathcal{H}_{an}\,h)(\nu)\,J_r(2\,\pi\,t\,\nu)\,\nu\,d\nu = [\mathcal{H}_{an}\,(\mathcal{H}_{an}\,h)](t) = (\mathcal{H}_{an}^2\,h)(t)$, soit $\mathcal{H}_{an}^2 = 1$ et $\mathcal{H}_{an}$ est *involutive*.

8.2.3 Lien entre la transformation de Hankel inverse, d'indice 0, et la transformation de Fourier inverse

La transformation de Hankel inverse, d'indice 0, est essentiellement la transformation de Fourier inverse à deux dimensions d'une fonction à symétrie circulaire.

Soit $\widehat{f}(\nu_1,\nu_2)$ une *fonction* ou *distribution* à deux variables fréquentielles ν_1 et ν_2 ayant des propriétés de régularité suffisantes. Sa transformée de Fourier inverse est alors, la *fonction* ou *distribution* $\overline{f}(t_1,t_2)$ à deux variables temporelles t_1 et t_2 telle que :

$\overline{f}(t_1,t_2) \triangleq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\nu_1,\nu_2)\,e^{2\,\pi\,i\,(t_1\,\nu_1+t_2\,\nu_2)}\,d\nu_1\,d\nu_2$.

Posons $\nu_1 = \nu\,\cos(\beta)$, $\nu_2 = \nu\,\sin(\beta)$; avec $0<\nu$ et $\beta \in (\psi,\psi+2\,\pi)$; $\forall\psi$. Alors $d\nu_1\,d\nu_2 = \nu\,d\nu\,d\beta$ et supposons que la fonction $\widehat{f}$ est à symétrie circulaire donc ne dépend que de ν ; alors $\widehat{f}(\nu_1,\nu_2) = g(\nu)$. Posons également $t_1 = t\,\cos(\alpha)$, $t_2 = t\,\sin(\alpha)$; avec $0<t$ et $\alpha \in (\varphi,\varphi+2\,\pi)$; $\forall\varphi$; alors :

$\overline{f}(t_1,t_2) = \int_{t=0}^\infty \int_{\beta=\psi}^{\psi+2\,\pi} g(\nu)\,e^{2\,\pi\,i\,[t\,\nu\,\cos(\beta-\alpha)]}\,\nu\,d\nu\,d\beta$.

Posons $\gamma = \beta-\alpha$; avec α fixé et choisissons $\psi = \alpha$. Il vient $d\gamma = d\beta$ et par conséquent :

155. § 21.4 pp. 375-380
156. 5. S. Seely § 5.6 pp. 358-365

$\overline{f}(t_1, t_2) = \int_{\nu=0}^{\infty} \int_{\gamma=0}^{2\,\pi} g(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu\, \cos(\gamma)}\, \nu\, d\nu\, d\gamma$
$= \int_{t=0}^{\infty} g(\nu)\, [\int_{\gamma=0}^{2\,\pi} e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu\, \cos(\gamma)}\, d\gamma]\, \nu\, d\nu.$

Par conséquent on constate que la fonction $\overline{f}(t_1, t_2)$ est également à symétrie circulaire car elle ne dépend que de t ; alors $\overline{f}(t_1, t_2) = (\mathcal{H}_{an}\, g)(t)$. De plus $\int_{\gamma=0}^{2\,\pi} e^{2\,\pi\, i\, t\, \nu\, \cos(\gamma)}\, d\gamma = 2\,\pi\, J_0(2\,\pi\, t\, \nu)$ où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice 0 [38] [157] et par conséquent :

$(\mathcal{H}_{an}\, g)(t) = 2\,\pi \int_0^{\infty} g(\nu)\, J_0(2\,\pi\, t\, \nu)\, \nu\, d\nu.$

$\mathcal{H}_{an}\, g$ est la transformée de Hankel inverse, d'indice 0, de g.

Exemple : Soit $g(\nu) = \frac{1}{\nu}$; pour $0 < \nu$, alors sa transformée de Hankel inverse, d'indice 0, est $(\mathcal{H}_{an}\, g)(t) = \frac{1}{t}$ pour $0 < t$.

157. p. 121 éq. (49)

9 Transformations de Laplace

On pourra consulter [18] [158] [2] [159] [31] [160] [28] [161] [24] [162] [8] [163] [41] [164] [38] [165] [27] [166] [3] [167] [39] [168].

Nous définissons les transformations de Laplace *bilatères* pour des signaux quelconques (et non nécessairement causaux) [18] [169] [19] [170] [24] [171]. Certains auteurs définissent les transformations de Laplace *unilatères* [18] [172] [38] [173] [28] [174], pour les signaux causaux. Pour ces signaux les transformations bilatères et unilatères sont identiques.

Nous ne définissons que les transformations de Laplace à une dimension. On peut généraliser à plusiers dimensions.

9.1 TLD : Transformation de Laplace Directe

On appelle Transformation de Laplace Directe (TLD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{L} \ : \ h \mapsto \widetilde{h}$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $\widetilde{h}$ [175] complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, dite variable de Laplace [176], telle que :

$$\boxed{\widetilde{h}(p) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-p\,t}\, dt \ ; \ p \ \in \ RDC \text{ de } \widetilde{h}}.$$

On a donc $\widetilde{h} \triangleq \mathcal{L}\, h$ et on note parfois $\widetilde{h} \triangleq \mathcal{L}\,[h(t)]$.

158. § 240 pp. 886-891 et Table 12 pp. 1764-1766
159. § 8.3 Analyse symbolique pp. 510-559
160. pp. 238-267
161. pp. 395-420
162. pp. 573-627
163. Ch. 11 pp.219-240
164. Ch. 5 et 6 pp. 115-147 et pp. 147-161
165. pp. 1032-1034
166. 5. S. Seely. pp. 331-386
167. Ch. 15 pp. 905-981
168. « Laplace transform » 24 pages
169. section H pp. 886-887
170. p. 18
171. Ch. 9 pp. 573-627
172. pp. 886-891
173. pp. 1032-1034
174. pp. 395-420
175. notation de [32]
176. notée s par les anglo-saxons

Région De Convergence (RDC) [24] [177] :

C'est la région du plan complexe dans laquelle l'intégrale précédente converge absolument ; elle possède les propriétés suivantes.

P1 La *RDC* de $\widetilde{h}$ consiste en une bande parallèle à l'axe imaginaire [24] [178].

P2 Pour des fonctions $\widetilde{h}$ rationnelles la *RDC* de H ne contient aucun pôle.

P3 Pour un signal h à support borné et s'il y a au moins une valeur p_0 pour laquelle l'intégrale $\widetilde{h}(p_0)$ converge absolument alors la *RDC* de $\widetilde{h}$ est égale à $\mathbb{C}$.

P4 Si le signal h est tel que $h(t) = 0$ pour $t < t_0$ et si la droite $\sigma = \sigma_0$ est dans la *RDC* de $\widetilde{h}$ alors toutes les valeurs de p telles que $\sigma > \sigma_0$ sont dans la *RDC* de $\widetilde{h}$. En particulier le signal h est *causal* si $t_0 = 0$ et la fonction $\widetilde{h}$ est *holomorphe* dans un domaine tel que $\sigma > -\alpha$; $\alpha > 0$ qui contient l'axe imaginaire.

P5 Si le signal h est tel que $h(t) = 0$ pour $t > t_0$ et si la droite $\sigma = \sigma_0$ est dans la *RDC* de $\widetilde{h}$ alors toutes les valeurs de p telles que $\sigma < \sigma_0$ sont dans la *RDC* de $\widetilde{h}$. En particulier le signal h est *anticausal* si $t_0 = 0$ et la fonction $\widetilde{h}$ est *holomorphe* dans un domaine tel que $\sigma < \alpha$; $\alpha > 0$ qui contient l'axe imaginaire.

P6 Pour un signal h quelconque si la droite $\sigma = \sigma_0$ est dans la *RDC* de $\widetilde{h}$ alors cette *RDC* est une bande du plan complexe parallèle à l'axe imaginaire qui contient la droite précédente.

P7 Pour des signaux h exponentiellement bornés i.e. tels que :

$\exists\alpha$, $\alpha > 0$ et $\exists K$, $K > 0$ tels que : $|h(t)| < K\, e^{-\alpha\,|t|}$, $\forall t$,
l'axe imaginaire appartient à la *RDC* de $\widetilde{h}$.

Remarque : $\widetilde{h}$ n'existe pas toujours. Par exemple on ne peut pas calculer $\widetilde{\text{sgn}}$ car sa *RDC* est vide.

Attention : des signaux h différents peuvent avoir pour TLD la même fonction $\widetilde{h}$ mais alors les *RDC* des $\widetilde{h}$ sont différentes ; comme le montrent les *exemples* suivants.

177. § 9.2 pp. 579-587
178. pp. 579-580 ; les auteurs parlent de bandes, mais il doit y avoir une erreur

Exemple a

$h(t) = (e^{-t} - e^{-3\,t})\,\upsilon(t)$ alors $\widetilde{h}(p) = \frac{2}{(p+1)\,(p+3)}$
et la RDC de $\widetilde{h}$ est définie par $\sigma > -1$.

Exemple b

$h(t) = (-e^{-t} + e^{-3\,t})\,\upsilon(-t)$ alors $\widetilde{h}(p) = \frac{2}{(p+1)\,(p+3)}$
et la RDC de $\widetilde{h}$ est définie par $\sigma < -3$.

Exemple c

$h(t) = [-e^{-t}\,\upsilon(-t) - e^{-3\,t}\,\upsilon(t)]$ alors $\widetilde{h}(p) = \frac{2}{(p+1)\,(p+3)}$
et la RDC de $\widetilde{h}$ est définie par $-3 < \sigma < -1$.

9.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret*

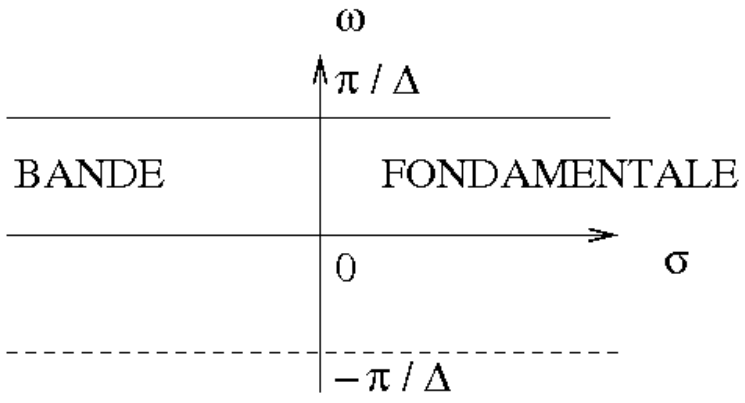
Soit h_e un signal en *temps discret* ; alors :

$\boxed{\widetilde{h_e}(p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-k\,\Delta\,p}\ ;\ p\ \in\ RDC \text{ de } \widetilde{h_e}}$.

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'un signal en *temps discret* quelconque.

On en déduit que $\widetilde{h_e}(p \pm \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}) = \widetilde{h_e}(p)$ et donc que $\widetilde{h_e}$, considérée comme fonction de ω, est périodique de période $\frac{2\pi}{\Delta}$; il suffit, par exemple, d'étudier $\widetilde{h_e}$ sur la *bande fondamentale* du plan complexe telle que $\omega \in]-\frac{\pi}{\Delta}\ \frac{\pi}{\Delta}]$:



Remarque : $\widetilde{h_e}$ n'existe pas toujours. Par exemple on ne peut pas calculer $\widetilde{p_\Delta}$ car sa RDC est vide.

9.1.2 Lien éventuel entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h queconque

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* quelconque il n'y a *aucun* lien entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]\,;\ \forall k \in \mathbb{Z}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta,\ \forall k \in \mathbb{Z}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]-\infty\ \infty[$) on a :

$$\boxed{\widetilde{h_e}(p) = \tfrac{1}{\Delta}\ \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(p - \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta})}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle qui établit le lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ dans le cas d'un signal h quelconque.

9.1.3 Lien avec la TFD

On constate que :

$\widetilde{h}(2\,\pi\,i\,\nu) = \widehat{h}(\nu)$. De plus :

$\widetilde{h}(\sigma + 2\,\pi\,i\,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty}[h(t)\,e^{-\sigma\,t}]\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt = (\mathcal{F}\,[h(t)\,e^{-\sigma\,t}])(\nu)$.

9.1.4 *Exemples* de TLD

i) Exemples de TLD de signaux en temps continu

Exemple 1 : $\widetilde{h}(p) = \frac{2\,a}{a^2 - p^2}$; pour $-a < \sigma < a$.

Exemple 5 : $\widetilde{h}(p) = \frac{2\,p}{p^2 - a^2}$; pour $-a < \sigma < a$.

ii) Exemples de TLD de signaux en temps discret

TLD d'une impulsion de Dirac

$\widetilde{\delta_{t_0}}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)\,e^{-p\,t}\,dt = e^{-t_0\,p}$ (car $e^{-p\,t}$ est un signal en *temps continu* qui est *continu*)$\,;\ \forall\sigma$.

En particulier, en faisant $t_0 = 0$, $\widetilde{\delta_0}(p) = 1\,;\ \forall\sigma$.

Exemple 1_e : $\widetilde{h_e}(p) = \frac{1 - q^2}{1 - 2\,q\,\cosh(\Delta\,p) + q^2}$ (avec $q = e^{-a\,\Delta}$)$\,;$ pour $-a < \sigma < a$.

9.1.5 Formule de Parseval-Plancherel pour la TLD

Supposons que l'axe imaginaire appartient aux RDC de $\widetilde{h}$ et $\widetilde{x}$ et soit le produit scalaire dans le plan de Laplace :

$< \widetilde{h},\, \widetilde{x} > \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\, \int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \widetilde{h}(p)\, \widetilde{x}^{*}(p)\, dp$. Alors :

$< h,\, x > = < \widetilde{h},\, \widetilde{x} >$ et en particulier si $h = x$:

$||h|| \triangleq \sqrt{< h,\, h >} = ||\widetilde{h}|| \triangleq \sqrt{< \widetilde{h},\, \widetilde{h} >}$.

Démonstration

Elle se calque sur celle de la formule de Parseval-Plancherel pour la TFD.

On peut calculer l' intégrale précédente dans le plan complexe le long d'un contour fermé incluant l'axe imaginaire et se refermant, à l'infini, à droite ou à gauche en utilisant le théorème des résidus.

Cas particulier [20]

Si $h(t) \in \mathbb{R}$ et $x(t) \in \mathbb{R}$ alors $x^{*} = x(t) \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{x}^{*}(p) = \widetilde{x}(p^{*}) = \widetilde{x}(\sigma - i\,\omega)$.

Donc si $\sigma = 0$ (i.e. si $p = i\,\omega$) on a $\widetilde{x}^{*}(p) = \widetilde{x}(-p)$ et la formule de Parseval-Plancherel devient :

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{2\,\pi\,i}\, \int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \widetilde{h}(p)\, \widetilde{x}(-p)\, dp$,

et en particulier si $h = x$:

$||h|| \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} h^{2}(t)\, dt} = ||\widetilde{h}|| \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\,\pi\,i}\, \int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \widetilde{h}(p)\, \widetilde{h}(-p)\, dp}$.

Exemple 1 : $h(t) = e^{-a\,|t|}$ et $\widetilde{h}(p) = \frac{2\,a}{a^{2} - p^{2}}$ et on vérifie bien que :

$||h|| \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,a\,|t|}\, dt} = ||\widetilde{h}|| \triangleq \sqrt{\frac{1}{2\,\pi\,i}\, \int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \left(\frac{2\,a}{a^{2} - p^{2}}\right)^{2} dp} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Démonstrations

• En effet le calcul de la première intégrale est trivial grâce à la primitive de l'intégrande QED.

• Et le calcul de la seconde intégrale s'effectue grâce au théorème des residus :

$\left(\frac{2\,a}{a^{2} - p^{2}}\right)^{2} = \frac{1}{a}\, \left(\frac{1}{p + a} + \frac{a}{(p + a)^{2}} - \frac{1}{p - a} + \frac{a}{(p - a)^{2}}\right)$.

Donc Rés $\left[\left(\frac{2\,a}{a^{2} - p^{2}}\right)^{2}, -a\right] = \frac{1}{a}$

Et $\oint_\gamma \left(\frac{2\,a}{a^2-p^2}\right)^2 dp \;=\; 2\,\pi\,i\,\text{Rés}\left[\left(\frac{2\,a}{a^2-p^2}\right)^2, -a\right] \;=\; \frac{2\,\pi\,i}{a}$, où le contour γ est constitué de l'axe imaginaire et d'un demi-cercle de rayon infini se refermant à gauche du plan complexe et dans la mesure où le pôle $p = -a$ est le seul pôle simple strictement à l'intérieur de ce contour.

Étant donné que l'intégrale sur le demi-cercle est nulle, car $|p|$ y est infini, on a bien :

$\sqrt{\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{-i\,\infty}^{i\,\infty}\left(\frac{2\,a}{a^2-p^2}\right)^2 dp} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ QED.

9.1.6 *TLD* d'une convolution linéaire de signaux

i) Signaux en temps continu

Soit $s = h * x$; alors :

$\widetilde{s} = \widetilde{h * x} = \widetilde{h}\,\widetilde{x}$.

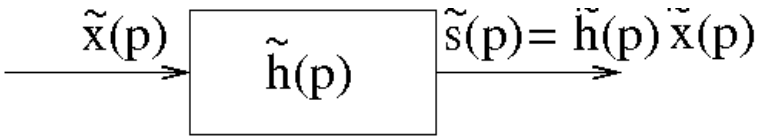
Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'une convolution linéaire de signaux en *temps continu*.

Remarque :

Si h représente la réponse impulsionnelle d'un systéme linéaire invariant et si x représente l'entrée de ce systéme alors la sortie de ce système est donnée par la convolution linéaire $h * x$.

$\widetilde{h}$ la TLD de h est appelée fonction de transfert du système linéaire invariant et la TLD de la sortie est le produit $\widetilde{h}\,\widetilde{x}$ de la fonction de transfert $\widetilde{h}$ et de la TLD $\widetilde{x}$ de l'entrée :



ii) Signaux en temps discret

Soit $u_e = h_e * x_e$; alors :

$\widetilde{u_e} = \widetilde{h_e * x_e} = \widetilde{h_e}\,\widetilde{x_e}$.

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'une convolution linéaire de signaux en *temps discret*.

9.1.7 *TLD* d'un produit de signaux

i) Signaux en temps continu

Soit $z = h\,x$; alors :

$\widetilde{h} * \widetilde{x} = \widetilde{h\,x} = \widetilde{z}$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'un produit de signaux en *temps continu*.

Exemple : soient les signaux $h(t) = e^{-2\,|t|}$ (cf. *Exemple 1* ; avec $a = 2$) (non causal) et $x(t) = (e^{-t} - e^{-3\,t})\,\upsilon(t)$ (cf. *Exemple a)* (causal). Alors on a vu que :

$\widetilde{h}(p) = \frac{4}{4-p^2}$; pour $-2 < \sigma < 2$ et $\widetilde{x}(p) = \frac{2}{(p+1)\,(p+3)}$; pour $-1 < \sigma$.

On en déduit que $h(t)\,x(t) = (e^{-3\,t} - e^{-5\,t})\,\upsilon(t)$ et on trouve que :

$\widetilde{h\,x}(p) = \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+5} = \frac{2}{(p+3)\,(p+5)}$; pour $-3 < \sigma$. Par conséquent :

$(\widetilde{h} * \widetilde{x})(p) = \frac{2}{(p+3)\,(p+5)}$; pour $-3 < \sigma$. C'est bien ce que nous avions trouvé dans la partie « Convolutions ».

ii) Signaux en temps discret

Soit $z_e = h_e\,x_e$; alors :

$\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e} = \widetilde{h_e\,x_e} = \widetilde{z_e}$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'un produit de signaux en *temps discret*.

9.1.8 Dualité

$\widetilde{s} = \widetilde{h * x} = \widetilde{h}\,\widetilde{x}$ et $\widetilde{u_e} = \widetilde{h_e * x_e} = \widetilde{h_e}\,\widetilde{x_e}$
$\widetilde{z} = \widetilde{h\,x} = \widetilde{h} * \widetilde{x}$ et $\widetilde{z_e} = \widetilde{h_e\,x_e} = \widetilde{h_e} * \widetilde{x_e}$.

9.1.9 Translation temporelle

Soit $h'(t) = h(t - t_0)$; alors :

$\widetilde{h'}(p) = e^{-t_0\,p}\,\widetilde{h}(p)$.

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFD d'une translation temporelle.

Remarque : dans le cas où le signal h est causal il est nécessaire que $0 \leqslant t_0$ pour que le signal $h(t - t_0)$ soit également causal et la relation précédente prend le nom de théorème du retard.

9.1.10 TLD d'un signal causal

i) Signal en temps continu

Soit h un signal en *temps continu* causal, alors :

$\boxed{\widetilde{h}(p) \triangleq \int_0^\infty h(t)\, e^{-p\,t}\, dt \ ;\ p \ \in \ RDC \text{ de } \widetilde{h}}$ et on parle de TLD *unilatère.*

ii) Signal en temps discret

Soit h_e un signal en *temps discret* causal ; par conséquent, d'après ce qui précède :

$\boxed{\widetilde{h_e}(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, e^{-k\,\Delta\,p} \ ;\ p \ \in \ RDC \text{ de } \widetilde{h_e}}$.

iii) Lien éventuel entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal il n'y a *aucun* lien entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\left[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)\right] ; \forall k \in \mathbb{Z}^{+*}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta$, $\forall k \in \mathbb{Z}^{+*}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ \infty[$) on a :

$\boxed{\widetilde{h_e}(p) = \frac{1}{\Delta}\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(p - \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}) + h_0 - \frac{h(0+0)}{2}}$.

Démonstration

Elle se calque sur celle qui établit le lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ dans le cas d'un signal h causal.

iv) Exemples

a) Exemples de TLD de signaux en temps continu

Exemple 0 : $\widetilde{v}(p) = \frac{1}{p}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 6 : $\widetilde{h}(p) = \frac{1}{p+a}$; pour $-a < \sigma$.

Remarque : en faisant tendre a vers 0 on retrouve l'*exemple 0.*

b) Exemples de TLD de signaux en temps discret

Exemple 0_e : $\widetilde{v_e}(p) = \frac{1}{2}\,\coth(\frac{\Delta\, p}{2})$; pour $0 < \sigma$.

Remarque : étant donné que v est continu sur $]0\ \infty[$ et que $\widetilde{v}(p) = \frac{1}{p}$ on a, d'après ce qui précède :

$\widetilde{v_e}(p) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p - \frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}}$ (car $v_0 - \frac{v(0+0)}{2} = 0$) ; pour $0 < \sigma$..

Exemple 6_e : $\widetilde{h_e}(p) = \frac{1}{2}\,\coth[\frac{\Delta\,(p+a)}{2}]$; pour $-a < \sigma$.

Remarque : étant donné que h est continu sur $]0\ \infty[$ et que $\widetilde{h}(p) = \frac{1}{p+a}$ on a, d'après ce qui précède :

$\widetilde{h_e}(p) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p+a-\frac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}}$ (car $h_0 - \frac{h(0+0)}{2} = 0$) ; pour $-a < \sigma$.

9.1.11 TLD d'un signal causal à support borné

i) Signal en temps continu

Soit h un signal en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$, alors :

$$\boxed{\widetilde{h}(p) \triangleq \int_0^T h(t)\,e^{-p\,t}\,dt\ ;\ p\ \in\ RDC \text{ de } \widetilde{h}}.$$

ii) Signal en temps discret

Soit h_e un signal en *temps discret* causal à support borné $\{0,\,\ldots,\,N-1\}$; par conséquent, d'après ce qui précède :

$$\boxed{\widetilde{h_e}(p) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\,e^{-k\,\Delta\,p}\ ;\ p\ \in\ RDC \text{ de } \widetilde{h_e}}.$$

iii) Lien éventuel entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal à support borné.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$ il n'y a *aucun* lien entre $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{h}$.

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]$; $k = 1,\,\ldots,\,N-1$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta$; $k = 1,\,\ldots,\,N-1$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ T[$) on a :

$$\boxed{\widetilde{h_e}(p) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{h}(p - \tfrac{2\,n\,\pi\,i}{\Delta}) + h_0 - \tfrac{h(0+0)}{2} - \tfrac{h(T-0)}{2}\,e^{-T\,p}}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle qui établit le lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ dans le cas d'un signal h causal à support borné $[0\ T[$.

iv) Exemples

a) Exemples de TLD de signaux en temps continu

Exemple 2 : $\widetilde{\chi}(p) = \frac{1-e^{-T\,p}}{p}$ [et, par continuité $\widetilde{\chi}(0) = T$] ; $\forall\sigma$.

Exemple 3 : $\widetilde{h}(p) = \frac{1-(1+T\,p)\,e^{-T\,p}}{T\,p^2}$ [et, par continuité $\widetilde{h}(0) = \frac{T}{2}$] ; $\forall\sigma$.

Exemple 4 : $\widetilde{h}(p) = \frac{1-e^{-\frac{2\,\pi\,p}{\Omega}}}{p-i\,\Omega} = \frac{1-e^{-T\,p}}{p-\frac{2\,\pi\,i}{T}}$ [et, par continuité $\widetilde{h}(\frac{2\,\pi\,i}{T}) = T$] ; $\forall\sigma$.

b) Exemples de TLD de signaux en temps discret

Exemple 2_e : $\widetilde{\chi_e}(p) = \frac{1-e^{-T\,p}}{1-e^{-\Delta\,p}}$ [et, par continuité $\widetilde{\chi_e}(0) = N$] ; $\forall\sigma$.

Exemple 3_e : $\widetilde{h_e}(p) = \frac{e^{-\Delta\,p}-N\,e^{-N\,\Delta\,p}+(N-1)\,e^{-(N+1)\,\Delta\,p}}{N\,(1-e^{-\Delta\,p})^2}$ [et, par continuité $\widetilde{h_e}(0) = \frac{N-1}{2}$] ; $\forall\sigma$.

Exemple 4_e : $\widetilde{h_e}(p) = \frac{1-e^{-T\,p}}{1-\omega_N^{-1}\,e^{-\Delta\,p}}$ [et, par continuité $\widetilde{h_e}(\frac{2\,\pi\,i}{T}) = N$] ; $\forall\sigma$.

9.1.12 TLD d'un signal périodique

La TLD d'un signal périodique n'existe pas car sa RDC est vide.

9.1.13 TLD d'un signal causal périodique (pour $0 \leqslant t$)

C'est un cas particulier de la TLD d'un signal causal.

i) Signal en temps continu

Soit h_T le signal en *temps continu* périodique, de période T, qui correspond à la « périodisation » du signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$, alors le signal $h_T\,\upsilon$ est causal et périodique (pour $0 \leqslant t$) ; et par conséquent :

$$\boxed{\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) \triangleq \int_0^\infty h_T(t)\,e^{-p\,t}\,dt = \frac{\widetilde{h}(p)}{1-e^{-T\,p}}\ ;\ 0 < \sigma}.$$

Démonstration

$\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) = \int_0^\infty h_T(t)\,e^{-p\,t}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\,T}^{(n+1)\,T} h_T(t)\,e^{-p\,t}\,dt$.

Soit le changement de varaiable $\tau = t - n\,T$; alors $d\tau = dt$ et :

$\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T h_T(\tau + n\,T)\,e^{-p\,(\tau+n\,T)}\,d\tau$.

Mais $h_T(\tau + n\,T) = h(\tau)$ car $\tau \in [0\ T[$ et par conséquent :

$\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) = [\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\,T\,p}] \int_0^T h(\tau)\, e^{-p\,\tau}\, d\tau = \frac{\widetilde{h}(p)}{1-e^{-T\,p}}$; pour $0 < \sigma$ QED.

ii) Signal en temps discret

$$\boxed{\widetilde{h_{Te}\,\upsilon}(p) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} h_{Tk}\, e^{-k\,\Delta\,p} = \frac{\widetilde{h_e}(p)}{1-e^{-T\,p}}\ ;\ 0 < \sigma}.$$

Démonstration

Elle se calque sur la démonstration précédente QED.

iii) Exemples

Soient i_{T+} et i_{Te+} les *exemples* qui correspondent respectivement aux fonctions $h_T\,\upsilon$ et $h_{Te}\,\upsilon$ des exmples i_T et i_{Te}.

a) Exemples de TFD de signaux en temps continu

Exemple 2_{T+}. Étant donné que $\chi_T = 1$ et donc que $\chi_T\,\upsilon = \upsilon$:

$\widetilde{\chi_T\,\upsilon}(p) = \frac{1}{p}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 3_{T+} : $\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) = \frac{1-(1+T\,p)\,e^{-T\,p}}{T\,p^2\,(1-e^{-T\,p})}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 4_{T+} : $\widetilde{h_T\,\upsilon}(p) = \frac{1}{p-\frac{2\,\pi\,i}{T}}$; pour $0 < \sigma$. Soit :

$(\mathcal{L}\,[e^{i\,\Omega\,t}\,\upsilon(t)])(p) = \frac{1}{p-i\,\Omega}$ (rappel : $\Omega \triangleq \frac{2\,\pi}{T}$) ; pour $0 < \sigma$. Donc :

$(\mathcal{L}\,[e^{-i\,\Omega\,t}\,\upsilon(t)])(p) = \frac{1}{p+i\,\Omega}$; pour $0 < \sigma$.

Remarque : en faisant $\omega = 0$ on retrouve :

$\widetilde{\upsilon}(p) = \frac{1}{p}$; pour $0 < \sigma$. Par conséquent :

$(\mathcal{L}\,[\cos(\Omega\,t)\,\upsilon(t)])(p) = (\mathcal{L}\,[\frac{1}{2}\,(e^{i\,\Omega\,t} + e^{-i\,\Omega\,t})\,\upsilon(t)])(p) = \frac{1}{2}\,[\frac{1}{p-i\,\Omega} + \frac{1}{p+i\,\Omega}]$
$= \frac{p}{p^2+\Omega^2}$; pour $0 < \sigma$.

De même :

$(\mathcal{L}\,[\sin(\Omega\,t)\,\upsilon(t)])(p) = (\mathcal{L}\,[\frac{1}{2\,i}\,(e^{i\,\Omega\,t} - e^{-i\,\Omega\,t})\,\upsilon(t)])(p) = \frac{1}{2\,i}\,[\frac{1}{p-i\,\Omega} - \frac{1}{p+i\,\Omega}]$
$= \frac{\Omega}{p^2+\Omega^2}$; pour $0 < \sigma$.

b) Exemples de TFD de signaux en temps discret

Exemple 2_{Te+} : $\widetilde{\chi_{Te}\,\upsilon}(p) = \frac{1}{1-e^{-\Delta\,p}}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 3_{Te+} : $\widetilde{h_{Te}\,\upsilon}(p) = \frac{e^{-\Delta\,p} - N\,e^{-N\,\Delta\,p} + (N-1)\,e^{-(N+1)\,\Delta\,p}}{N\,(1-e^{-\Delta\,p})^2\,(1-e^{-T\,p})}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 4_{Te+} : $\widetilde{h_{Te}\,\upsilon}(p) = \frac{1}{1-\omega_N^{-1}\,e^{-\Delta\,p}}$; pour $0 < \sigma$.

9.2 TLI : Transformation de Laplace Inverse

On appelle Transformation de Laplace Inverse (TLI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{L}} \ : \ G \mapsto \overline{G}$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* G complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, le signal $\overline{G}$ tel que :

$$\boxed{\overline{G}(t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\sigma_0 - i\,\infty}^{\sigma_0 + i\,\infty} G(p)\, e^{t\,p}\, dp},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma = \sigma_0$ soit dans la RDC de G.

D'un point de vue pratique on peut souvent calculer l'intégrale précédente le long d'un contour fermé incluant la droite précédente et se refermant, à l'infini, à droite ou à gauche en utilisant le théorème des résidus.

On a donc $\overline{G} \triangleq \overline{\mathcal{L}}\, G$ et on note parfois $\overline{G} \triangleq \overline{\mathcal{L}}\, [G(p)]$.

9.2.1 Cas particuliers

a) $G = \widetilde{h}$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque.* Alors :

$$\boxed{\overline{\widetilde{h}}(t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i} \int_{\sigma_0 - i\,\infty}^{\sigma_0 + i\,\infty} \widetilde{h}(p)\, e^{t\,p}\, dp},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma = \sigma_0$ soit dans la RDC de $\widetilde{h}$.

Exemples

Exemple 0 : $\overline{\widetilde{\upsilon}}(t) = \overline{\widehat{\upsilon}}(t) = \upsilon(t)$.

Exemple 1 : $\overline{\widetilde{h}}(t) = \overline{\widehat{h}}(t) = h(t)$.

Exemple 2 : $\overline{\widetilde{\chi}}(t) = \overline{\widehat{\chi}}(t) \neq \chi(t)$.

Exemple 3 : $\overline{\widetilde{h}}(t) = \overline{\widehat{h}}(t) \neq h(t)$.

Exemple 4 : $\overline{\widetilde{h}}(t) = \overline{\widehat{h}}(t) \neq h(t)$.

Exemple 5 : $\overline{\widetilde{h}}(t) = \overline{\widehat{h}}(t) = h(t)$.

Exemple 6 : $\overline{\widetilde{h}}(t) = \overline{\widehat{h}}(t) = h(t)$.

Remarque : on n'a pas toujours $\overline{\widetilde{h}} = \overline{\widehat{h}}$ car il peut arriver que $\overline{\widetilde{h}}$ existe alors que $\overline{\widehat{h}}$ n'existe pas.

b) $G = \widetilde{h_e}$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque*. Alors :

$$\boxed{\overline{\widetilde{h_e}}(t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h_e}(p)\,e^{t\,p}\,dp = h_e(t)}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFI de la TFD d'un signal en *temps discret* quelconque QED.

9.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

On vient de voir que pour les signaux en *temps discret* quelconques on a $h_e = \overline{\widetilde{h_e}}$ et donc $\mathcal{L}^{-1} = \overline{\mathcal{L}}$; *l'inverse* de la Transformée de Laplace Directe (TLD) est la Transformée de Laplace Inverse (TLI).

Mais on vient de voir également que pour les signaux en *temps continu* quelconques $h \neq \overline{\overline{h}}$ et donc $\mathcal{L}^{-1} \neq \overline{\mathcal{L}}$; *l'inverse* de la Transformée de Laplace Directe (TLD) n'est pas la Transformée de Laplace Inverse (TLI).

On peut se poser la question : pour quels signaux en *temps continu l'inverse* de la Transformée de Laplace Directe (TLD) est-elle la Transformée de Lapace Inverse (TLI) ? Le théorème suivant répond à la question.

Théorème : si h est un signal en *temps continu* sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h}(p)\,e^{t\,p}\,dp}.$$

Démonstration [41] [179] :

On a vu que : $\widetilde{h}(\sigma + 2\,\pi\,i\,\nu) = (\mathcal{F}\,[h(t)\,e^{-\sigma\,t}])(\nu)$.

Si on suppose être dans les conditions où la TFI est l'inverse de la TFD on peut écrire :

$\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)]\,e^{-\sigma\,t} = (\mathcal{F}^{-1}\,[\widetilde{h}(\sigma + 2\,\pi\,i\,\nu)])(t)$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}(\sigma + 2\,\pi\,i\,\nu)\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu$.

Soit en multipliant par $e^{\sigma\,t}$:

$\frac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = \int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}(\sigma + 2\,\pi\,i\,\nu)\,e^{(\sigma+2\,\pi\,i\,\nu)\,t}\,d\nu$.

Faisons le changement de variable $p = \sigma + 2\,\pi\,i\,\nu$; pour $\sigma = \sigma_0$ constant on a $dp = 2\,\pi\,i\,d\nu$ et :

179. § 6.4 p. 151

$\frac{1}{2}\left[h(t-0)+h(t+0)\right] = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h}(p)\,e^{t\,p}\,dp$ QED.

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* on a :

$h(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h}(p)\,e^{t\,p}\,dp.$

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

9.2.3 TLI d'un produit de TLD

Soit $\widetilde{s} = \widetilde{h}\,\widetilde{x}$ le produit des deux TLD $\widetilde{h}$ et $\widetilde{x}$. Si h et x sont les TLI respectives de $\widetilde{h}$ et $\widetilde{x}$ alors s, la TLI de $\widetilde{s}$, est donnée d'après ce qui précède, par :

$s = h * x.$

De même soit $\widetilde{u_e} = \widetilde{h_e}\,\widetilde{x_e}$ le produit des deux TLD $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{x_e}$. Si h_e et x_e sont les TLI respectives de $\widetilde{h_e}$ et $\widetilde{x_e}$ alors u_e, la TLI de $\widetilde{u_e}$ est donnée, d'après ce qui précède, par :

$u_e = h_e * x_e.$

9.3 Transformation de Laplace-Stieltjes

On pourra consulter [18] [180] [38] [181] [39] [182].

Soit α une mesure de Borrel. On appelle :

$\boxed{\widetilde{\alpha}(p) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\,t}\,d\alpha(t)}$.

la transformée de Laplace-Stieljtes de cette mesure.

Si $d\alpha(t) = h(t)\,dt$ on retrouve la définition de la transformée de Laplace directe classique.

180. Partie D p. 839
181. p. 1032
182. « Laplace-Stieltjes transform » 4 pages

10 Transformations de Mellin

On pourra consulter [22] [18] [183] [8] [184] [41] [185] [27] [186] [38] [187] [3] [188] [39] [189] [5] [13].

La transformation de Mellin peut être considérée comme la version multiplicative de la transformation de Laplace bilatère [39] [190]

10.1 TMD : Transformation de Mellin Directe d'un signal strictement causal

On appelle Transformation de Mellin Directe (TMD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{M} \ : \ h \mapsto \mathcal{M}\,h$$

qui fait correspondre à un signal h strictement causal la *fonction* ou *distribution* $\mathcal{M}\,h$ complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, telle que :

$$\boxed{(\mathcal{M}\,h)(p) \triangleq \int_0^\infty h(t)\,t^{p-1}\,dt \ ; \ p \ \in \ RDC \text{ de } \mathcal{M}\,h},$$

où RDC est la Région De Convergence de $\mathcal{M}\,h$ i.e. la région du plan complexe dans laquelle $h(t)\,t^{p-1}$ est sommable (pour $0 < t$).

On note parfois $\mathcal{M}\,[h(t)]$ au lieu de $\mathcal{M}\,h$.

10.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret* strictement causal

Soit h_e un signal en *temps discret* strictement causal ; alors :

$$\boxed{(\mathcal{M}\,h_e)(p) = \sum_{k=1}^\infty (k\,\Delta)^{p-1} h_k \ ; \ p \ \in \ RDC \text{ de } \mathcal{M}\,h_e}.$$

Démonstration

$h_e(t) = \sum_{k=1}^\infty h_k\,\delta_{k\,\Delta}(t)$. Donc :

183. Partie C p. 839
184. pp.254-257
185. Ch. 10 pp. 201-214
186. 11. J. Bertrand, P. Bertrand et J.-P. Ovarlez. pp. 829-886
187. p. 1157
188. p. 906
189. « Transformation de Mellin » 4 pages
190. « Transformation de Mellin » 4 pages

$(\mathcal{M}\, h_e)(p) \triangleq \int_0^\infty h_e(t)\, t^{p-1}\, dt = \int_0^\infty [\sum_{k=1}^\infty h_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)]\, t^{p-1}\, dt$
$= \sum_{k=1}^\infty h_k \int_0^\infty t^{p-1}\, \delta_{k\,\Delta}(t)\, dt = \sum_{k=1}^\infty (k\,\Delta)^{p-1} h_k$ car le signal t^{p-1} en *temps continu* est *continu* sur $]0\ \infty[$. Et cette dernière série converge pour $p \in RDC$ de $\mathcal{M}\, h_e$ QED.

10.1.2 Liens avec les transformations de Fourier et de Laplace directes

$\mathcal{M}\,\{h[-\ln(t)]\} = \mathcal{L}\,[h(t)]$,
$\mathcal{L}\,[h(e^{-t})] = \mathcal{M}\,[h(t)]$,
$(\mathcal{F}\,[h(t)])(\nu) = (\mathcal{M}\,\{h[-\ln(t)]\})(2\,\pi\,i\,\nu)$,
$(\mathcal{M}\,[h(t)])(2\,\pi\,i\,\nu) = (\mathcal{F}\,[h(e^{-t})])(\nu)$.

Démonstrations

$(\mathcal{M}\,[h^{'}(t)])(p) \triangleq \int_0^\infty h^{'}(t)\, t^{p-1}\, dt\,;\, \forall h^{'}$.

Soit $h^{'}(t) = h[-\ln(t)]$. Posons $\tau = -\ln(t)$ ou $t = e^{-\tau}$; soit $dt = -e^{-\tau}\, d\tau$. Alors :

$\mathcal{M}\,\{h[-\ln(t)]\}(p) \;=\; \int_0^\infty h(\tau)\, e^{-p\,\tau}\, d\tau \;=\; \int_0^\infty h(t)\, e^{-p\,t}\, dt \;\triangleq\; (\mathcal{L}\,[h(t)])(p)$ QED.

$(\mathcal{L}\,[h^{''}(t)])(p) \triangleq \int_0^\infty h^{''}(t)\, e^{-p\,t}\, dt\,;\, \forall h^{''}$.

Soit $h^{''}(t) = h(e^{-t})$. Posons $\tau = e^{-t}$ ou $t = -\ln(\tau)$; soit $dt = -\frac{d\tau}{\tau}$. Alors :

$(\mathcal{L}\,[h(e^{-t})])(p) = \int_0^\infty h(\tau)\, \tau^{p-1}\, d\tau = \int_0^\infty h(t)\, t^{p-1}\, dt \triangleq (\mathcal{M}\,[h(t)])(p)$ QED.

$(\mathcal{F}\,[h(t)])(\nu) = (\mathcal{L}\,[h(t)])(2\,\pi\,i\,\nu) = (\mathcal{M}\,\{h[-\ln(t)]\})(2\,\pi\,i\,\nu)$ QED.

$(\mathcal{M}\,[h(t)])(2\,\pi\,i\,\nu) = (\mathcal{L}\,[h(e^{-t})])(2\,\pi\,i\,\nu) = (\mathcal{F}\,[h(e^{-t})])(\nu)$ QED.

10.1.3 *Exemples* de TMD de signaux strictement causaux

i) Exemples de TMD de signaux en temps continu strictement causaux

L'*exemple i* « *modifié* » correspond à l'*exemple i* mais avec une valeur nulle à l'origine de manière à être strictement causal.

Exemple 2 « *modifié* » : $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{si} \quad T \leqslant t \end{cases}$. Alors :
$(\mathcal{M}\, h)(p) = \frac{T^p}{p}$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 3 : $(\mathcal{M}\, h)(p) = \frac{T^p}{p+1}$; pour $-1 < \sigma$.

Exemple 6 « modifié » : $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ e^{-a\,t} & \text{si} \quad 0 < t \end{cases}$. Alors : $(\mathcal{M}\,h)(p) = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$; pour $0 < \sigma$, où Γ est la fonction d'Euler [31] [191].

ii) Exemples de TMD de signaux en temps discret strictement causaux

L'*exemple* i_e *« modifié »* correspond à l'*exemple* i_e mais avec une valeur nulle à l'origine de manière à être strictement causal.

$(\mathcal{M}\,[\delta_{t_0}(t)])(p) = t_0^{p-1}$; $\forall\sigma$ avec $0 < t_0$ [**?**] [192].

Exemple 0_e *« modifié »* : $h_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{k\,\Delta}(t)$. Alors : $(\mathcal{M}\,h_e)(p) = \Delta^{p-1}\,\zeta(1-p)$; pour $\sigma < 0$, où ζ est la fonction de Riemann [**?**] [193].

Exemple 2_e *« modifié »* : $h_e(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{k\,\Delta}(t)$. Alors : $(\mathcal{M}\,h_e)(p) = (\sum_{k=1}^{N-1} k^{p-1})\,\Delta^{p-1}$; $\forall p$ (lorsque $p \in \mathbb{N}^*$ cf. [18] [194] pour le calcul explicite).

Exemple 3_e *« modifié »* : $h_e(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{k}{N}\,\delta_{k\,\Delta}(t)$. Alors : $(\mathcal{M}\,h_e)(p) = \frac{1}{N}\,(\sum_{k=1}^{N-1} k^p)\,\Delta^{p-1}$; $\forall p$ (lorsque $p \in \mathbb{N}$ cf. [18] [195] pour le calcul explicite).

Exemple 4_e *« modifié »* : $h_e(t) = \sum_{k=1}^{N-1} \omega_N^{-k}\,\delta_{k\,\Delta}(t)$. Alors : $(\mathcal{M}\,h_e)(p) = (\sum_{k=1}^{N-1} k^{p-1}\,\omega_N^{-k})\,\Delta^{p-1}$; $\forall p$.

Exemple 6_e *« modifié »* : $h_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\,a\,\Delta}\,\delta_{k\,\Delta}(t)$. Alors : $(\mathcal{M}\,h_e)(p) = (\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}\,e^{-k\,a\,\Delta})\,\Delta^{p-1}$; $\forall p$ (le calcul analytique explicite semble hors de portée).

10.2 TMI : Transformation de Mellin Inverse

On appelle Transformation de Mellin Inverse (TMI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{M}} \;:\; G \mapsto \overline{\mathcal{M}}\,G$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* G complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, le signal $\overline{\mathcal{M}}\,G$ strictement causal tel que :

191. Ch. VIII pp. 344-367
192. éq. 2.48
193. éq. 2.55
194. p. 1757
195. p. 1757

$$\boxed{(\overline{\mathcal{M}}\, G)(t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty} G(p)\,t^{-p}\,dp\,;\,0<t},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma=\sigma_0$ soit dans la *RDC* de G.

D'un point de vue pratique on peut souvent calculer l'intégrale précédente le long d'un contour fermé incluant la droite précédente et se refermant, à l'infini, à droite ou à gauche en utilisant le théorème des résidus.

On note parfois $\overline{\mathcal{M}}\,[G(p)]$ au lieu de $\overline{\mathcal{M}}\,G$.

10.2.1 Cas particuliers

a) $G=\mathcal{M}\,h$ *où* h *est un signal en* temps continu *strictement causal quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h)](t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,t^{-p}\,dp\,;\,0<t},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma=\sigma_0$ soit située dans la *RDC* de $\mathcal{M}\,h$.

Exemple 2 « *modifié* » : $[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h)](t)=\left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & 0<t<T \\ \frac{1}{2} & \text{si} & t=T \\ 0 & \text{si} & T<t \end{array}\right. \neq h(t).$

Exemple 3 : $[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h)](t)=\left\{\begin{array}{lll} \frac{t}{T} & \text{si} & 0<t<T \\ \frac{1}{2} & \text{si} & t=T \\ 0 & \text{si} & T<t \end{array}\right. \neq h(t).$

Exemple 6 « *modifié* » : $[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h)](t)=e^{-a\,t}=h(t)$. Il s'agit de l'intégrale de Cahen-Mellin [39] :

$\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\frac{\Gamma(p)}{(a\,t)^p}\,dp=e^{-a\,t}$; pour $0<\sigma_0$ et $0<t$.

b) $G=\mathcal{M}\,h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h_e)](t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h_e)(p)\,t^{-p}\,dp=h_e(t)\,;\,0<t}.$$

Démonstration

Pour $0<t$:

$[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h_e)](t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h_e)(p)\,t^{-p}\,dp$
$=\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}[\sum_{k=1}^{\infty}(k\,\Delta)^{p-1}h_k]\,t^{-p}\,dp$
$=\frac{1}{2\,\pi\,i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{k\,\Delta}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}e^{-p\,\ln(\frac{t}{k\,\Delta})}\,dp.$

Soit $p = \sigma_0 + 2\,\pi\,i\,\nu$ et donc $dp = 2\,\pi\,i\,d\nu$. Alors :

$[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h_e)](t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{k\,\Delta}\,e^{-\sigma_0\,\ln(\frac{t}{k\,\Delta})}\,v.p.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\,i\,\ln(\frac{t}{k\,\Delta})\,\nu}\,d\nu.$

Mais $v.p.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\,\pi\,i\,\ln(\frac{t}{k\,\Delta})\,\nu}\,d\nu = \delta_0[\ln(\frac{t}{k\,\Delta})] = k\,\Delta\,\delta_{k\,\Delta}(t)$ [**?**] [196]. Et alors :

$[\overline{\mathcal{M}}\,(\mathcal{M}\,h_e)](t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,(\frac{t}{k\,\Delta})^{-\sigma_0}\,\delta_{k\,\Delta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k\,\delta_{k\,\Delta}(t) = h_e(t)$ car le signal en continu $(\frac{t}{k\,\Delta})^{-\sigma_0}$ est *continu* sur $]0\ \infty[$ QED.

10.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h est un signal en *temps continu* strictement causal sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = \tfrac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,t^{-p}\,dp\,;\,0<t}.$$

Démonstration ([41] [197] [27] [198])

Puisque, d'après les liens précédents :

$(\mathcal{M}\,h)(p) = \int_{\infty}^{\infty} h(e^{-t})\,e^{-p\,t}\,dt = \int_{\infty}^{\infty}[h(e^{-t})\,e^{-\sigma\,t}]\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,dt$ on a, d'après la formule de réciprocité de la TFI :

$\tfrac{1}{2}\,\{h[e^{-(t-0)}]\,e^{-\sigma\,(t-0)} + h[e^{-(t+0)}]\,e^{-\sigma\,(t+0)}\} = \int_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu.$

Mais le signal $e^{-\sigma\,t}$ est *continu* et, par conséquent :

$\tfrac{1}{2}\,\{h[e^{-(t-0)}] + h[e^{-(t+0)}]\}\,e^{-\sigma\,t} = \int_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,e^{2\,\pi\,i\,t\,\nu}\,d\nu.$

Posons $u = e^{-t}$; alors :

$\tfrac{1}{2}\,[h(u-0)+h(u+0)] = u^{-\sigma}\int_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,u^{-2\,\pi\,i\,\nu}\,d\nu = \int_{\infty}^{\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,u^{-p}\,d\nu.$

Faisons le changement de variable $p = \sigma + 2\,\pi\,i\,\nu$, soit $dp = 2\,\pi\,i\,d\nu$; alors :

$\tfrac{1}{2}\,[h(u-0)+h(u+0)] = \tfrac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma-i\,\infty}^{\sigma+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,u^{-p}\,dp$ QED.

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* on a :

$h(t) = \tfrac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}(\mathcal{M}\,h)(p)\,t^{-p}\,dp.$

On peut vérifier la véracité de ce théorème pour les *exemples* précédents.

196. p. 11 éq. 2.52
197. § 10.4 p. 205
198. 11. J. Bertrand, P. Bertrand et J.-P. Ovarlez § 11.2.1.2 pp. 832-835

11 Transformations de Carson

On pourra consulter [2] [199].

Nous définissons les transformations de Carson *bilatères*. Certains auteurs définissent les transformations de Carson *unilatères* [2] [200].

11.1 TCD : Transformation de Carson Directe

On appelle Transformation de Carson Directe (TCD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{C} \ : \ h \mapsto \mathcal{C}\, h$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $\mathcal{C}\, h$ complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, telle que :

$$\boxed{(\mathcal{C}\, h)(p) \triangleq p \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-p\,t}\, dt \triangleq p\, \widetilde{h}(p) \ ; \ p \ \in \ RDC \text{ de } \mathcal{C}\, h},$$

où RDC est la Région De Convergence de $\mathcal{C}\, h$ i.e. la région du plan complexe dans laquelle $h(t)\, e^{-p\,t}$ est sommable et on constate que :
RDC de $\mathcal{C}\, h = RDC$ de $\widetilde{h}$.

On note parfois $\mathcal{C}\,[h(t)]$ au lieu de $\mathcal{C}\, h$.

11.1.1 Cas particulier d'un signal en *temps discret*

$(\mathcal{C}\, h_e)(p) \triangleq p\, \widetilde{h_e}(p) = p \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, e^{-k\,\Delta\, p}$

Démonstration : cf. celle de la TLD d'un signal en *temps discret*.

11.1.2 Liens avec les transformées de Fourier et de Laplace directes

$(\mathcal{C}\, h)(p) = p\, \widetilde{h}(p)$
$(\mathcal{C}\, h)(2\,\pi\, i\,\nu) = 2\,\pi\, i\,\nu\, \widehat{h}(\nu)$

Démonstrations : évidentes.

199. pp. 510, 538
200. pp. 510, 538

11.1.3 *Exemples* de TMD

i) Exemples de TMD de signaux en temps continu

Exemple 0 : $(\mathcal{C}\,\upsilon)(p) = 1$; pour $0 < \sigma$.

Exemple 1 : $(\mathcal{C}\,h)(p) = \frac{2\,a\,p}{a^2-p^2}$; pour $-a < \sigma < a$.

Exemple 2 : $(\mathcal{C}\,\chi)(p) = 1 - e^{-T\,p}$; $\forall\sigma$.

Exemple 3 : $(\mathcal{C}\,h)(p) = \frac{1-(1+T\,p)\,e^{-T\,p}}{T\,p}$; $\forall\sigma$.

Exemple 4 : $(\mathcal{C}\,h)(p) = \frac{p\,(1-e^{-T\,p})}{p-\frac{2\,\pi\,i}{T}}$; $\forall\sigma$.

Exemple 5 : $(\mathcal{C}\,h)(p) = \frac{2\,p^2}{p^2-a^2}$; pour $-a < \sigma < a$.

Exemple 6 : $(\mathcal{C}\,h)(p) = \frac{p}{p+a}$; pour $-a < \sigma$.

ii) Exemples de TMD de signaux en temps discret

$(\mathcal{C}\,\delta_{t_0})(p) = p\,e^{-t_0\,p}$; $\forall\sigma$.

et, en particulier :

$(\mathcal{C}\,\delta_0)(p) = p$; $\forall\sigma$.

11.2 TCI : Transformation de Carson Inverse

On appelle Transformation de Carson Inverse (TCI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{C}} \;:\; G \mapsto \overline{\mathcal{C}}\,G$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* G complexe, de la variable complexe $p = \sigma + i\,\omega$, le signal $\overline{\mathcal{C}}\,G$ tel que :

$$\boxed{(\overline{\mathcal{C}}\,G)(t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty} \frac{G(p)\,e^{t\,p}}{p}\,dp},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma = \sigma_0$ soit dans la RDC de $\frac{G(p)}{p}$.

D'un point de vue pratique on peut souvent calculer l'intégrale précédente le long d'un contour fermé incluant la droite précédente et se refermant, à l'infini, à droite ou à gauche en utilisant le théorème des résidus.

On note parfois $\overline{\mathcal{C}}\,[G(p)]$ au lieu de $\overline{\mathcal{C}}\,G$.

11.2.1 Cas particuliers

a) $G = \mathcal{C}\,h$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\overline{\mathcal{C}}\,(\mathcal{C}\,h)](t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\frac{(\mathcal{C}\,h)(p)\,e^{t\,p}}{p}\,dp \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h}(p)\,e^{t\,p}\,dp = \overline{\widetilde{h}}(t)},$$

de telle manière que la droite du plan complxe $\sigma = \sigma_0$ soit dans la RDC de $\frac{(\mathcal{C}\,h)(p)}{p}$.

Exemples : cf. les *exemples* de la TLI.

b) $G = \mathcal{C}\,h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque.* Alors :

$$\boxed{[\overline{\mathcal{C}}\,(\mathcal{C}\,h_e)](t) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\frac{(\mathcal{C}\,h_e)(p)\,e^{t\,p}}{p}\,dp \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\widetilde{h_e}(p)\,e^{t\,p}\,dp = h_e(t)}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TFI de la TFD d'un signal en *temps discret* quelconque QED.

Exemples : cf. les *exemples* de la TLI.

11.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

Théorème : si h est un signal en *temps continu* sommable et à variation bornée sur tout intervalle borné [28] on a la formule de réciprocité (ou le théorème d'inversion) :

$$\boxed{\tfrac{1}{2}\,[h(t-0)+h(t+0)] = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\frac{(\mathcal{C}\,h)(p)\,e^{t\,p}}{p}\,dp}.$$

Démonstration

cf. la formule de réciprocité pour la TLD QED.

Donc si le signal h en *temps continu* est *continu* on a :

$h(t) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\int_{\sigma_0-i\,\infty}^{\sigma_0+i\,\infty}\frac{(\mathcal{C}\,h)(p)\,e^{t\,p}}{p}\,dp.$

12 Transformation de Gabor

On pourra consulter [41] [201] [39] [202].

12.1 TGD : Transformation de Gabor Directe

On appelle Transformation de Gabor Directe (TGD), par rapport à un signal ψ, l'application linéaire :

$$G_\psi \, : \, h \mapsto G_\psi \, h$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $G_\psi \, h$ complexe, des deux variables réelles ν (fréquence) et τ (temps), telle que :

$$\boxed{(G_\psi \, h)(\nu, \, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \, \psi(t - \tau) \, e^{2 \, \pi \, i \, \nu \, t} \, dt}.$$

On note parfois $G_\psi \, [h(t)]$ au lieu de $G_\psi \, h$.

Le signal ψ est appelé signal fenêtre ou signal analysateur. On pose $\psi_\tau(t) = \psi(t - \tau)$ et $\psi_{\nu, \, \tau}(t) = \psi_\tau(t) \, e^{2 \, \pi \, i \, \nu \, t}$ (fonctions de transformation de Gabor).

Exemples de signaux fenêtres

$\psi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}}$ signal fenêtre de Gabor.

$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{4}}$ signal fenêtre de Weierstrass.

12.1.1 Lien avec la TFD

$(G_\psi \, h)(\nu, \, \tau) = (\mathcal{F} \, [h(t) \, \psi_\tau(t)])(\nu)$ (démonstration évidente).

Mais :

$< h, \, \psi^*_{\nu, \, \tau} > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \, \psi_{\nu, \, \tau}(t) \, dt$, donc :

$(G_\psi \, h)(\nu, \, \tau) = < h, \, \psi^*_{\nu, \, \tau} >$

201. Ch. 30 pp. 491-505
202. « Gabor transform » 3 pages

12.1.2 Produit scalaire

Soit $< G_\psi\, h,\, G_\psi\, x > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi\, h(\nu,\, \tau)\, [G_\psi\, x(\nu,\, \tau)]^*\, d\nu\, d\tau$. Alors :

$< G_\psi\, h,\, G_\psi\, x >= ||\psi||^2\, < h,\, x >$

Démonstration

$< G_\psi\, h,\, G_\psi\, x > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \{ \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi\, h(\nu,\, \tau)\, [G_\psi\, x(\nu,\, \tau)]^*\, d\nu \}\, d\tau$
$= \int_{-\infty}^{\infty} < \mathcal{F}\,(h\, \psi_\tau),\, \mathcal{F}\,(x\, \psi_\tau) >\, d\tau.$

Mais, d'après la formule de Parseval-Plaancherel pour la TFD :

$< \mathcal{F}\,(h\, \psi_\tau),\, \mathcal{F}\,(x\, \psi_\tau) >=< h\, \psi_\tau,\, x\, \psi_\tau >= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \psi_\tau(t)\, [x(t)\, \psi_\tau(t)]^*\, dt$
$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, x^*(t)\, |\psi(t - \tau)|^2\, dt.$

Donc $< G_\psi\, h,\, G_\psi\, x >= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, x^*(t)\, [\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t - \tau)|^2\, d\tau]\, dt.$

En faisant le changement de variable $u = t - \tau$, avec t fixé, soit $du = -d\tau$ on a $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t - \tau)|^2\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(u)|^2\, du = ||\psi||^2$. Et finalement :

$< G_\psi\, h,\, G_\psi\, x >= ||\psi||^2\, < h,\, x >$ QED.

12.2 TGI : Transformation de Gabor Inverse

On appelle Transformation de Gabor Inverse (TGI) l'application *linéaire* :

$$\overline{G_\psi}\ :\ A \mapsto \overline{G_\psi}\, A$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* A complexe, des deux variables réelles ν (fréquence) et τ (temps) le signal $\overline{G_\psi}\, A$ tel que :

$$\boxed{(\overline{G_\psi}\, A)(t) \triangleq \frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu,\, \tau)\, \psi^*(t - \tau)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, d\nu\, d\tau}.$$

On note parfois $\overline{G_\psi}\, [A(\nu,\, \tau)]$ au lieu de $\overline{G_\psi}\, A$.

12.2.1 Cas particulier

$A = G_\psi\, h$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque*

Alors :

$[\overline{G_\psi}\, (G_\psi\, h)](t) = \frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (G_\psi\, h)(\nu,\, \tau)\, \psi^*(t - \tau)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, d\nu\, d\tau.$

12.3 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

$\boxed{h(t) = [\overline{G_\psi}\,(G_\psi\, h)](t)}$.

Démonstration [41] [203]

$< h,\, x >= \frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi\, h(\nu,\, \tau)\, [\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \psi(t-\tau)\, e^{2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, dt]^*\, d\nu\, d\tau$
$= \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi\, h(\nu,\, \tau)\, \psi^*(t-\tau)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, d\nu\, d\tau]\, x^*(t)\, dt$, $\forall x$, donc :

$h(t) = \frac{1}{||\psi||^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_\psi\, h(\nu,\, \tau)\, \psi^*(t-\tau)\, e^{-2\,\pi\, i\, \nu\, t}\, d\nu\, d\tau$ QED.

Remarque : pour les signaux fenêtres de Gabor et de Weierstrass on a $||\psi||^2 = 1$ car $\int_0^{\infty} e^{-a^2\, x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,|a|}$, pour $a \neq 0$ [18] [204].

203. § 30.5 pp. 497-498
204. p. 1755

13 Transformations en ondelettes

On pourra consulter [41] [205] [27] [206] [39] [207] [38] [208] [12].

Soit ψ un signal complexe, de carré sommable, appelé ondelette mère qui est supposé vérifier :

$C_\psi \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\nu)|^2}{|\nu|}\, d\nu < \infty$

et soit :

$\psi_{a,\,b}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \psi(\frac{t-b}{a})$; $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$; $a \neq 0$, où a est le facteur de dilatation et b le facteur de translation.

Les signaux $\psi_{a,\,b}$ sont appelés ondelettes filles $[\psi_{1,0}(t) = \psi(t)]$.

13.1 TOD : Transformation en Ondelettes Directe

On appelle Transformation en Ondelettes Directe (TOD) l'application linéaire :

$$W_\psi \,:\, h \mapsto W_\psi\, h$$

qui fait correspondre à un signal h la *fonction* ou *distribution* $W_\psi\, h$ complexe, des deux variables réelles a ($a \neq 0$) et b, telle que :

$$\boxed{(W_\psi\, h)(a,\, b) \triangleq < h,\, \psi_{a,\,b} > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \psi^*_{a,\,b}(t)}.$$

On note parfois $W_\psi\, [h(t)]$ au lieu de $W_\psi\, h$.

13.1.1 Autre présentation de la TOD

$(W_\psi\, h)(a,\, b) = \sqrt{|a|}\, \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\, i\, b\, \nu}\, \widehat{\psi}^*(a\,\nu)\, d\nu$ (rappel : * est la conjugaison complexe).

Démonstration

Lemme : $\widehat{\psi_{a,\,b}}^*(\nu) = \sqrt{|a|}\, e^{2\,\pi\, i\, b\, \nu}\, \widehat{\psi}^*(a\,\nu)$.

205. Ch. 32 pp. 531-555

206. 10. Y. Sheng. pp. 747-828

207. « Ondelette » 5 pages, « Transformée en ondelette continue » 3 pages, « Transformée en ondelette discrète » 1 page, « Compression par ondelette » 5 pages, « Une exploration des signaux en ondelette par Stéphane Mallat » (hypertexte) 3 pages

208. p. 185 pp. 781-782 p.1063 pp. 1924-1925

Démonstration de ce lemme

$\widehat{\psi_{a,\,b}}(\nu) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,\,b}(t)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\frac{t-b}{a})\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\, dt.$

Posons $\tau = \frac{t-b}{a}$ soit $t = a\,\tau + b$ et $dt = a\,d\tau$.

• si $0 < a$: $\widehat{\psi_{a,\,b}}(\nu) = \sqrt{a}\, e^{-2\,\pi\,i\,b\,\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{-2\,\pi\,i\,\tau\,a\,\nu}\, d\tau$
$= \sqrt{a}\, e^{-2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, \widehat{\psi}(a\,\nu)$

• si $a < 0$: $\widehat{\psi_{a,\,b}}(\nu) = \sqrt{-a}\, e^{-2\,\pi\,i\,b\,\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\, e^{-2\,\pi\,i\,\tau\,a\,\nu}\, d\tau$
$= \sqrt{-a}\, e^{-2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, \widehat{\psi}(a\,\nu).$

Et donc dans tous les cas :

$\widehat{\psi_{a,\,b}}(\nu) = \sqrt{|a|}\, e^{-2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, \widehat{\psi}(a\,\nu)$ soit $\widehat{\psi_{a,\,b}}^{*}(\nu) = \sqrt{|a|}\, e^{2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, \widehat{\psi}^{*}(a\,\nu)$ QED.

D'après la formule de Parseval-Plancherel pour la TFD on a :

$(W_\psi\, h)(a,\, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, \widehat{\psi_{a,\,b}}^{*}(\nu)\, d\nu$ et finalement d'après le lemme :

$(W_\psi\, h)(a,\, b) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, e^{2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, \widehat{\psi}^{*}(a\,\nu)\, d\nu$ QED.

13.1.2 Conséquence de cette autre présentation de la TOD

$\sqrt{|a|}\, \widehat{h}(\nu)\, \widehat{\psi}^{*}(a\,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi\, h)(a,\, b)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,b}\, db.$

Démonstration

L'autre présentation de la TOD s'écrit également :

$\frac{1}{\sqrt{|a|}}\, (W_\psi\, h)(a,\, b) = \int_{-\infty}^{\infty} [\widehat{h}(\nu)\, \widehat{\psi}^{*}(a\,\nu)]\, e^{2\,\pi\,i\,b\,\nu}\, db.$

On reconnait dans le second membre, avec des hypothèses de régularité suffisantes, une TFI. Par conséquent :

$\widehat{h}(\nu)\, \widehat{\psi}^{*}(a\,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, (W_\psi\, h)(a,\, b)\, e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,b}\, db$ QED.

13.1.3 Produits scalaires

Considérons le produit scalaire de deux signaux h et x (rappel) :

$< h,\, x > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, x^{*}(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\nu)\, \widehat{x}^{*}(\nu)\, d\nu$, d'après la formule de Parseval-Plancherel pour la TFD

et le produit scalaire de $W_\psi\, h$ et $W_\psi\, h$, leurs TOD :

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x > \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi\, h)(a,\, b)\, [(W_\psi\, x)(a,\, b)]^{*}\, \frac{da\, db}{a^2}$. Alors :

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x > = C_\psi\, < h,\, x >$ avec la valeur C_ψ précédente.

Démonstration

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x >= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,[\sqrt{|a|}\,\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{x}(\nu)\,e^{2\,\pi\,i\,b\,\nu}\,\widehat{\psi}^{*}(a\,\nu)\,d\nu]^{*}\,\frac{da\,db}{a^2}$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{|a|}\,\{\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{x}^{*}(\nu)\,\widehat{\psi}(a\,\nu)\,[\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,b}\,db]\,d\nu\}\,\frac{da}{a^2}$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{|a|}\,\{\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{x}^{*}(\nu)\,\widehat{\psi}(a\,\nu)\,[\sqrt{|a|}\,\widehat{h}(\nu)\,\widehat{\psi}^{*}(a\,\nu)]\,d\nu\}\,\frac{da}{a^2}$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu)\,\widehat{x}^{*}(\nu)\,[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(a\,\nu)|^{2}}{|a|}\,da]\,d\nu$
$= \int_{-\infty}^{0}\widehat{h}(\nu)\,\widehat{x}^{*}(\nu)\,[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(a\,\nu)|^{2}}{|a|}\,da]\,d\nu + \int_{0}^{\infty}\widehat{h}(\nu)\,\widehat{x}^{*}(\nu)\,[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(a\,\nu)|^{2}}{|a|}\,da]\,d\nu$

Dans la première intégrale du second membre, en posant $y = a\,\nu$ (avec $\nu < 0$) on trouve que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(a\,\nu)|^{2}}{|a|}\,da = C_\psi$ et dans la seconde, en posant $y = a\,\nu$ (avec $0 < \nu$) on trouve également que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\widehat{\psi}(a\,\nu)|^{2}}{|a|}\,da = C_\psi$. Par conséquent ces deux dernières intégrales sont indépendantes de ν et de a et finalement :

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x >= C_\psi\, < h,\, x >$ QED.

13.2 TOI : Transformation en Ondelettes Inverse

On appelle Transformation en Ondelettes Inverse (TOI) l'application *linéaire* :

$$\overline{W_\psi}\ :\ B \mapsto \overline{W_\psi}\,B$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* B complexe, des deux variables réelles a ($a \neq 0$) et b le signal $\overline{W_\psi}\,B$ tel que :

$$\boxed{(\overline{W_\psi}\,B)(t) \triangleq \frac{1}{C_\psi}\,\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}B(a,\, b)\,\psi_{a,\,b}(t)\,\frac{da\,db}{a^2}}.$$

On note parfois $\overline{W_\psi}\,[B(a,\, b)]$ au lieu de $\overline{W_\psi}\,B$.

13.2.1 Cas particulier

$B = W_\psi\, h$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque*

Alors :

$[\overline{W_\psi}\,(W_\psi\, h)](t) = \frac{1}{C_\psi}\,\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,\psi_{a,\,b}(t)\,\frac{da\,db}{a^2}$.

13.3 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

$\boxed{h(t) = [\overline{W_\psi}\,(W_\psi\, h)](t)}$.

Démonstration [41] [209]

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x >= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\psi^*_{a,\,b}(t)]^*\,\frac{da\,db}{a^2}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\,\psi_{a,\,b}(t)]\,\frac{da\,db}{a^2}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,\psi_{a,\,b}(t)\,\frac{da\,db}{a^2}]\,x^*(t)\,dt.$

Et on a vu que :

$< W_\psi\, h,\, W_\psi\, x >= C_\psi\,\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,x^*(t)\,dt.$

Ces deux dernières relations sont valables $\forall x^*$ et par conséquent :

$C_\psi\, h(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,\psi_{a,\,b}(t)\,\frac{da\,db}{a^2}$ ou :

$h(t) = \frac{1}{C_\psi}\,\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(W_\psi\, h)(a,\, b)\,\psi_{a,\,b}(t)\,\frac{da\,db}{a^2}$ QED.

209. § 32.2.5 p. 537

14 Transformations en z modifiées

On pourra consulter [20] [210] [39] [211].

Nous définissons les transformations en z modifiées *bilatères* pour des signaux quelconques (et non nécessairement causaux). Certains auteurs définissent les transformations en z modifiées *unilatères* [20] [212] [39] [213] pour les signaux causaux. Pour ces signaux les transformations bilatères et unilatères sont identiques.

Ces transformations sont qualifiées de «advanced Z-transforms» en anglais.

14.1 $TzMD$: Transformation en z Modifiée Directe

On appelle Transformation en z Modifiée Directe ($TzMD$) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{Z}_{mod} \ : \ h \mapsto \mathrm{H}_{mod}$$

qui fait correspondre à un signal h en *temps continu* la *fonction* ou *distribution* H_{mod} complexe, de la variable complexe z et du paramètre réel m ($m \in [0\ 1[$) telle que :

$\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) \triangleq (\mathcal{L}\,[h(t-\Delta+m\,\Delta)\,p_\Delta(t)])(\frac{1}{\Delta}\,\ln\,z)$.

On a donc $\mathrm{H}_{mod} \triangleq \mathcal{Z}_{mod}\,h$ et on note parfois $\mathrm{H}_{mod} \triangleq \mathcal{Z}_{mod}\,[h(t)]$.

Si h est *continu* en $k\,\Delta$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ [214] on a :

$$\boxed{\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k+m}\,z^{-k}\,;\ h_{k+m} \triangleq h[(k+m)\,\Delta]}.$$

Démonstration

$p_\Delta(t) = p_\Delta(t-\Delta)$. Donc :
$(\mathcal{L}\,[h(t-\Delta+m\,\Delta)\,p_\Delta(t)])(p) = (\mathcal{L}\,[h(t-\Delta+m\,\Delta)\,p_\Delta(t-\Delta)])(p)$
$= e^{-\Delta\,p}\,(\mathcal{L}\,[h(t+m\,\Delta)\,p_\Delta(t)])(p)$ d'après la propriété de translation temporelle.

Posons $p = \frac{1}{\Delta}\,\ln\,z$ soit $z = e^{\Delta\,p}$. Alors :

210. pp.41-50
211. «Advanced Z-transform» 3 pages
212. pp.41-50
213. «Advanced Z-transform» 3 pages
214. ce qui est en particulier le cas si h est *continu* sor $]-\infty\ \infty[$

$\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) \triangleq (\mathcal{L}\,[h(t-\Delta+m\,\Delta)\,p_{\Delta}(t)])(\frac{1}{\Delta}\,\ln\,z)$
$= z^{-1}\,(\mathcal{L}\,[h(t+m\,\Delta)\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{k\,\Delta}(t)])(\frac{1}{\Delta}\,\ln\,z)$
$= z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mathcal{L}\,[h(t+m\,\Delta)\,\delta_{k\,\Delta}(t)])(\frac{1}{\Delta}\,\ln\,z)$
$= z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t+m\,\Delta)\,\delta_{k\,\Delta}(t)\,e^{-\frac{t}{\Delta}\,\ln\,z}\,dt.$

Et si h est *continu* en $k\,\Delta$; $\forall\, k\,\in\,\mathbb{Z}$ et étant donné que $e^{-\frac{t}{\Delta}\,\ln\,z}$ l'est :

$\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[(k+m)\,\Delta]\,e^{-k\,\ln\,z}$
$= z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[(k+m)\,\Delta]\,z^{-k} = z^{-1}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{k+m}\,z^{-k}$ QED.

Exemples :

Exemple 0 : $(\mathcal{Z}_{mod}\,\upsilon)(z,\, m) = \left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{z-1} & \text{si}\quad 0<m<1\\ \frac{z+1}{2\,z\,(z-1)} & \text{si}\quad m=0\end{array}\right.$; $1<|z|$.

Exemple 1 : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \frac{q^m\,(z-q^{-1})-q^{-m}\,(z-q)}{(z-q)\,(z-q^{-1})}$; $q<|z|<q^{-1}$;
avec $0<q\triangleq e^{-a\,\Delta}<1$.

Exemple 2 : $(\mathcal{Z}_{mod}\,\chi)(z,\, m) = \frac{z^N-1}{z^N\,(z-1)}$; $RDC=\mathbb{C}$.

Exemple 3 : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \frac{z^{-1}}{N}\,[\frac{z-N\,z^{2-N}+(N-1)\,z^{1-N}}{(z-1)^2}+m\,\frac{z^N-1}{z^{N-1}\,(z-1)}]$;
$RDC=\mathbb{C}$.

Exemple 4 : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \frac{z^{-1}\,(z^N-1)\,e^{\frac{2\,m\,\pi\,i}{N}}}{z^{N-1}\,(z-\omega_N^{-1})}$; $RDC=\mathbb{C}$.

Exemple 5 : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \left\{\begin{array}{ll}\frac{q^{-m}\,(z-q)+q^m\,(z-q^{-1})}{(z-q)\,(z-q^{-1})} & \text{si}\quad 0<m<1\\ \frac{z^{-1}\,(z^2-1)}{(z-q)\,(z-q^{-1})} & \text{si}\quad m=0\end{array}\right.$;
$q<|z|<q^{-1}$; avec $0<q\triangleq e^{-a\,\Delta}<1$.

Exemple 6 : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \left\{\begin{array}{ll}\frac{q^m}{z-q} & \text{si}\quad 0<m<1\\ \frac{z^{-1}\,(z+q)}{2\,(z-q)} & \text{si}\quad m=0\end{array}\right.$; $q<|z|$;
avec $0<q\triangleq e^{-a\,\Delta}<1$.

Exemple 6 bis : $\mathrm{H}_{mod}(z,\, m) = \frac{q^m}{z-q}$; $q<|z|$; avec $0<q\triangleq e^{-a\,\Delta}<1$.

14.2 $TzMI$: Transformation en z Modifiée Inverse

On appelle Transformation en z Modifiée Inverse ($TzMI$) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\ :\ \mathrm{G}_{mod}\mapsto\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod}$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* G_{mod} complexe, de la variable complexe z et du paramètre réel m ($m\in[0\ 1[$), le signal *temps continu* $\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod}$, tel que :

$$\boxed{(\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod})_{k+m} \triangleq (\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod})\,[(k+m)\,\Delta] \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma}\mathrm{G}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}\,dz},$$

où le contour γ désigne un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{G}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}$ et entourant l'origine.

On note parfois $\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,[\mathrm{G}_{mod}(z,\,m)]$ au lieu de $\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,\mathrm{G}_{mod}$.

14.2.1 Cas particuliers

$\mathrm{G}_{mod} = \mathrm{H}_{mod} \triangleq \mathcal{Z}_{mod}\,h$ *où* h *est un signal en* temps continu *quelconque*

Alors :

$[\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,(\mathcal{Z}_{mod}\,h)]_{k+m} \triangleq [\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,(\mathcal{Z}_{mod}\,h)]\,[(k+m)\,\Delta]$
$= \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma}\mathrm{H}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}\,dz$

où le contour γ désigne un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{H}_{mod}(z)\,z^{k-1}$ et entourant l'origine.

14.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

$h(t) = [\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,(\mathcal{Z}_{mod}\,h)](t)$ soit :

$\boxed{h_{k+m} = [\overline{\mathcal{Z}_{mod}}\,(\mathcal{Z}_{mod}\,h)]_{k+m}\ ;\ \forall k \in \mathbb{Z}\ ;\ \forall m \in [0\ 1[}$, soit :

$\mathcal{Z}_{mod}^{-1} = \overline{\mathcal{Z}}_{mod}$ et l'inverse de la $TzMD$ est la $TzMI$..

Démonstration

Soit $\mathrm{H}_{mod}(z,\,m) \triangleq (\mathcal{Z}_{mod}\,h)(z,\,m) \triangleq z^{-1}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n+m}\,z^{-n}$.

D'après le *théorème intégral de Cauchy* :

$\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma} z^{k-1}\,dz = \delta_{k0}$ (δ_{k0} symbole de kronecker) ; $\forall k \in \mathbb{Z}$; où γ est un contour entourant l'origine.

Par conséquent si γ est un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{H}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}$ et entourant l'origine on a :

$\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma}\mathrm{H}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n+m}\,[\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma} z^{-n+k-1}\,dz]$
$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{n+m}\,\delta_{-n+k,0} = h_{k+m}$ QED.

Remarque : l'intégrale $\frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_{\gamma}\mathrm{H}_{mod}(z,\,m)\,z^{k}\,dz$ se calcule grâce au théorème des résidus. Pour $k < 0$ le calcul devient de plus en plus compliqué lorsque $|k|$ augmente.

14.2.3 Méthodes de calcul de la transformation en z modifiée inverse

Première méthode de calcul :

D'après ce qui précède on a :

$h_{k+m} = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_{\gamma} \mathrm{H}_{mod}(z,\, m)\, z^k\, dz\,;\, \forall k \in \digamma^{-}$ et $\forall m \in [0\ 1[$.

Seconde méthode de calcul :

D'après la définition de la transformation en z modifiée directe h_{k+m} est le coefficient de z^{-k} dans le développement en série de Laurent de $z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\, m)$ selon les puissances croissantes de z^{-1}. On obtient donc h_{k+m} en effectuant ce développement.

Exemple 1_e

Pour $q < |z| < q^{-1}$; avec $0 < q = e^{-a\,\Delta} < 1$ on peut écrire :
$\mathrm{H}(z,\, m)\, z^k = \frac{N(z)}{D(z)}$; avec :

• si $0 \leqslant k$: $N(z) = [q^m\,(z - q^{-1}) - q^{-m}\,(z - q)]\, z^k$ et $D(z) = (z - q)\,(z - q^{-1})$ et :
• si $k \leqslant -1$: $N(z) = q^m\,(z - q^{-1}) - q^{-m}\,(z - q)$ et $D(z) = (z - q)\,(z - q^{-1})\, z^{-k}$.

Par conséquent la RDC de $\mathrm{H}(z,\, m)\, z^k$ est l'anneau du plan complexe défini par $q < |z| < q^{-1}$; cet anneau contient comme contour γ le cercle unité. Les pôles de $\mathrm{H}(z,\, m)\, z^k$ situés à l'intérieur de ce contour sont q si $0 \leqslant k$ et 0 et q si $k \leqslant -1$ (car le pôle q^{-1} est toujours à l'extérieur de ce contour). Le pôle q est toujours simple (d'ordre 1) alors que le pôle q, quand il existe, est simple (d'ordre 1), lorsque $k = -1$ et multiple (d'ordre $-k$) lorsque $k \leqslant -2$.

Si $0 \leqslant k$ $h_{k+m} = \mathrm{Rés}\,[\frac{N(z)}{D(z)},\, q] = \frac{N(q)}{D'(q)} = \frac{q^m\,(q - q^{-1})\,q^k}{q - q^{-1}} = q^m$.

Si $k = -1$ $h_{-1+m} = \mathrm{Rés}\,[\frac{N(z)}{D(z)},\, 0] + \mathrm{Rés}\,[\frac{N(z)}{D(z)},\, q] = \frac{N(0)}{D'(0)} + \frac{N(q)}{D'(q)} = (-q^{-1+m} + q^{1-m}) + q^{-1+m}$
$= q^{1-m} = q^{|-1+m|}$.

Si $k \leqslant -2$ le calcul devient de plus en plus compliqué mais on obtient $h_{k+m} = q^{|k+m|}$.

TRANSFORMATIONS DISCRÈTES

Définition des transformations discrètes

Par transformations discrètes nous entendons celles qui s'appliquent à des signaux en *temps discret*. Ce n'est pas le sens que A. Zayed [41] leur donne.

Transformations discrètes présentées dans ce rapport

• Transformations en z [20] [215] [23] [216] [24] [217] [8] [218] [27] [219] [38] [220] [25] [221] [39] [222] et en particulier transformations de Hilbert discrètes [23] [25].

• Transformations en w [39] [223] [40] [224].

• Transformations de Fourier discrètes [23] [225] [24] [226] [41] [227] [27] [228] [25] [229] [39] [230] et le logiciel Matlab [21].

• Transformations en cosinus discrètes [27] [231] [25] [232] [17] [39] [233] et le logiel Matlab [21].

• Transformations en sinus discrètes [27] [234].

215. pp. 17-37
216. Ch. 2 pp. 45-86
217. Ch. 10 pp. 629-683
218. pp. 257-262
219. 6. A. D. Poularikas. pp. 387-462
220. pp. 1961-1962
221. Ch. 3 pp. 94-139
222. « Z-transform » 7 pages, « Control Systems/ Z Transform Mappings » 4 pages
223. « Control Systems/ Z Transform Mappings » 4 pages
224. « W-transform » 1 page
225. § 3.5 pp. 99-135
226. Ch. 5 pp. 291-395
227. § 34.1 et 34.2 pp. 582-586
228. § 2.4.5. pp. 160-161
229. Ch. 8-9-10 pp. 541-774
230. « Transformée de Fourier discrète » 4 pages, « La transformée de Fourier rapide » 5 pages
231. 3. P. Yip § 3.4 pp. 253-262
232. § 8.8 pp. 589-599
233. « Transformée en cosinus discrète » 5 pages
234. 3. P. Yip § 3.4 pp. 253-262 pour la TSDD et § 3.4.2.2. p. 256 pour la TSDI

15 Transformations en z

On porra consulter [20] [235] [23] [236] [24] [237] [8] [238] [27] [239] [38] [240] [25] [241] [39] [242].

Nous définissons les transformations en z *bilatères* pour des signaux en *temps discret* quelconques (et non nécessairement causaux) [23] [243] [24] [244]. Certains auteurs définissent les transformations en z *unilatères* [20] [245]. Pour les signaux causaux les transformations bilatères et unilatères sont identiques.

Les transformations en z sont des cas particuliers de transformation en z modifiées [38] [246]. Elles correspondent à $m = 1$ [24] [247].

15.1 TzD : Transformation en z Directe

On appelle Transformation en z Directe (TzD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{Z} \ : \ h_e \mapsto \mathrm{H}$$

qui fait correspondre à un signal h_e en *temps discret* la *fonction* ou *distribution* H complexe, de la variable complexe z, telle que :

$$\boxed{\mathrm{H}(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \, z^{-k} \ ; \ z \ \in \ RDC \text{ de H}}.$$

On a donc $\mathrm{H} \triangleq \mathcal{Z}\, h_e$ et on note parfois $\mathrm{H} \triangleq \mathcal{Z}\,[h_e(t)]$.

Par conséquent : $(\mathcal{Z}\, \delta_{k\,\Delta})(z) = z^{-k}$.

De même :

$\mathrm{H}_p(z) \triangleq (\mathcal{Z}\, h_{e\,p})(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, z^{-k}$ et
$\mathrm{H}_i(z) \triangleq (\mathcal{Z}\, h_{e\,i})(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, z^{-k}$. Alors :

235. pp. 17-37
236. Ch. 2 pp. 45-86
237. Ch. 10 pp. 629-683
238. pp. 257-262
239. 6. A. D. Poularikas. pp. 387-462
240. pp. 1961-1962
241. Ch. 3 pp. 94-139
242. « Z-transform » 7 pages, « Control Systems/ Z Transform Mappings » 4 pages
243. Chapitre 2 pp. 45-86
244. Ch. 10 pp. 629-683
245. pp. 17-37
246. p. 1961 ; il faut noter que 2 transformations sont définies : en z et en Z ; ce qui n'est pas très clair
247. Ch. 10, p. 629

$\mathrm{H} = \mathrm{H}_p + \mathrm{H}_i$.

Soient $\mathrm{H}_R(z)$, $\mathrm{H}_{pR}(z)$, $\mathrm{H}_{iR}(z)$ et $\mathrm{H}_I(z)$, $\mathrm{H}_{pI}(z)$, $\mathrm{H}_{iI}(z)$ les parties réelles et imaginaires respectives de $\mathrm{H}(z)$, $\mathrm{H}_p(z)$, $\mathrm{H}_i(z)$ respectivement. Alors :

$\mathrm{H} = \mathrm{H}_R + i\,\mathrm{H}_I$, $\mathrm{H}_p = \mathrm{H}_{pR} + i\,\mathrm{H}_{pI}$, $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}_{iR} + i\,\mathrm{H}_{iI}$.

Par conséquent :

$\mathrm{H}_R = \mathrm{H}_{pR} + \mathrm{H}_{iR}$ et $\mathrm{H}_I = \mathrm{H}_{pI} + \mathrm{H}_{iI}$.

Propriétés de la TzD

$\mathrm{H}_p(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_p(z)$ et $\mathrm{H}_i(\frac{1}{z}) = -\mathrm{H}_i(z)$

Démonstrations

$\mathrm{H}_p(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, z^k = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [h_k + h_{-k}]\, z^k$
$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [h_k + h_{-k}]\, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, z^{-k} = \mathrm{H}_p(z)$ QED.

$\mathrm{H}_i(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, z^k = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [h_k - h_{-k}]\, z^k$
$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [h_{-k} - h_k]\, z^{-k} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, z^{-k} = -\mathrm{H}_i(z)$ QED. Donc :

$\mathrm{H}_{pR}(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_{pR}(z)\,;\ \mathrm{H}_{pI}(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_{pI}(z)$
$\mathrm{H}_{iR}(\frac{1}{z}) = -\mathrm{H}_{iR}(z)\,;\ \mathrm{H}_{iI}(\frac{1}{z}) = -\mathrm{H}_{iI}(z)$
$\mathrm{H}(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_p(z) - \mathrm{H}_i(z)$
$\mathrm{H}_R(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_{pR}(z) - \mathrm{H}_{iR}(z)\,;\ \mathrm{H}_I(\frac{1}{z}) = \mathrm{H}_{pI}(z) - \mathrm{H}_{iI}(z)$.

Cas particulier des signaux en *temps discret* réels

Posons $z = \rho\, e^{i\,\theta}\,;\ \rho > 0,\ \theta \in]-\pi\ \pi]$. Alors :

$\mathrm{H}_{pR}(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, \rho^{-k}\, \cos(k\,\theta) = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} h_{p\,k}\, (\rho^k + \rho^{-k})\, \cos(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_{pI}(\rho\, e^{i\,\theta}) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, \rho^{-k}\, \sin(k\,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{p\,k}\, (\rho^k - \rho^{-k})\, \sin(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_{iR}(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, \rho^{-k}\, \cos(k\,\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} h_{i\,k}\, (\rho^k - \rho^{-k})\, \cos(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_{iI}(\rho\, e^{i\,\theta}) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, \rho^{-k}\, \sin(k\,\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} h_{i\,k}\, (\rho^k + \rho^{-k})\, \sin(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_R(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \rho^{-k}\, \cos(k\,\theta)$
$= h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [h_{p\,k}\, (\rho^k + \rho^{-k}) - h_{i\,k}\, (\rho^k - \rho^{-k})]\, \cos(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_I(\rho\, e^{i\,\theta}) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \rho^{-k}\, \sin(k\,\theta)$
$= \sum_{k=1}^{\infty} [h_{p\,k}\, (\rho^k - \rho^{-k}) - h_{i\,k}\, (\rho^k + \rho^{-k})]\, \sin(k\,\theta)$
$\mathrm{H}_p(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{p\,k}\, \rho^{-k}\, [\cos(k\,\theta) - i\, \sin(k\,\theta)]$
$\mathrm{H}_i(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{i\,k}\, \rho^{-k}\, [\cos(k\,\theta) - i\, \sin(k\,\theta)]$
$\mathrm{H}(\rho\, e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_p(\rho\, e^{i\,\theta}) + \mathrm{H}_i(\rho\, e^{i\,\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\, \rho^{-k}\, [\cos(k\,\theta) - i\, \sin(k\,\theta)]$

H_{pR}, H_{iR} et H_R sont des fonctions ou distributions de θ *paires*.
H_{pI}, H_{iI} et H_I sont des fonctions ou distributions de θ *impaires*.

Et en particulier si $\rho = 1$:

$\mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta}) = h_0 + 2\,\sum_{k=1}^{\infty} h_{p\,k}\,\cos(k\,\theta)$ *fonction* ou *distribution* de θ *paire*
$\mathrm{H}_{pI}(e^{i\,\theta}) = 0$
$\mathrm{H}_{iR}(e^{i\,\theta}) = 0$
$\mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta}) = -2\,\sum_{k=1}^{\infty} h_{i\,k}\,\sin(k\,\theta)$ *fonction* ou *distribution*S de θ *impaire*
$\mathrm{H}_R(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta})$ *fonction* ou *distribution* de θ *paire*
$\mathrm{H}_I(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta})$ *fonction* ou *distribution* θ *impaire*
$\mathrm{H}_p(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_R(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta})$ *fonction* ou *distribution* de θ *paire*
$\mathrm{H}_i(e^{i\,\theta}) = i\,\mathrm{H}_I(e^{i\,\theta}) = i\,\mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta})$ *fonction* ou *distribution* de θ *impaire*
$\mathrm{H}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_R(e^{i\,\theta}) + i\,\mathrm{H}_I(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_p(e^{i\,\theta}) + \mathrm{H}_i(e^{i\,\theta})$

15.1.1 Lien avec la transformation en z modifiée

Si le signal h_e en *temps discret* correspond à l'échantillonnage du signal h en *temps continu* on constate que :

$\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$ ou que $(\mathcal{Z}\,h_e)(z) = z\,(\mathcal{Z}_{mod}\,h)(z,\,0)$.

15.1.2 Région De Convergence (RDC)

P1 La RDC consiste en un anneau du plan z, centré à l'origine :

$R_{h-} < |z| < R_{h+}$ (il peut arriver que $R_{h-} = 0$ et/ou que $R_{h+} = \infty$).

P2 La RDC ne contient aucun pôle de H.

P3 Pour un signal en *temps discret* à support borné la RDC est le plan z tout entier sauf peut-être $z = 0$ et/ou $z = \infty$.

P4 Pour un signal en *temps discret* h_e tel que $h_k = 0$ pour $k < k_0$ si le cercle $|z| = r_0$ est dans la RDC alors toutes les valeurs finies de z pour lesquelles $|z| > r_0$ appartiennent à la RDC.

P5 Pour un signal en *temps discret* h_e tel que $h_k = 0$ pour $k_0 < k$ si le cercle $|z| = r_0$ est dans la RDC alors toutes les valeurs de z telles que $0 < |z| < r_0$ appartiennent à la RDC.

P6 Pour un signal en *temps discret* à support borné si le cercle $|z| = r_0$ est dans la RDC alors la RDC consiste en un anneau du plan z qui inclut le cercle précédent.

15.1.3 Stabilité

Le signal h_e en *temps discret* est *stable* (cf. Stabilité des signaux en temps discret) ssi le cerccle unité appartient à la RDC de H.

Démonstration

Si $|z| = 1$ alors $|\mathrm{H}(z)| \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} |h_k|\,|z|^{-k} = \sum_{-\infty}^{\infty} |h_k| < \infty$ QED.

Rappel : si le signal h_e en *temps discret* est *causal* et *stable* les signaux $h_{e\,p}$ et $h_{e\,i}$ en *temps discret non causaux* sont *stables et par conséquent* le cercle unité appartient aux *RDC* de H_p et H_i.

15.1.4 *Exemples*

Exemple 0_e : $(\mathcal{Z}\,\upsilon_e)(z) = \frac{z+1}{2\,(z-1)}$; $R_{\upsilon-} = 1 < |z| < R_{\upsilon+} = \infty$. On constate que le cercle unité n'appartient pas à la *RDC*. On vérifie que :
$(\mathcal{Z}\,\upsilon_e)(z) = z\,(\mathcal{Z}_{mod}\,\upsilon_e)(z,\,0)$.

Exemple 1_e : $\mathrm{H}(z) = \frac{(q-q^{-1})\,z}{(z-q)\,(z-q^{-1})}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = q^{-1}$
(avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que $\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

Exemple 2_e : $(\mathcal{Z}\,\chi_e)(z) = \frac{z^N-1}{z^{N-1}\,(z-1)}$; $R_{h-} = 0 < |z| < R_{h+} = \infty$. On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que :
$(\mathcal{Z}\,\chi_e)(z) = z\,(\mathcal{Z}_{mod}\,\chi_e)(z,\,0)$.

Exemple 3_e : $\mathrm{H}(z) = \frac{z-N\,z^{2-N}+(N-1)\,z^{1-N}}{N\,(z-1)^2}$; $R_{h-} = 0 < |z| < R_{h+} = \infty$. On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que :
$\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

Exemple 4_e : $\mathrm{H}(z) = \frac{z^N-1}{z^{N-1}\,(z-\omega_N^{-1})}$; $R_{h-} = 0 < |z| < R_{h+} = \infty$. On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que $\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

Exemple 5_e : $\mathrm{H}(z) = \frac{z^2-1}{(z-q)\,(z-q^{-1})}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = q^{-1}$
(avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que $\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

Exemple 6_e : $\mathrm{H}(z) = \frac{z+q}{2\,(z-q)}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = \infty$
(avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que $\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

Exemple 6 *bis*$_e$: $\mathrm{H}(z) = \frac{z}{z-q}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = \infty$
(avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). On constate que le cercle unité appartient à la *RDC*. On vérifie que $\mathrm{H}(z) = z\,\mathrm{H}_{mod}(z,\,0)$.

15.1.5 Liens avec la transformation de Laplace

Considérons l'application :

$$f:\ p\ \in\ \mathbb{C} \mapsto z = f(p) \triangleq e^{\Delta p}\ \in\ \mathbb{C}.$$

Elle n'est ni *injective* car $f(p \pm \frac{2\,k\,\pi\,i}{\Delta}) = f(p)\,;\, \forall\ k\ \in\ \mathbb{Z}$ ni *surjective* car $z = 0$ n'a aucun antécédent.

Cependant si on considère la bande fondamentale $\mathbb{B}$ du plan complexe telle que :

$\mathbb{B} = \{p = \sigma + i\,\omega \in\ \mathbb{C} \mid \omega\ \in\ ]-\frac{\pi}{\Delta}\ \frac{\pi}{\Delta}]\}$, l'application :

$$f:\ p\ \in\ \mathbb{B} \mapsto z = f(p) \triangleq e^{\Delta p}\ \in\ \mathbb{C} - \{0\}$$

devient une *bijection*.

Par conséquent si $z = e^{\Delta p}\,;\, z \neq 0$ nous choisissons $p = \frac{\ln z}{\Delta}$ où $\ln z \triangleq \ln|z| + i\ \arg z\,;$ avec $\arg z \in]-\pi\ \pi]$.

Alors on constate que :
$\mathrm{H}(z) = \widetilde{h_e}(\frac{\ln z}{\Delta})$ et $\widetilde{h_e}(p) = \mathrm{H}(e^{\Delta p}) = \mathrm{H}(z)$,
$\mathrm{H}_p(z) = \widetilde{h_{e\,p}}(\frac{\ln z}{\Delta})$ et $\widetilde{h_{e\,p}}(p) = \mathrm{H}_p(e^{\Delta p}) = \mathrm{H}_p(z)$,
$\mathrm{H}_i(z) = \widetilde{h_{e\,i}}(\frac{\ln z}{\Delta})$ et $\widetilde{h_{e\,i}}(p) = \mathrm{H}_i(e^{\Delta p}) = \mathrm{H}_i(z)$.

15.1.6 Lien avec la transformation de Fourier

$\widehat{h_e}(\nu) = \widetilde{h_e}(2\,\pi\,i\,\nu) = \mathrm{H}(e^{2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}) = \mathrm{H}(e^{i\,\theta})$,
$\widehat{h_{e\,p}}(\nu) = \widetilde{h_{e\,p}}(2\,\pi\,i\,\nu) = \mathrm{H}_p(e^{2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}) = \mathrm{H}_p(e^{i\,\theta})$,
$\widehat{h_{e\,i}}(\nu) = \widetilde{h_{e\,i}}(2\,\pi\,i\,\nu) = \mathrm{H}_i(e^{2\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}) = \mathrm{H}_i(e^{i\,\theta})$, d'après les liens précédents.

15.1.7 *TzD* d'une convolution linéaire de signaux en *temps discret*

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret* et $u_e = h_e * x_e$ leur convolée linéaire, qui est un signal en *temps discret*. Soient :

$\mathrm{H}(z) = \mathrm{H}(e^{\Delta p}) = \widetilde{h_e}(p)$,
$\mathrm{X}(z) = \mathrm{X}(e^{\Delta p}) = \widetilde{x_e}(p)$,
$\mathrm{U}(z) = \mathrm{U}(e^{\Delta p}) = \widetilde{u_e}(p)\,;$ alors :

$\boxed{\mathrm{U}(z) = \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z)\,;\ z\ \in\ RDC \text{ de } \mathrm{H} \cap RDC \text{ de } \mathrm{X}}$.

Démonstration

Nous avons vu (cf. *TLD*) que $\widetilde{u_e}(p) = \widetilde{h_e}(p)\,\widetilde{x_e}(p)\,;$ par conséquent : $\mathrm{U}(z) = \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z)\,;\ z\ \in\ RDC$ de $\mathrm{H} \cap RDC$ de X QED.

Exemple 6 *bis*$_e$ « *étendu* »

Soient h_e le signal en *temps discret* causal de l'*exemple* 6 *bis*$_e$ et x_e le signal en *temps discret* causal également de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b $(0 < b)$. Nous venons de voir que :

$\mathrm{H}(z) = \frac{z}{z-q}$: $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = \infty$ (avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). Donc :

$\mathrm{X}(z) = \frac{z}{z-q'}$: $R_{x-} = q' < |z| < R_{x+} = \infty$ (avec $0 < q' \triangleq e^{-b\,\Delta} < 1$).

Par conséquent :

$\mathrm{U}(z) = \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z) = \frac{z^2}{(z-q)\,(z-q')}$; $\mathrm{Max}(q,\, q') < |z|$.

Vérification de cette dernière relation

On a vu que (cf. *Convolution linéaire de deux signaux en* temps discret *causaux*) que :

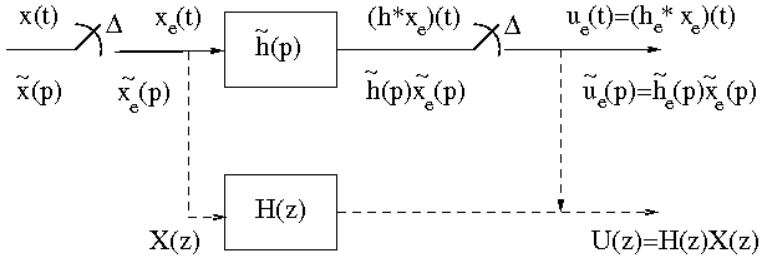
$u_k = (h_e * x_e)_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ \frac{q^{k+1} - q'^{(k+1)}}{q-q'} & \text{si} \quad 0 \leqslant k \end{cases}$. Par conséquent :

$\mathrm{U}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k+1} - q'^{(k+1)}}{q-q'}\, z^{-k} = \frac{z^2}{(z-q)\,(z-q')}$; $\mathrm{Max}(q,\, q') < |z|$ QED.

Attention : si $\mathrm{Y}(z) = \mathrm{Y}(e^{\Delta p}) = \widetilde{y_e}(p)$; avec $\widetilde{y_e} = \widetilde{h_e} \circledast \widetilde{x_e}$ alors $\mathrm{Y}(z) \neq \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z)$ car $\mathrm{U}(z) = \mathrm{H}(z)\,\mathrm{X}(z)$ et $u_e \neq y_e$.

Cas particulier où $h_k = \frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)]$; $\forall\ k\ \in\ \mathbb{Z}$

Alors on peut vèrifier que $(h * x_e)_e = u_e \triangleq h_e * x_e$ et $(h * x_e)_k = u_k \triangleq (h_e * x_e)_k$; $\forall\ k\ \in\ \mathbb{Z}$ et on a le schéma suivant [20] [248] :



248. pp. 31-32

15.1.8 *TzD* d'un produit de signaux en *temps discret* : convolution linéaire périodique

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret* et $z_e = h_e\, x_e$ leur produit, qui est un signal en *temps discret*. Soient :

$\mathrm{H}(z) = \mathrm{H}(e^{\Delta\, p}) = \widetilde{h_e}(p)$,
$\mathrm{X}(z) = \mathrm{X}(e^{\Delta\, p}) = \widetilde{x_e}(p)$,
$\mathrm{Z}(z) = \mathrm{Z}(e^{\Delta\, p}) = \widetilde{z_e}(p)$; alors :

$$\boxed{\mathrm{Z}(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_\gamma \mathrm{H}(\zeta)\, \mathrm{X}(\tfrac{z}{\zeta})\, \zeta^{-1}\, d\zeta = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_\gamma \mathrm{H}(\tfrac{z}{\zeta})\, \mathrm{X}(\zeta)\, \zeta^{-1}\, d\zeta}\,;$$

avec pour la première intégrale z tel que $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$ et γ un contour situé dans l'anneau $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < |\zeta| < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$ et pour la seconde z tel que $\mathrm{Max}(R_{x-},\, \frac{|z|}{R_{h+}}) < \mathrm{Min}(R_{x+},\, \frac{|z|}{R_{h-}})$ et γ un contour situé dans l'anneau $\mathrm{Max}(R_{x-},\, \frac{|z|}{R_{h+}}) < |\zeta| < \mathrm{Min}(R_{x+},\, \frac{|z|}{R_{h-}})$ [23] [249].

Nous qualifions de convolution linéaire périodique le calcul de $\mathrm{Z}(z)$ en fonction de $\mathrm{H}(z)$ et de $\mathrm{X}(z)$ [23].

Démonstration de la première égalité

Nous avons vu (cf. Convolution linéaire fréquentielle : cas de deux *fonctions* ou *distributions* complexes, d'une variable réelle, périodiques) que :

$\widetilde{z_e}(p) \triangleq (\widetilde{h_e} * \widetilde{x_e})(p) \triangleq \frac{\Delta}{2\,\pi\, i} \int_{\varsigma - \frac{\pi\, i}{\Delta}}^{\varsigma + \frac{\pi\, i}{\Delta}} \widetilde{h_e}(s)\, \widetilde{x_e}(p-s)\, ds$; avec :

$s \in RDC$ de $\widetilde{h_e}$ et $p - s \in RDC$ de $\widetilde{x_e}$.

Faisons les changements de variables $p \in \mathbb{B} \mapsto z = e^{\Delta\, p} \in \mathbb{C} - \{0\}$ et $s \in \mathbb{B} \mapsto \zeta = e^{\Delta\, s} \in \mathbb{C} - \{0\}$. On constate que $d\zeta = \Delta\, \zeta\, ds$.

Étant donné que $\widetilde{z_e}(p) = \mathrm{Z}(e^{\Delta\, p}) = \mathrm{Z}(z)$, $\widetilde{h_e}(p) = \mathrm{H}(e^{\Delta\, p}) = \mathrm{H}(z)$ et $\widetilde{x_e}(p-s) = \mathrm{X}[e^{\Delta\,(p-s)}] = \mathrm{X}(\frac{e^{\Delta\, p}}{e^{\Delta\, s}}) = \mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})$ on en déduit que :

$\mathrm{Z}(z) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_\gamma \mathrm{H}(\zeta)\, \mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\, \zeta^{-1}\, d\zeta$;

avec : $R_{h-} < |\zeta| < R_{h+}$ et $R_{x-} < |\frac{z}{\zeta}| < R_{x+}$; ce qui impose que z vérifie : $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$ et que γ soit un contour situé dans l'anneau $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < |\zeta| < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$ QED.

La seconde égalité se démontre de même.

249. § 2.3.9 pp. 63-66 éq. 2.46a et 2.46b

Remarque : on a également, en posant $z = \rho\, e^{i\,\theta}$ et $\zeta = r\, e^{i\,\varphi}$, soit $d\zeta = i\,\zeta\, d\varphi$:

$$\mathrm{Z}(\rho\, e^{i\,\theta}) = \tfrac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}(r\, e^{i\,\varphi})\, \mathrm{X}(\tfrac{\rho\, e^{i\,\theta}}{r\, e^{i\,\varphi}})\, d\varphi = \tfrac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}(\tfrac{\rho\, e^{i\,\theta}}{r\, e^{i\,\varphi}})\, \mathrm{X}(r\, e^{i\,\varphi})\, d\varphi\,;$$

avec, pour la première intégrale, ρ vérifiant $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{\rho}{R_{x+}}) < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{\rho}{R_{x-}})$ et r tel que $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{\rho}{R_{x+}}) < r < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{\rho}{R_{x-}})$ et, pour la seconde, ρ vérifiant $\mathrm{Max}(R_{x-},\, \frac{\rho}{R_{h+}}) < \mathrm{Min}(R_{x+},\, \frac{\rho}{R_{h-}})$ et r tel que $\mathrm{Max}(R_{x-},\, \frac{\rho}{R_{h+}}) < r < \mathrm{Min}(R_{x+},\, \frac{\rho}{R_{h-}})$ [23] [250].

Exemple 6 *bis*$_e$ « *étendu* »

Soient h_e le signal en *temps discret* causal de l'*exemple* 6 *bis*$_e$ et x_e le signal en *temps discret* causal également de cet *exemple*, mais en remplaçant le paramètre a par le paramètre b ($0 < b$). On a vu que :

$\mathrm{H}(z) = \frac{z}{z-q}$: $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = \infty$ (avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$). Et donc :

$\mathrm{X}(z) = \frac{z}{z-q'}$: $R_{x-} = q' < |z| < R_{x+} = \infty$ (avec $0 < q' \triangleq e^{-b\,\Delta} < 1$).

Considérons le signal en *temps discret* z_e produit de ces deux signaux : $z_e = h_e\, x_e$. Il est causal et tel que :

$z_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ (q\, q')^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \end{cases}$. On en déduit que :

$\mathrm{Z}(z) = \frac{z}{z-q\,q'}$; $R_{z-} = q\, q' < |z| < R_{z+} = \infty$
(avec $0 < q\, q' \triangleq e^{-(a+b)\,\Delta} < 1$).

Vérification de la formule de convolution linéaire périodique

Soit $\mathrm{I}(z) \triangleq \frac{1}{2\,\pi\, i} \oint_{\gamma} \mathrm{H}(\zeta)\, \mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\, \zeta^{-1}\, d\zeta$;

avec z tel que $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$, soit $q < \frac{|z|}{q'}$ ou $q\, q' < |z|$ et γ un cercle situé dans l'anneau $\mathrm{Max}(R_{h-},\, \frac{|z|}{R_{x+}}) < |\zeta| < \mathrm{Min}(R_{h+},\, \frac{|z|}{R_{x-}})$, soit $q < |\zeta| < \frac{|z|}{q'}$.

$\mathrm{H}(\zeta)\, \mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\, \zeta^{-1} = \frac{z}{(\zeta-q)\,(z-q'\,\zeta)}$ possède 2 pôles : $\zeta_1 = q$ et $\zeta_2 = q'^{\,-1}\, z$. Seul le premier est strictement à l'intérieur du cercle précédent. Pour calculer le résidu en ce pôle décomposons la fraction rationnelle précédente en éléments simples ; on trouve :

$\mathrm{H}(\zeta)\, \mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\, \zeta^{-1} = \frac{z}{z-q\,q'}\, \frac{1}{\zeta-q} + \frac{\lambda}{z-q'\,\zeta}$ (λ paramètre sans importance). Donc :

250. p. 64 éq. 2.47

Rés $[\mathrm{H}(\zeta)\,\mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\,\zeta^{-1},\,\zeta_1 = q] = \frac{z}{z-q\,q'}$.

Le théorème des résidus donne $\mathrm{I}(z) = \frac{z}{z-q\,q'} = \mathrm{Z}(z)$ et on a bien vérifié que :

$\mathrm{Z}(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\oint_\gamma \mathrm{H}(\zeta)\,\mathrm{X}(\frac{z}{\zeta})\,\zeta^{-1}\,d\zeta\,;\,q\,q^{'} < |z|$.

15.1.9 Théorème de la valeur initiale

$h_0 = \lim_{|z|\mapsto\infty} \mathrm{H}(z)$,

à condition que la *RDC* de H s'étende à l'infini ; ce qui est le cas si le signal h_e en *temps discret* est *causal* et *stable*.

Démonstration : évidente QED.

15.1.10 Théorème de la valeur finale

$\lim_{k\mapsto\infty} h_k = \lim_{z\mapsto 1}(1 - z^{-1})\,\mathrm{H}(z)$,

à condition que le cercle unité appartienne à la *RDC* de H.

Démonstration

Soit $\mathrm{H}_N(z) \triangleq \sum_{k=0}^{N} h_k\,z^{-k}$. Alors $z^{-1}\,\mathrm{H}_{N-1}(z) = z^{-1}\,\sum_{k=0}^{N-1} h_k\,z^{-k}$ et :

$\lim_{z\mapsto 1}[\mathrm{H}_N(z) - z^{-1}\,\mathrm{H}_{N-1}(z)] = h_N$.

Il suffit alors de faire tendre N vers l'infini QED.

15.2 TzI : Transformation en z Inverse

On appelle Transformation en z Inverse (TzI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{Z}}\ :\ \mathrm{G} \mapsto \overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G}$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* G complexe, de la variable complexe z, le signal en temps discret $\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G}$ tel que :

$(\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G})(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G})_k\,\delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$$\boxed{(\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G})_k \triangleq \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\oint_\gamma \mathrm{G}(z)\,z^{k-1}\,dz},$$

où γ désigne un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{G}(z)\,z^{k-1}$ et entourant l'origine.

On note parfois $\overline{\mathcal{Z}}\,[\mathrm{G}(z)]$ au lieu de $\overline{\mathcal{Z}}\,\mathrm{G}$.

15.2.1 Cas particulier

$\mathrm{G} = \mathrm{H} \triangleq \mathcal{Z}\, h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque*

Alors :

$[\overline{\mathcal{Z}}\,(\mathcal{Z}\, h_e)](t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\overline{\mathcal{Z}}\,(\mathcal{Z}\, h_e)]_k\, \delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$[\overline{\mathcal{Z}}\,(\mathcal{Z}\, h_e)]_k = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \mathrm{H}(z)\, z^{k-1}\, dz,$

où le contour γ désigne un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{H}(z)\, z^{k-1}$ et entourant l'origine.

15.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

$h_e(t) = [\overline{\mathcal{Z}}\,(\mathcal{Z}\, h_e)](t)$ soit :

$$\boxed{h_k = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \mathrm{H}(z)\, z^{k-1}\, dz \;;\; \forall\, k \,\in\, \mathbb{Z}}.$$

Démonstration [41] [251] [27] [252]

Soit $\mathrm{H}(z) \triangleq (\mathcal{Z}\, h_e)(z) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, z^{-n}$; $R_{h-} < |z| < R_{h+}$.

D'après le *théorème intégral de Cauchy* :

$\frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma z^{k-1}\, dz = \delta_{k0}$ (δ_{k0} symbole de kronecker) ; $\forall k \in \mathbb{Z}$; où γ est un contour entourant l'origine.

Par conséquent si γ désigne un contour fermé du plan complexe situé dans la *RDC* de $\mathrm{H}(z)\, z^{k-1}$ et entourant l'origine on a :

$[\overline{\mathcal{Z}}\,(\mathcal{Z}\, h_e)]_k = \frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \mathrm{H}(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, [\frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma z^{-n+k-1}\, dz]$
$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, \delta_{-n+k,0} = \; h_k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$ QED.

Remarque 1 : l'intégrale $\frac{1}{2\,\pi\,i} \oint_\gamma \mathrm{H}(z)\, z^{k-1}\, dz$ se calcule grâce au théorème des résidus. Pour $k < 0$ le calcul devient de plus en plus compliqué lorsque $|k|$ augmente et [23] [253] propose une méthode de calcul simplifiée qui consiste à remplacer z par z^{-1}.

Remarque 2 : si on peut choisir pour γ le cercle unité on a :

$h_k = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}(e^{i\,\theta})\, e^{k\,i\,\theta}\, d\theta.$

251. § 34.3.4 pp. 589-591
252. 6. A. D. Poularikas § 6.7 pp. 422-428
253. pp. 54-55

Démonstration

Si $z \in \gamma$ posons $z = e^{i\,\theta}$ soit $dz = i\,e^{i\,\theta}\,d\theta$ et
$h_k = \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}(e^{i\,\theta})\,e^{k\,i\,\theta}\,d\theta$ QED. En particulier :

$h_0 = \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta + \frac{i}{2\,\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_I(e^{i\,\theta})\,d\theta.$

Par conséquent si le signal h_e en *temps discret* est *réel* et étant donné que la *fonction* ou *distribution* $\mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})$ de θ est *paire* et la *fonction* ou *distribution* $\mathrm{H}_I(e^{i\,\theta})$ de θ *impaire* on en déduit que :

$h_0 = \frac{1}{2\,\pi}\,\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\,\int_{0}^{\pi} \mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta.$

15.2.3 Méthodes de calcul de la transformation en z inverse

Première méthode

D'après ce qui précède on a :

$h_k = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\oint_{\gamma} \mathrm{H}(z)\,z^{k-1}\,dz\,;\,\forall k \in \mathbb{Z}.$

Seconde méthode

D'après la définition de la transformation en z directe h_k est le coefficient de z^{-k} dans le développement en série de Laurent de $\mathrm{H}(z)$ selon les puissances croissantes de z^{-1}. On obtient donc h_k en effectuant ce développement.

Exemple 1_e

On a $\mathrm{H}(z) = \frac{(q-q^{-1})\,z}{(z-q^{-1})\,(z-q)}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = q^{-1}$
(avec $0 < q \triangleq e^{-a\,\Delta} < 1$).

Première méthode

$h_k = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\oint_{\gamma} \mathrm{H}(z)\,z^{k-1}\,dz$ et on peut choisir comme contour γ le cercle unité.

$\mathrm{H}(z)\,z^{k-1} = \frac{(q-q^{-1})\,z^k}{(z-q^{-1})\,(z-q)} = \frac{N(z)}{D(z)}$ où N et D sont deux polynômes en z.

• Si $0 \leqslant k$: $N(z) = (q-q^{-1})\,z^k$ et $D(z) = (z-q^{-1})\,(z-q)$. $\mathrm{H}(z)\,z^{k-1}$ a un seul pôle simple (d'ordre 1) q à l'intérieur du cercle unité.
$\mathrm{Rés}\,[\mathrm{H}(z)\,z^{k-1},\,q] = \frac{N(q)}{D'(q)} = \frac{(q-q^{-1})\,q^k}{q-q^{-1}} = q^k = q^{|k|}$. Donc $h_k = q^{|k|}$.

• Si $k \leqslant -1$: $N(z) = q - q^{-1}$ et $D(z) = (z-q^{-1})\,(z-q)\,z^{-k}$. $\mathrm{H}(z)\,z^{k-1}$ a un pôle simple (d'ordre 1) q à l'intérieur du cercle unité et un pôle multiple (d'ordre k) 0 à l'intérieur du cercle unité.
$\mathrm{Rés}\,[\mathrm{H}(z)\,z^{k-1},\,q] = \frac{N(q)}{D'(q)} = \frac{q-q^{-1}}{q^{1-k}-q^{-1-k}} = q^k$.

Le calcul de $\mathrm{Rés}\,[\mathrm{H}(z)\,z^{k-1},\,0]$ est de plus en plus compliqué lorsque $|k|$ augmente mais on trouve :
$\mathrm{Rés}\,[\mathrm{H}(z)\,z^{k-1},\,0] = q^{-k} - q^k$.

Finalement $h_k = q^k + (q^{-k} - q^k) = q^{-k} = q^{|k|}$.

• Donc dans tous les cas $h_k = q^{|k|}$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Seconde méthode

$\mathrm{H}(z) = \frac{(q-q^{-1})\,z}{(z-q^{-1})\,(z-q)} = \frac{q}{z-q} - \frac{q^{-1}}{z-q^{-1}}$.

Étant donné que $q < |z| < q^{-1}$ pour développer $\mathrm{H}(z)$ en série de Laurent *convergente* il faut écrire :

$\mathrm{H}(z) = \frac{q\,z^{-1}}{1-q\,z^{-1}} + \frac{1}{1-q\,z}$. Il vient alors :

$\mathrm{H}(z) = q\,z^{-1}\,\sum_{k=0}^{\infty} q^k\,z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} q^k\,z^k$

Soit, en faisant $l = k+1$ dans la première somme et $l = -k$ dans la seconde :

$\mathrm{H}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} q^l\,z^{-l} + \sum_{l=-\infty}^{0} q^{-l}\,z^{-l} = \sum_{k=\infty}^{\infty} q^{|k|}\,z^{-k}$. Et, par conséquent :

$h_k = q^{|k|}$; $\forall k \in \mathbb{Z}$.

15.2.4 TzI d'un produit de TzD

Soit $\mathrm{U} = \mathrm{H}\,\mathrm{X}$ le produit des deux TzD H et X. Si h_e et x_e sont les TzI respectives de H et X alors u_e, la TzI de U, est donnée, d'après ce qui précède, par :

$u_e = h_e * x_e$.

15.3 Transformations de Hilbert discrètes

On pourra consulter [23] [254] [25] [255].

Considérons tout d'abord un signal h_e en *temps discret causal* et *stable*.

15.3.1 Première constatation

$h_e = 2\,h_{e\,p}\,\upsilon_e$ et donc le théorème de convolution linéaire complexe donne :

$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{\pi\,i}\,\oint_\gamma \mathrm{H}_p(\zeta)\,\Upsilon(\frac{z}{\zeta})\,\zeta^{-1}\,d\zeta = \frac{1}{2\,\pi\,i}\,\oint_\gamma \mathrm{H}_p(\zeta)\,\frac{z+\zeta}{(z-\zeta)\,\zeta}\,d\zeta$;

avec $\mathrm{Max}(R_{h_{p-}}, \frac{|z|}{R_{\upsilon+}}) < \mathrm{Min}(R_{h_{p+}}, \frac{|z|}{R_{\upsilon-}})$, soit $R_{h_{p-}} < \mathrm{Min}(R_{h_{p+}}, \frac{|z|}{R_{\upsilon-}})$ et donc $R_{h_{p-}} < |z|$, γ étant un contour dans la RDC de $\mathrm{H}_p(\zeta)$ et $\Upsilon(\frac{z}{\zeta})$ et avec $R_{h_{p-}} < |\zeta| < R_{h_{p+}}$ et $R_{\upsilon-} = 1 < |\frac{z}{\zeta}| < R_{\upsilon+} = \infty$.

254. Ch. 7 pp. 337-375
255. Ch. 11 pp. 775-810

Mais $R_{h_p-} < 1$ et $R_{h_p+} > 1$ puisque le signal h_e étant *causal* et *stable* le cercle unité appartient à la *RDC* de H_p. On peut donc choisir comme contour γ le cercle unité et faire le changement de variable $\zeta = e^{i\,\varphi}$; avec $\varphi \in (-\pi\ \pi)$; alors :

$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{2\,\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_p(e^{i\,\varphi})\ \frac{z+e^{i\,\varphi}}{z-e^{i\,\varphi}}\ d\varphi\,;\ R_{h_p-} < |z|.$

15.3.2 Seconde constatation

$h_e = 2\,h_{e\,i}\,\upsilon_e + h_0\,\delta_0$ et donc le théorème de convolution linéaire complexe donne donc :

$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{\pi\,i}\ \oint_\gamma \mathrm{H}_i(\zeta)\,\Upsilon(\frac{z}{\zeta})\,\zeta^{-1}\,d\zeta + h_0 = \frac{1}{2\,\pi\,i}\ \oint_\gamma \mathrm{H}_p(\zeta)\ \frac{z+\zeta}{(z-\zeta)\,\zeta}\ d\zeta + h_0\,;$

avec $\mathrm{Max}(R_{h_i-},\ \frac{|z|}{R_{\upsilon+}}) < \mathrm{Min}(R_{h_i+},\ \frac{|z|}{R_{\upsilon-}})$, soit $R_{h_i-} < \mathrm{Min}(R_{h_i+},\ \frac{|z|}{R_{\upsilon-}})$ et donc $R_{h_i-} < |z|$, γ étant un contour dans la *RDC* de $\mathrm{H}_i(\zeta)$ et $\Upsilon(\frac{z}{\zeta})$ et avec $R_{h_i-} < |\zeta| < R_{h_i+}$ et $R_{\upsilon-} = 1 < |\frac{z}{\zeta}| < R_{\upsilon+} = \infty$.

Mais $R_{h_i-} < 1$ et $R_{h_i+} > 1$ puisque le signal h_e étant *causal* et *stable* le cercle unité appartient à la *RDC* de H_i. On peut donc choisir comme contour γ le cercle unité et faire le changement de variable $\zeta = e^{i\,\varphi}$; avec $\varphi \in (-\pi\ \pi)$, Alors :

$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{2\,\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_i(e^{i\,\varphi})\ \frac{z+e^{i\,\varphi}}{z-e^{i\,\varphi}}\ d\varphi + h_0\,;\ R_{h_i-} < |z|.$

15.3.3 Calcul de $\mathrm{H}(\rho\,e^{i\,\theta})$

Etant donné que $R_{h_p-} < 1$ et $R_{h_i-} < 1$ on peut calculer $\mathrm{H}(z)$ pour $z = \rho\,e^{i\,\theta}$; avec $1 \leqslant \rho$. Il vient :

$\mathrm{H}(\rho\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_p(e^{i\,\varphi})\ \frac{1+\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}{1-\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}\ d\varphi$ et :

$\mathrm{H}(\rho\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{H}_i(e^{i\,\varphi})\ \frac{1+\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}{1-\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}\ d\varphi + h_0.$

15.3.4 Calcul du noyau et du noyau conjugé de Poisson

Soient $P(\varphi)$ la partie réelle et $Q(\varphi)$ la partie imaginaire de $\frac{1+\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}{1-\rho^{-1}\,e^{i\,(\varphi-\theta)}}$, appelées respectivement *noyau de Poisson* et *noyau conjugé de Poisson.*

Le calcul donne :

$P(\varphi) = \frac{1-\rho^{-2}}{1-2\,\rho^{-1}\,\cos(\varphi)+\rho^{-2}}$ et $Q(\varphi) = \frac{2\,\rho^{-1}\,\sin(\varphi)}{1-2\,\rho^{-1}\,\cos(\varphi)+\rho^{-2}}$.

15.3.5 Cas d'un signal h_e en *temps discret causal stable* et *réel*

Supposons maintenant que le signal h_e en *temps discret causal* et *stable* est *réel*. Alors on a vu que $\mathrm{H}_p(e^{i\,\varphi}) = \mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})$ est *réel* et que $\mathrm{H}_i(e^{i\,\varphi}) = i\,\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})$ est *imaginaire pur* et donc :

$\mathrm{H}(\rho\,e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_R(\rho\,e^{i\,\theta}) + i\,\mathrm{H}_I(\rho\,e^{i\,\theta})$
$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})\,P(\varphi-\theta)\,d\varphi + \frac{i}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})\,Q(\varphi-\theta)\,d\varphi$ et :

$\mathrm{H}(\rho\,e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_R(\rho\,e^{i\,\theta}) + i\,\mathrm{H}_I(\rho\,e^{i\,\theta})$
$= h_0 - \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})\,Q(\varphi-\theta)\,d\varphi + \frac{i}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})\,P(\varphi-\theta)\,d\varphi.$

Et, par conséquent :

$\mathrm{H}_R(\rho\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})\,P(\varphi-\theta)\,d\varphi$ [23] [256] **(1)**
ou $\mathrm{H}_R(\rho\,e^{i\,\theta}) = h_0 - \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})\,Q(\varphi-\theta)\,d\varphi$ [23] [257] **(2)**

$\mathrm{H}_I(\rho\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})\,Q(\varphi-\theta)\,d\varphi$ [23] [258] **(3)**
ou $\mathrm{H}_I(\rho\,e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})\,P(\varphi-\theta)\,d\varphi$ [23] [259] **(4)**.

Ces relations permettent de calculer $\mathrm{H}(z)$ pour $1 \leqslant |z|$ en fonction soit de $\mathrm{H}_R(z)$ pour $|z| = 1$ soit de $\mathrm{H}_I(z)$ pour $|z| = 1$, en connaisant h_0.

15.3.6 Premier couple de transformations de Hilbert discrètes

Les relations précédentes sont valables pour $1 \leqslant \rho$.

On constate que, pour $\rho = 1$: $Q(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{1-\cos(\varphi)} = \cot(\frac{\varphi}{2})$ [et $Q(\varphi) = 0$].

Pour $\rho = 1$ les relations **(2)** et **(3)** précédentes sont valables en remplaçant les intégrales qui y figurent par leurs valeurs principales de Cauchy. On en déduit le premier couple de transformations de Hilbert directe et inverse :

$\boxed{\mathrm{H}_R(e^{i\,\theta}) = h_0 - \frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_I(e^{i\,\varphi})\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi}$ [23] [260] [25] [261] **(I)**. Et :

$\boxed{\mathrm{H}_I(e^{i\,\theta}) = \frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\varphi})\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi}$ [23] [262] [25] [263] **(II)**.

256. éq. 7.12 p. 343
257. éq. 7.15 p. 343
258. éq. 7.13 p. 343
259. éq. 7.16 p. 343
260. éq. 7.18 p. 344
261. éq. 11.29 p. 781
262. éq. 7.17 p. 344
263. éq. 11.28 p. 781

15.3.7 Second couple de transformations de Hilbert discrètes

Supposons maintenant que le signal h_e en *temps discret causal stable* et *réel* est à *minimum de phase*. Ceci signifie que non seulement les pôles de H sont situés strictement à l'intérieur du cercle unité (à cause de la stabilité) mais également ses zéros.

Cette supposition permet de définir sans ambiguïté $\arg[\mathrm{H}(z)]$ pour $1 \leqslant |z|$ car $\mathrm{H}(z)$ ne s'y annule pas.

Posons $\mathrm{H}(z) = |\mathrm{H}(z)|\, e^{i \arg[\mathrm{H}(z)]}$.

Et $\check{\mathrm{H}}(z) \triangleq \ln[\mathrm{H}(z)] = \ln|\mathrm{H}(z)| + i \arg[\mathrm{H}(z)]$.

Si on désigne par $\check{\mathrm{H}}_R$ et $\check{\mathrm{H}}_I$ les parties rélles et imaginaire de $\check{\mathrm{H}}$, respectivement on a :
$\check{\mathrm{H}}_R(z) = \ln|\mathrm{H}(z)|$ et $\check{\mathrm{H}}_I(z) = \arg[\mathrm{H}(z)]$.

Supposons que $\check{\mathrm{H}}$ est la transformée en z du signal $\check{h}_e$ en *temps discret causal* et *réel*, appelé *cepstre*[264] du signal h_e. Alors ce qui précède permet d'écrire le second couple de transformations de Hilbert directe et inverse :

$$\boxed{\ln|\mathrm{H}(e^{i\,\theta})| = \check{h}_0 - \tfrac{1}{2\,\pi}\, v.p. \int_{-\pi}^{\pi} arg[\mathrm{H}(e^{i\,\varphi})]\, \cot(\tfrac{\varphi-\theta}{2})\, d\varphi}\ [23]^{266}\ [25]^{267}\ \textbf{(III)}.$$

Et :

$$\boxed{arg[\mathrm{H}(e^{i\,\theta})] = \tfrac{1}{2\,\pi}\, v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \ln|\mathrm{H}(e^{i\,\varphi})|\, \cot(\tfrac{\varphi-\theta}{2})\, d\varphi}\ [23]^{268}\ [25]^{269}\ \textbf{(IV)}.$$

15.3.8 *Exemple* 6 *bis*$_e$

Soit le signal h_e en *temps discret* de l'*exemple* 6 *bis*$_e$. Il est *causal stable* (il possède un seul pôle en $q < 1$) (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$) *réel* et est à *minimum de phase* (il possède un seul zéro en 0). On trouve :

$\mathrm{H}(z) = \frac{z}{z-q}$; $R_{h-} = q < |z| < R_{h+} = \infty$ (on vérifie que le cercle unité y appartient).

$\mathrm{H}_p(z) = \frac{-q+2\,z-q\,z^2}{2\,(z-q)\,(1-q\,z)}$; $R_{h_p-} = q < |z| < R_{h_p+} = q^{-1}$ (on vérifie que le cercle unité y appartient).

$\mathrm{H}_i(z) = \frac{q\,(1-z^2)}{2\,(z-q)\,(1-q\,z)}$; $R_{h_i-} = q < |z| < R_{h_i+} = q^{-1}$ (on vérifie que le cercle unité y appartient).

---

264. Cette dénomination de cepstre a été proposée en 1963 par B. P. Bogert, M. J. R. Healy et J. W. Tukey [7] [23] [265]
266. éq. 7.21 p. 346
267. éq. 11.56a p. 788
268. éq. 7.22 p. 346
269. éq. 11.55 p. 788

$\mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta}) = \frac{1-q\,\cos(\theta)}{1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2}$,
$\mathrm{H}_{pI}(e^{i\,\theta}) = 0$,
$\mathrm{H}_{iR}(e^{i\,\theta}) = 0$,
$\mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta}) = \frac{-q\,\sin(\theta)}{1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2}$,
$\mathrm{H}_{R}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta})$,
$\mathrm{H}_{I}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta})$,
$\mathrm{H}_{p}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{R}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{pR}(e^{i\,\theta})$,
$\mathrm{H}_{i}(e^{i\,\theta}) = i\,\mathrm{H}_{I}(e^{i\,\theta}) = i\,\mathrm{H}_{iI}(e^{i\,\theta})$,
$\mathrm{H}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{R}(e^{i\,\theta}) + i\,\mathrm{H}_{I}(e^{i\,\theta}) = \mathrm{H}_{p}(e^{i\,\theta}) + \mathrm{H}_{i}(e^{i\,\theta})$,
$|\mathrm{H}(e^{i\,\theta})| = \frac{1}{\sqrt{1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2}}$,
$\arg[\mathrm{H}(e^{i\,\theta})] = -\arctan[\frac{q\,\sin(\theta)}{1-q\,\cos(\theta)}]$.

On en déduit :

Premier couple de transformations de Hilbert directe et inverse

$\frac{1-q\,\cos(\theta)}{1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2} = 1 - \frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{-q\,\sin(\varphi)}{1-2\,q\,\cos(\varphi)+q^2}\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi$,

$\frac{-q\,\sin(\theta)}{1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2} = \frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-q\,\cos(\varphi)}{1-2\,q\,\cos(\varphi)+q^2}\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi$.

Second couple de transformations de Hilbert directe et inverse

$-\frac{1}{2}\,\ln[1-2\,q\,\cos(\theta)+q^2] = -\frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\{-\arctan[\frac{q\,\sin(\varphi)}{1-q\,\cos(\varphi)}]\}\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi$,

$-\arctan[\frac{q\,\sin(\theta)}{1-q\,\cos(\theta)}] = \frac{1}{2\,\pi}\,v.p.\int_{-\pi}^{\pi}\{-\frac{1}{2}\,\ln[1-2\,q\,\cos(\varphi)+q^2]\}\,\cot(\frac{\varphi-\theta}{2})\,d\varphi$.

15.4 Le cepstre $\check{h}_e$

Nous supposons toujours que le signal h_e en *temps discret* est *causal*, *stable*, *réel* et à *minimum de phase*.

Et nous supposons que le cepstre $\check{h}_e$ est également *causal*, *stable* et *réel*.

Etant donné que $\check{\mathrm{H}}(z) \triangleq \ln[\mathrm{H}(z)]$ on a : $\check{\mathrm{H}}'(z) = \frac{\mathrm{H}'(z)}{\mathrm{H}(z)}$ [23] [270].

Mais puisque $\mathrm{H}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\,z^{-k}$ on a :
$\mathrm{H}'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k\,h_k\,z^{-k-1}$

De même étant donné que $\check{\mathrm{H}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \check{h}_k\,z^{-k}$ on a
$\check{\mathrm{H}}'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k\,\check{h}_k\,z^{-k-1}$.

Donc $z\,\check{\mathrm{H}}'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -k\,\check{h}_k\,z^{-k} = z\,\frac{\mathrm{H}'(z)}{\mathrm{H}(z)}$ [23] [271].

270. éq. 10.30 p. 497
271. éq. 10.31 p. 497

Grâce à la TzI on en déduit que :

$-k\,\check{h}_k = \frac{1}{2\,\pi\,i}\oint_\gamma z\,\frac{\mathrm{H}^{'}(z)}{\mathrm{H}(z)}\,z^{k-1}\,dz$ où γ est un contour fermé situé dans la RDC de $\frac{\mathrm{H}^{'}(z)}{\mathrm{H}(z)}\,z^k$ et entourant l'origine.

Par conséquent :

$\check{h}_k = -\frac{1}{2\,k\,\pi\,i}\oint_\gamma \frac{\mathrm{H}^{'}(z)}{\mathrm{H}(z)}\,z^k\,dz$ si $k \neq 0$ [23] [272] et :

$\check{h}_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\check{\mathrm{H}}(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\check{\mathrm{H}}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\check{\mathrm{H}}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta$
car la RDC de $\check{\mathrm{H}}$ contient le cercle unité, de la même manière que :

$h_0 = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{H}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta$
car la RDC de H contient le cercle unité.

On en déduit :

$\check{h}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\check{\mathrm{H}}_R(e^{i\,\theta})\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln|\mathrm{H}(e^{i\,\theta})|\,d\theta$ [23] [273] [25] [274].

De plus on a $z\,\mathrm{H}^{'}(z) = [z\,\check{\mathrm{H}}^{'}(z)]\,\mathrm{H}(z)$.

Soit d'après la TzI d'un produit de TzD et étant donné que les signaux en *temps discret* h_e et $\check{h}_e$ sont causaux :

$k\,h_k = \sum_{l=0}^{k} l\,\check{h}_l\,h_{k-l}$ [23] [275] et donc :

$h_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k} l\,\check{h}_l\,h_{k-l} = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} l\,\check{h}_l\,h_{k-l} + \check{h}_k\,h_0$ si $k \neq 0$.

On en déduit, si $h_0 \neq 0$:

$$\check{h}_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln|\mathrm{H}(e^{i\,\theta})|\,d\theta & \text{si} \quad k = 0 \\ \frac{1}{h_0}\left(h_k - \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} l\,\check{h}_l\,h_{k-l}\right) & \text{si} \quad 1 \leqslant k \end{cases}$$

Remarque : on a aussi, d'après le théorème de la valeur initiale :

$\check{h}_0 = \lim_{|z|\mapsto\infty}\check{\mathrm{H}}(z)$.

Ceci permet de calculer de proche en proche $\check{h}_k$. Par exemple, si $h_0 \neq 0$:

$\check{h}_1 = \frac{h_1}{h_0}$
$\check{h}_2 = \frac{h_2 - \frac{1}{2}\check{h}_1\,h_1}{h_0}$
$\check{h}_3 = \frac{h_3 - \frac{1}{3}\check{h}_1\,h_2 - \frac{2}{3}\check{h}_2\,h_1}{h_0}$

272. éq. 10.32 p. 498
273. éq. 10.33 p. 498
274. éq. 11.56b p. 788
275. éq. 10.34 p. 498 mais avec des bornes différentes

etc.

15.4.1 *Exemple* 6 *bis*$_e$

$\mathrm{H}(z) = \frac{1}{1-q\,z^{-1}}$; $q < |z|$. Alors :

$\check{\mathrm{H}}(z) = -\ln(1-q\,z^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k}\, z^{-k}$; $q < |z|$ et $\check{h}_0 = \lim_{|z|\mapsto\infty} \check{\mathrm{H}}(z) = 0$.

Et finalement :

$$\check{h}_k = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k \leqslant 0 \\ \frac{q^k}{k} & \text{si} & 1 \leqslant k \end{array} \right. .$$

15.5 Transformations de Fourier fractionnaires

Les transformations de Fourier fractionnaires sont des cas particuliers de transformations en z. Elles correspondent à $z = \omega_N^{\alpha} = e^{-\frac{2\,\pi\,i\,\alpha}{N}}$; avec $\alpha \neq \pm 1$ [38] [276].

276. p. 675

16 Transformations en w

On pourra consulter [39] [277] [40] [278].

Nous définissons les transformations en w *bilatères* pour des signaux en *temps discret* quelconques (et non nécessairement causaux). Certains auteurs définissent les transformations en w *unilatères* [20] [279]. Pour les signaux causaux les transformations bilatères et unilatères sont identiques.

16.1 TwD : Transformation en w Directe

On appelle Transformation en w Directe (TwD) l'application *linéaire* :

$$\mathcal{W} \ : \ h_e \mapsto \mathscr{H}$$

qui fait correspondre à un signal h_e en *temps discret* la *fonction* ou *distribution* $\mathscr{H}$ complexe, de la variable complexe w, telle que :

$$\boxed{\mathscr{H}(w) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \left(\tfrac{1-w}{1+w}\right)^k \ ; \ w \ \in \ RDC \text{ de } \mathscr{H}}.$$

On a donc $\mathscr{H} \triangleq \mathcal{W}\, h_e$ et on note parfois $\mathscr{H} \triangleq \mathcal{W}\,[h_e(t)]$.

Par conséquent : $(\mathcal{W}\,\delta_{k\,\Delta})(w) = (\frac{1+w}{1-w})^{-k}$.

16.1.1 Lien avec la TzD

La transformation en w se déduit de la transformation en z par la transformation conforme :

$w = \frac{z-1}{z+1}$ et $z = \frac{1+w}{1-w}$,

qui a pour effet de faire correspondre au cercle unité du plan z l'axe imaginaire du plan w. On se trouve donc ramené à une configuration analogue à celle du plan p (plan de Laplace). On a :

$\mathscr{H}(w) = \mathrm{H}(\frac{1+w}{1-w})$.

16.1.2 *Exemples*

Exemple 0_e : $(\mathcal{W}\,\upsilon_e)(w) = \frac{1}{2\,w}$; $Re(w) > 0$.

Exemple 1_e : $\mathscr{H}(w) = \frac{(q-q^{-1})\,(1-w^2)}{[1-q^{-1}+(1+q^{-1})\,w]\,[1-q+(1+q)\,w]}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$) ; RDC définie par
$q < |\frac{1+w}{1-w}| < q^{-1}$. L'axe imaginaire appartient à cette RDC.

277. « Control Systems/ Z Transform Mappings » 4 pages
278. « W-transform » 1 page
279. pp. 37-39

Exemple 2_e : $(\mathcal{W}\,\chi_e)(w) = \frac{(1+w)^N-(1-w)^N}{2\,w\,(1+w)^{N-1}}$; $RDC = \mathbb{C}$.

Exemple 3_e : $\mathscr{H}(w) = \frac{(1+w)^N\,(1-w)-N\,(1+w)\,(1-w)^N+(N-1)\,(1-w)^{N+1}}{4\,N\,w^2\,(1+w)^{N-1}}$; $RDC = \mathbb{C}$.

Exemple 4_e : $\mathscr{H}(w) = \frac{(1+w)^N-(1-w)^N}{(1+w)^{N-1}\,[1+w-\omega_N^{-1}\,(1-w)]}$; $RDC = \mathbb{C}$.

Exemple 5_e : $\mathscr{H}(w) = \frac{4\,q\,w}{(1+q)^2\,w^2-(1-q)^2}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$) ; RDC définie par $q < |\frac{1+w}{1-w}| < q^{-1}$.

Exemple 6_e : $\mathscr{H}(w) = \frac{1+q+(1-q)\,w}{2\,[1-q+(1+q)\,w]}$ (avec $q \triangleq e^{-a\,\Delta}$) ; RDC définie par $q < |\frac{1+w}{1-w}| < \infty$. L'axe imaginaire appartient à cette RDC.

16.2 TwI : Transformation en w Inverse

On appelle Transformation en w Inverse (TwI) l'application *linéaire* :

$$\overline{\mathcal{W}} \;:\; \mathscr{G} \mapsto \overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G}$$

qui fait correspondre à une *fonction* ou *distribution* $\mathscr{G}$ complexe, de la variable complexe w, le signal en temps discret $\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G}$ tel que :
$(\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G})(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} (\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G})_k\,\delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :

$$\boxed{(\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G})_k \triangleq \frac{1}{\pi\,i}\int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \mathscr{G}(w)\,(\frac{1+w}{1-w})^{k-1}\,\frac{dw}{(1+w)^2}},$$

si et seulement si l'axe imaginaire appartient à la RDC de $\mathscr{G}$.

On note parfois $\overline{\mathcal{W}}\,[\mathscr{G}(w)]$ au lieu de $\overline{\mathcal{W}}\,\mathscr{G}$.

16.2.1 Cas particulier

$\mathscr{G} = \mathscr{H} \triangleq \mathcal{W}\,h_e$ *où* h_e *est un signal en* temps discret *quelconque* Alors :
$[\overline{\mathcal{W}}\,(\mathcal{W}\,h_e)](t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\overline{\mathcal{W}}\,(\mathcal{W}\,h_e)]_k\,\delta_{k\,\Delta}(t)$; avec :
$[\overline{\mathcal{W}}\,(\mathcal{W}\,h_e)]_k = \frac{1}{\pi\,i}\int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \mathscr{H}(w)\,(\frac{1+w}{1-w})^{k-1}\,\frac{dw}{(1+w)^2}$,
si et seulement si l'axe imaginaire appartient à la RDC de $\mathscr{H}$.

16.2.2 Formule de réciprocité (ou théorème d'inversion)

$h_e(t) = [\overline{\mathcal{W}}\,(\mathcal{W}\,h_e)](t)$ soit :

$$\boxed{h_k = \frac{1}{\pi\,i}\int_{-i\,\infty}^{i\,\infty} \mathscr{H}(w)\,(\frac{1+w}{1-w})^{k-1}\,\frac{dw}{(1+w)^2}\;;\;\forall\;k\;\in\;\mathbb{Z}}.$$

Démonstration

Elle se calque sur celle de la TzI QED.

17 Transformations de Fourier discrètes

On pourra consulter [23] [280] [24] [281] [41] [282] [27] [283] [25] [284] [39] [285] et le logiciel Matlab [21].

Les transformations de Fourier discrètes concernent les signaux en temps discret causaux à support borné. Elles sont un cas particulier des transformations en z (cf. ci-après) [38] [286].

17.1 $TFDD$: Transformation de Fourier Discrète Directe

Nous avons vu (cf. Valeurs discrètes de la TFD d'un signal en *temps discret* à support borné) que :

$\widehat{h_e}(\frac{r}{T}) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \omega_N^{r\,k}$; $r = 0, \ldots, N-1$ (avec $\omega_N \triangleq e^{\frac{-2\,\pi\,i}{N}}$).

Posons $H_r \triangleq \widehat{h_e}(\frac{r}{T})$; $r = 0, \ldots, N-1$. Alors :

on appelle Transformation de Fourier Discrète Directe ($TFDD$) des N valeurs discrètes h_k ; $k = 0, \ldots, N-1$ les N valeurs discrètes H_r ;
$r = 0, \ldots, N-1$ telles que :

$$\boxed{H_r = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \omega_N^{r\,k}\,;\; r = 0, \ldots, N-1}.$$

En particulier $H_0 = \sum_{k=0}^{N-1} h_k$.

Par conséquent la $TFDD$ correspond à des valeurs discrètes de la TFD.

Calcul développé lorsque $N = 3$

Avec [287] $j \triangleq -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$ on a $\omega_3 = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$:

$H_0 = h_0 + h_1 + h_2$
$H_1 = h_0 + j^2\,h_1 + j\,h_2$
$H_2 = h_0 + j\,h_1 + j^2\,h_2$.

Calcul développé lorsque $N = 8$

On a $\omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$:

280. § 3.5 pp. 99-135
281. Ch. 5 pp. 291-395
282. § 34.1 et 34.2 pp. 582-586
283. 2. K. B. Howell. § 2.4.5. pp. 160-161
284. Ch. 8-9-10 pp. 541-774
285. « Transformée de Fourier discrète » 4 pages, « La transformée de Fourier rapide » 5 pages
286. pp. 465-466
287. ne pas confondre le nombre complexe j et la pseudo fonction j

$$H_0 = h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 + h_7$$
$$H_1 = h_0 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_1 - i\,h_2 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_3 - h_4 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_5 + i\,h_6 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_7$$
$$H_2 = h_0 - i\,h_1 - h_2 + i\,h_3 + h_4 - i\,h_5 - h_6 + i\,h_7$$
$$H_3 = h_0 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_1 + h_2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_3 - h_4 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_5 - h_6 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_7$$
$$H_4 = h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 + h_6 - h_7$$
$$H_5 = h_0 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_1 - i\,h_2 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_3 - h_4 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_5 + i\,h_6 + (\tfrac{-\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_7$$
$$H_6 = h_0 + i\,h_1 - h_2 - i\,h_3 + h_4 + i\,h_5 - h_6 - i\,h_7$$
$$H_7 = h_0 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_1 + i\,h_2 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_3 - h_4 + (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_5 - i\,h_6 + (\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,h_7.$$

Remarque 1 :

Le calcul de la $TFDD$ nécessite $(N-1)\,N$ sommes et $(N-1)^2$ produits, soit $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. Il existe des méthodes de calcul rapides de la $TFDD$ basées sur l'algorithme de Cooley et Tukey [11] déjà présent dans les travaux de Gauss ! qui ne nécessite que $\mathcal{O}(N \ln N)$ opérations [38] [288] [39]. Il existe également la transformation de Winograd qui fournit un calcul rapide de la $TFDD$ lorsque $N = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 13,\ 16$ [38] [289].

Remarque 2 : La $TFDD$ est donnée par la fonction Matlab «fft» [21] qui utilise l'algorithme de Cooley et Tukey, mais les valeurs discrètes sont munies d'indices variant de 1 à N et non comme ici de 0 à $N-1$.

$$\textit{Exemple } 2_e : X_r = \begin{cases} N & \text{si} \quad r = 0 \\ 0 & \text{si} \quad r = 1,\ \ldots,\ N-1 \end{cases}.$$

$$\textit{Exemple } 3_e : H_r = \begin{cases} \frac{N-1}{2} & \text{si} \quad r = 0 \\ \frac{1}{\omega_N^r - 1} & \text{si} \quad r = 1,\ \ldots,\ N-1 \end{cases}.$$

$$\textit{Exemple } 4_e : H_r = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r = 0,\ 2,\ \ldots,\ N-1 \\ N & \text{si} \quad r = 1 \end{cases}.$$

17.1.1 Lien avec la TzD

$$H_r = \widehat{h_e}(\tfrac{r}{T}) = \mathrm{H}(e^{\frac{2\,\pi\,i\,\Delta\,r}{T}}) = \mathrm{H}(\omega_N^{-r})\,;\ r = 0,\ \ldots,\ N-1.$$

Par conséquent la $TFDD$ est un cas particulier de la TzD avec les valeurs discrètes $z = \omega_N^{-r}\,;\ r = 0,\ \ldots,\ N-1$.

288. pp. 611-612
289. p. 1949

17.1.2 *TFDD* de la convolée circulaire de deux signaux en temps discret, à même support borné

Soient h_e et x_e deux signaux en *temps discret*, causaux, à même support borné $\{0, \ldots, N-1\}$ et $y_e \triangleq h_e \circledast x_e$ leur convolée circulaire qui est un signal en *temps discret*, causal, à support borné $\{0, \ldots, N-1\}$.

Posons :
$H_r \triangleq \widehat{h_e}(\frac{r}{T}) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, \omega_N^{r\,k}$; $r = 0, \ldots, N-1$.
$X_r \triangleq \widehat{x_e}(\frac{r}{T}) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \omega_N^{r\,k}$; $r = 0, \ldots, N-1$.
$Y_r \triangleq \widehat{y_e}(\frac{r}{T}) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k\, \omega_N^{r\,k}$; lors : $r = 0, \ldots, N-1$. Alors :

$\boxed{Y_r = H_r\, X_r}$.

Démonstration

$Y_r = \sum_{k=0}^{N-1} [\sum_{l=0}^{N-1} h_l\, x_{(k-l)\,mod\,N}]\, \omega_N^{r\,k} = \sum_{l=0}^{N-1} h_l\, \sum_{k=0}^{N-1} x_{(k-l)\,mod\,N}\, \omega_N^{r\,k}$
$= \sum_{l=0}^{N-1} h_l\, \sum_{m=-l}^{N-1-l} x_{m\,mod\,N}\, \omega_N^{r\,(l+m)} = (\sum_{l=0}^{N-1} h_l\, \omega_N^{r\,l})\, \sum_{m=-l}^{N-1-l} x_{m\,mod\,N}\, \omega_N^{r\,m}$
$= H_r\, (\sum_{m=-l}^{-1} x_{m\,mod\,N}\, \omega_N^{r\,m} + \sum_{m=0}^{N-1-l} x_m\, \omega_N^{r\,m})$
$= H_r\, (\sum_{k=N-l}^{N-1} x_k\, \omega_N^{r\,(k-N)} + \sum_{k=0}^{N-1-l} x_k\, \omega_N^{r\,k})$
$= H_r\, \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, \omega_N^{r\,k} = H_r\, X_r$ QED.

Attention : $Y_r = H_r\, X_r$ alors que $\widetilde{y_e} \neq \widetilde{h_e}\, \widetilde{x_e}$ puisque $\widetilde{u_e} = \widetilde{h_e}\, \widetilde{x_e}$ et que $u_e \neq y_e$.

Calcul développé avec N=2 et alors $\omega_2 = -1$:

$H_0 = h_0 + h_1$, $X_0 = x_0 + x_1$ et $Y_0 = y_0 + y_1 = h_0\, x_0 + h_1\, x_1$
$H_1 = h_0 - h_1$, $X_1 = x_0 - x_1$ et $Y_1 = y_0 - y_1 = h_0\, x_1 + h_1\, x_0$.

Et on a bien :

$Y_0 = H_0\, X_0$
$Y_1 = H_1\, X_1$.

Calcul développé avec N=3 et alors $\omega_3 = j^2$:

$H_0 = h_0 + h_1 + h_2$, $X_0 = x_0 + x_1 + x_2$ et $Y_0 = y_0 + y_1 + y_2$
$= h_0\, x_0 + h_1\, x_2 + h_2\, x_1$
$H_1 = h_0 + j^2\, h_1 + j\, h_2$, $X_1 = x_0 + j^2\, x_1 + j\, x_2$ et $Y_1 = y_0 + j^2\, y_1 + j\, y_2$
$= h_0\, x_1 + h_1\, x_0 + h_2\, x_2$
$H_2 = h_0 + j\, h_1 + j^2\, h_2$, $X_2 = x_0 + j\, x_1 + j^2\, x_2$ et $Y_2 = y_0 + j\, y_1 + j^2\, y_2$
$= h_0\, x_2 + h_1\, x_1 + h_2\, x_0$.

Et on a bien :

$Y_0 = H_0\, X_0$
$Y_1 = H_1\, X_1$
$Y_2 = H_2\, X_2$.

17.2 $TFDI$: Transformation de Fourier Discrète Inverse

Toujours avec $H_r \triangleq \widehat{h_e}(\frac{r}{N\,\Delta}) = \widehat{h_e}(\frac{r}{T})\,;\, r = 0,\, \ldots,\, N-1$,

on a vu que (cf. TFI) :

$h_k = \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1} H_r\, e^{\frac{2\,k\,r\,\pi\,i}{N}} = \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1} H_r\, \omega_N^{-k\,r}\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1$
(toujours avec $\omega_N \triangleq e^{\frac{-2\,\pi\,i}{N}}$).

Par conséquent on appelle Transformation de Fourier Discrète Inverse ($TFDI$) des N valeurs discrètes $H_r\,;\, r = 0,\, \ldots,\, N-1$ les N valeurs discrètes $h_k\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-\ 1$ telles que :

$$\boxed{h_k = \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1} H_r\, \omega_N^{-k\,r}\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1}.$$

Et, en particulier $h_0 = \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1} H_r$.

La $TFDI$ est l'inverse de la $TFDD$

Démonstration directe [41] [290] :

Soit $Q_k \triangleq \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1} H_r\, \omega_N^{-k\,r}$; alors :

$Q_k = \frac{1}{N}\,\sum_{r=0}^{N-1}[\sum_{l=0}^{N-1} h_l\, \omega_N^{r\,l}]\,\omega_N^{-k\,r} = \frac{1}{N}\,\sum_{l=0}^{N-1} h_l\,[\sum_{r=0}^{N-1} \omega_N^{(l-k)\,r}]$.

Mais $\sum_{r=0}^{N-1} \omega_N^{(l-k)\,r} = N\,\delta_{l\,k}$ ($\delta_{l\,k}$ symbole de Kronecker).

Donc $Q_k = h_k$ QED.

Remarque :

On a vu que :

$h_k = \sum_{r=0}^{N-1}[\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{q\,N+r}\, e^{\frac{2\,k\,r\,\pi\,i}{N}}] = \sum_{r=0}^{N-1}[\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{q\,N+r}]\,\omega_N^{-k\,r}$;
$k = 0,\, \ldots\, N-1$, où les coefficients c sont ceux du développement en série de Fourier de h_T.

Par conséquent : $H_r = N\,\sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{q\,N+r}$.

290. § 34.1.1 pp. 582-583

Calcul développé lorsque $N = 3$

Rappel $\omega_3 = j^2$:

$h_0 = \frac{1}{3}\,(H_0 + H_1 + H_2)$
$h_1 = \frac{1}{3}\,(H_0 + j\,H_1 + j^2\,H_2)$
$h_2 = \frac{1}{3}\,(H_0 + j^2\,H_1 + j\,H_2)$.

Calcul développé lorsque $N = 8$

Rappel $\omega_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$:

$h_0 = \frac{1}{8}\,(H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7)$
$h_1 = \frac{1}{8}\,[H_0 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_1 + i\,H_2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_3$
$- H_4 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_5 - i\,H_6 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_7]$
$h_2 = \frac{1}{8}\,(H_0 + i\,H_1 - H_2 - i\,H_3 + H_4 + i\,H_5 - H_6 - i\,H_7)$
$h_3 = \frac{1}{8}\,[H_0 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_1 - i\,H_2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_3$
$- H_4 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_5 + i\,H_6 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_7]$
$h_4 = \frac{1}{8}\,(H_0 - H_1 + H_2 - H_3 + H_4 - H_5 + H_6 - H_7)$
$h_5 = \frac{1}{8}\,[H_0 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_1 + i\,H_2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_3$
$- H_4 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_5 - i\,H_6 + (\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_7]$
$h_6 = \frac{1}{8}\,(H_0 - i\,H_1 - H_2 + i\,H_3 + H_4 - i\,H_5 - H_6 + i\,H_7)$
$h_7 = \frac{1}{8}\,[H_0 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_1 - i\,H_2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_3$
$- H_4 + (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_5 + i\,H_6 + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)\,H_7]$.

Remarque : La $TFDI$ est donnée par la fonction Matlab «ifft» [21], mais les valeurs discrètes sont munies d'indices variant de 1 à N et non comme ci-devant de 0 à $N - 1$.

Exemple 2_e : $\chi_k = 1$; $k = 0, \ldots, N - 1$.

Exemple 3_e : $h_k = \frac{k}{N}$; $k = 0, \ldots, N - 1$.

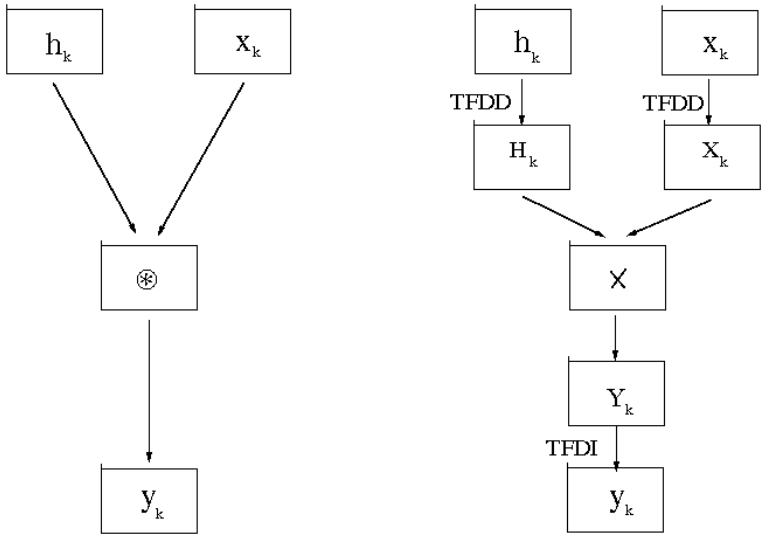
Exemple 4_e : $h_k = \omega_N^{-k}$; $k = 0, \ldots, N - 1$.

17.2.1 $TFDI$ d'un produit de $TFDD$

Soit $Y_r = H_r\,X_r$; $r = 0, \ldots, N-1$ le produit des deux $TFDD$ H_r et X_r. Si h_k ; $k = 0, \ldots, N - 1$ et x_k ; $k = 0, \ldots, N - 1$ sont les $TFDI$ respectives de H_r et X_r alors y_k ; $k = 0, \ldots, N - 1$, la $TFDI$ de Y_r, est donnée, d'après ce qui précède par :

$y_k = \sum_{l=0}^{N-1} h_l\,x_{(k-l)\,mod\,N} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{(k-l)\,mod\,N}\,x_l$.

Pour calculer la convolution circulaire de deux signaux en *temps discret* causaux et à même support borné on a donc les deux possibilités suivantes [36] [291] :



La seconde possibilité, qui utilise les transformations de Fourier discrètes, est souvent préférable au point de vue du temps de calcul.

291. p. 149

18 Transformations en cosinus discrètes

On pourra consulter [27] [292] [25] [293] [17] [39] [294] et le logiel Matlab [21].

Les transformations en cosinus discrètes n'ont pas de lien simple avec la discrétisation des transformations de Fourier en cosinus et ont un lien assez compliqué avec les transformations de Fourier discrètes (cf. ci-après). Il existe plusiers définitions différentes de ces transformations en cosinus discrètes (au mois quatre) ; de plus pour chaque définition il existe une version dite non-normaliée et une version normalisée. Nous avons choisi la définition 2, avec sa version normalisée, qui conduit à des transformations orthogonales pour les transformations directes et inverses. Il s'agit de la définition 2 de A. V. Oppenhein et R. W. Schafer, dans sa version normalisée [25], de la définition de S. A. Khayam [17], de la définition 2 de Wikipedia [39] (pas très claire !) et de celle du logiciel Matlab [21].

18.1 $TCDD$: Transformation en Cosinus Discrète Directe

On appelle Transformation en Cosinus Discrete Directe des N valeurs discrètes h_k ; $k = 0, \ldots, N-1$ les N valeurs discrètes η_r ; $r = 0, \ldots, N-1$ telles que :

$\boxed{\eta_r = w_r \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos\left[\frac{r\,(2\,k+1)\,\pi}{2\,N}\right] \;;\; r = 0, \ldots, N-1}$; avec [295] :

$w_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}$ et $w_1 = \ldots = w_{N-1} \triangleq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}$.

Elle s'écrit $\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$; avec :

$A_{r\,k} = w_r\, cos[\frac{r\,(2\,k+1)\,\pi}{2\,N}]$
(élément de la matrice A à la ligne r et à la colonne k).

On va voir (cf. $TCDI$) que la matrice A, d'ordre N, est orthogonale, i.e. est telle que $A^{-1} = A^T$.

292. 3. P. Yip § 3.4 pp. 253-262
293. § 8.8 pp. 589-599
294. « Transformée en cosinus discrète » 5 pages
295. ne pas confondre w et ω !

Remarque : avec le logiciel Matlab [21] la $TCDD$ est donnée par la fonction «dct», mais les valeurs discrètes sont munies d'indices variant de 1 à N et non comme ici de 0 à $N-1$.

Calcul développé lorsque N=3

Alors $w_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $w_1 = w_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Calcul développé lorsque N=8

Alors $w_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ et $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 = w_7 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_4 & C_4 & C_4 & C_4 & C_4 & C_4 & C_4 \\ C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & -C_7 & -C_5 & -C_3 & -C_1 \\ C_2 & C_6 & -C_6 & -C_2 & -C_2 & -C_6 & C_6 & C_2 \\ C_3 & -C_7 & -C_1 & -C_5 & C_5 & C_1 & C_7 & -C_3 \\ C_4 & -C_4 & -C_4 & C_4 & C_4 & -C_4 & -C_4 & C_4 \\ C_5 & -C_1 & C_7 & C_3 & -C_3 & -C_7 & C_1 & -C_5 \\ C_6 & -C_2 & C_2 & -C_6 & -C_6 & C_2 & -C_2 & C_6 \\ C_7 & -C_5 & C_3 & -C_1 & C_1 & -C_3 & C_5 & -C_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix};$$

avec : $C_1 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{16})$, $C_2 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{8})$, $C_3 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{16})$,
$C_4 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $C_5 = \frac{1}{2}\cos(\frac{5\pi}{16})$, $C_6 = \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{8})$, $C_7 = \frac{1}{2}\cos(\frac{7\pi}{16})$

Remarque : Pour cet *exemple* il y a une procédure de calcul plus rapide :

$$\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \\ \eta_4 \\ \eta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_4 & C_4 & C_4 \\ C_2 & C_6 & -C_6 & -C_2 \\ C_4 & C_4 & -C_4 & C_4 \\ C_6 & -C_2 & C_2 & -C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 + h_7 \\ h_1 + h_6 \\ h_2 + h_5 \\ h_3 + h_4 \end{bmatrix}, \text{ et :}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \\ \eta_5 \\ \eta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 \\ C_3 & -C_7 & -C_1 & -C_5 \\ C_5 & -C_1 & C_7 & C_3 \\ C_7 & -C_5 & C_3 & -C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 - h_7 \\ h_1 - h_6 \\ h_2 - h_5 \\ h_3 - h_4 \end{bmatrix}.$$

18.1.1 Lien avec la $TFDD$

Ce lien peut être établi pour toutes les définitions de la $TCDD$. Il est assez simple pour les versions non-normalisées mais est plus compliqué pour les versions normalisées.

Ce lien est établi pour les définitions 1 et 2 en [25] et nous l'établissons ici pour la définition 2 que nous avons choisie.

Soit, à partir du signal en *temps discret* h_e à support borné $\{0,\,\ldots,\,N-1\}$, le signal en *temps discret* $h_{2\,e}$ à support borné $\{0,\,\ldots,\,2\,N-1\}$ tel que :

$h_{2,\,k} = h_{k \bmod N} + h_{(-k-1) \bmod N}\,;\; k = 0,\,\ldots,\,2\,N-1$ [25] [296]
(l'indice 2 est relatif au choix de la définition 2).

Alors on constate que $h_{2,\,k} = h_k\,;\; k = 0,\,\ldots,\,N-1$.

Considérons $H_{2,\,r}\,;\; r = 0,\,\ldots,\,2\,N-1$ la $TFDD$ de $h_{2,\,k}\,;$
$k = 0,\,\ldots,\,2\,N-1$:

$H_{2,\,r} = \sum_{k=0}^{2\,N-1} h_{2,\,k}\,\omega_{2\,N}^{r\,k}\,;\; r = 0,\,\ldots,\,2\,N-1$ avec $\omega_{2\,N} \triangleq e^{-\frac{\pi\,i}{N}}$

Posons $\overline{\eta}_r \triangleq \omega_{2\,N}^{\frac{r}{2}}\,H_{2,\,r}$ [25] [297] ; alors on démontre que :

$\overline{\eta}_r = 2\,\sum_{k=0}^{N-1} h_k\,\cos\left[\frac{r\,(2\,k+1)\,\pi}{2\,N}\right]\,;\; r = 0,\,\ldots,\,N-1$ [25] [298].

Les N valeurs $\overline{\eta}_r\,;\; r = 0,\,\ldots,\,N-1$ constituent la $TCDD$, non normalisée, des N valeurs $h_k\,;\; k = 0,\,\ldots,\,N-1$.

Alors $\sum_{k=0}^{N-1} h_k^2 = \frac{1}{2\,N}\,\sum_{k=0}^{N-1} \beta_r\,\overline{\eta}_r^2$ [25] [299] ; avec :

$\beta_r = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad r = 0 \\ 1 & \text{si} \quad r = 1,\,\ldots,\,N-1 \end{cases}$ [25] [300].

C'est la raison pour laquelle cette $TCDD$ est non normalisée.

Posons $\eta_r = \frac{1}{2}\,w_r\,\overline{\eta}_r\,;$ alors on constate que :

$\eta_r = w_r\,\sum_{k=0}^{N-1} h_k\,\cos\left[\frac{r\,(2\,k+1)\,\pi}{2\,N}\right]\,;\; r = 0,\,\ldots,\,N-1.$

Il s'agit bien de le définition de la $TCDD$ précédente.

Alors $\sum_{k=0}^{N-1} h_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_r^2$ et c'est la raison pour laquelle cette $TCDD$ est normalisée.

Dans ce cas A. V. Oppenhein et R. W. Schafer parlent de transformation *unitaire* [25] [301] dans la mesure ou la matrice de la transformation est orthogonale. Cependant cette dénomination est ambiguê dans la mesure où une matrice unitaire est une matrice dont l'inverse est égale à l'adjointe (ce qui est toutefois le cas ici puisque cette matrice est réelle).

296. éq. 8.154 p. 591
297. éq. 8.171 p. 594
298. éq. 8.155 p. 591
299. éq. 8.177 p. 595 mais avec des erreurs : le second membre doit être divisé par 2 et les valeurs absolues intempestives supprimées
300. éq. 8.157 p. 591
301. p. 592

18.2 $TCDI$: Transformation en Cosinus Discrète Inverse

La Transformation en Cosinus Discrete Inverse est l'inverse de la Transformation en Cosinus Discrete Directe.

Étant donné que :

$\eta_r = w_r \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cos[\frac{r\,(2\,k+1)\,\pi}{2\,N}]\,;\; r = 0,\,\ldots,\,N-1\,;$ avec :

$w_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}$ et $w_1 = \ldots = w_{N-1} \triangleq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}$, on a :

$$\boxed{h_k = \sum_{r=0}^{N-1} w_r\,\eta_r \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]\,;\; k = 0,\,\ldots,\,N-1}.$$

Démonstration

Soit :

$Q_k \triangleq \sum_{r=0}^{N-1} w_r\,\eta_r \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]\,;\; k = 0,\,\ldots,\,N-1.$

Alors :

$Q_k = \sum_{r=0}^{N-1} w_r \{w_r \sum_{l=0}^{N-1} h_l \cos[\frac{r\,(2\,l+1)\,\pi}{2\,N}]\} \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]$. Soit :

$Q_k = \sum_{l=0}^{N-1} h_l\,R_{k\,l}\,;$ avec :

$R_{k\,l} \triangleq \sum_{r=0}^{N-1} w_r^2 \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}] \cos[\frac{(2\,l+1)\,r\,\pi}{2\,N}]\,;$
$k = 0,\,\ldots,\,N-1\,;\; l = 0,\,\ldots,\,N-1.$

Alors :

$R_{k\,l} = \frac{1}{N} + \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}] \cos[\frac{(2\,l+1)\,r\,\pi}{2\,N}],$

$R_{k\,l} = -\frac{1}{N} + \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \cos[\frac{(k+l+1)\,r\,\pi}{N}] + \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \cos[\frac{(k-l)\,r\,\pi}{N}].$

Mais étant donné que :

$$\sum_{r=0}^{N-1} \cos(\frac{m\,r\,\pi}{N}) = \begin{cases} N & \text{si} \quad m = 2\,q\,N; q \in \mathbb{N} \\ \frac{\sin(\frac{m\,\pi}{2})}{\sin(\frac{m\,\pi}{2\,N})} \cos[\frac{m}{2}\,(1-\frac{1}{N})\,\pi] & \text{si} \quad m \neq 2\,q\,N; q \in \mathbb{N} \end{cases},$$

on en conclut, en examinant les 4 cas de parité et d'imparité de k et l que :

$R_{k\,l} = \delta_{k\,l}$ ($\delta_{k\,l}$ symbole de Kronecker) et par conséquent $Q_k = h_k$ QED.

Par conséquent on appelle Transformation en Cosinus Discrete Inverse des N valeurs discrètes $\eta_r\,;\; r = 0,\,\ldots,\,N-1$ les N valeurs discrètes $h_k\,;$ $k = 0,\,\ldots,\,N-1$ telles que :

$h_k = \sum_{r=0}^{N-1} w_r\, \eta_r\, \cos\left[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}\right]\ ;\ k = 0,\ \ldots,\ N-1$; avec :

$w_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}}$ et $w_1 = \ldots = w_{N-1} \triangleq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}}$.

Elle s'écrit $\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \end{bmatrix}$; avec :

$(A^{-1})_{k\,r} = w_r\, \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]$
(élément de la matrice A^{-1} à la ligne k et la colonne r).

Par conséquent $(A^{-1})_{k\,r} = A_{r\,k}$ soit $A^{-1} = A^T$ i.e. la matice A est orthogonale.

Remarque : la $TCDI$ est donnée par la fonction Matlab «idct» [21], mais les valeurs discrètes sont munies d'indices variant de 1 à N et non comme ici de 0 à $N-1$.

Calcul développé lorsque N=3

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}.$$

Calcul développé lorsque N=8

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \\ C_4 & C_3 & C_6 & -C_7 & -C_4 & -C_1 & -C_2 & -C_5 \\ C_4 & C_5 & -C_6 & -C_1 & -C_4 & C_7 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_7 & -C_2 & -C_5 & C_4 & C_3 & -C_6 & -C_1 \\ C_4 & -C_7 & -C_2 & C_5 & C_4 & -C_3 & -C_6 & C_1 \\ C_4 & -C_5 & -C_6 & C_1 & -C_4 & -C_7 & C_2 & -C_3 \\ C_4 & -C_3 & C_6 & C_7 & -C_4 & C_1 & -C_2 & C_5 \\ C_4 & -C_1 & C_2 & -C_3 & C_4 & -C_5 & C_6 & -C_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \end{bmatrix};$$

avec : $C_1 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$, $C_2 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $C_3 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$,
$C_4 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $C_5 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{5\,\pi}{16}\right)$, $C_6 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{3\,\pi}{8}\right)$, $C_7 = \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{7\,\pi}{16}\right)$.

18.2.1 Lien avec la $TFDI$

Ce lien peut être établi pour toutes les définitions de la $TCDI$. Il est assez simple pour les versions non-normalisées mais est plus compliqué pour les versions normalisées.

Ce lien est établi pour les définitions 1 et 2 en [25] et nous l'établissons ici pour la définition 2 que nous avons choisie.

Avec les notations précédentes on trouve :

$h_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \beta_r \, \overline{\eta}_r \, \cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1$ [25] [302]

Les N valeurs $h_k\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1$ constituent la $TCDI$, non normalisée, des N valeurs $\overline{\eta}_r\,;\, r = 0,\, \ldots,\, N-1$.

Alors $\frac{1}{2\,N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta_r \, \overline{\eta}_r^2 = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^2$.

C'est la raison pour laquelle cette $TCDI$ est non normalisée.

Étant donné que $\frac{2\,\beta_r}{N\,w_r} = w_r$ on constate que $\frac{1}{N}\,\beta_r\,\overline{\eta}_r = w_r\,\eta_r$ et par conséquent :

$h_k = \sum_{r=0}^{N-1} w_r\,\eta_r\,\cos[\frac{(2\,k+1)\,r\,\pi}{2\,N}]\,;\, k = 0,\, \ldots,\, N-1.$

Il s'agit bien de le définition de la $TCDD$ précédente.

Alors $\sum_{k=0}^{N-1} \eta_r^2 = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^2$ et c'est la raison pour laquelle cette $TCDI$ est normalisée.

19 Transformations en sinus discrètes

On pourra consulter [27] [303].

On peut définir la Transformation en Sinus Discrète Directe ($TSDD$) et la Transformation en Sinus Discrète Inverse ($TSDI$), mais ces définitions étant rares dans la littérature nous renvoyons à la référence indiquée.

302. éq. 8.156 p. 591

303. 3. P. Yip § 3.4 pp. 253-262 pour la TSDD et § 3.4.2.2. p. 256 pour la TSDI

Annexe A : transformations mathématiques continues répertoriées dans l'ouvrage de A. I. Zayed [41].

Transformations de Laplace unilatères : Ch. 5 pp. 115-147

Transformations de Laplace bilatères : Ch. 6 pp. 147-161

Transformations de Borel : Ch. 7 pp. 163-173

Transformations de Stieltjes : Ch. 8 pp. 175-189

Transformations de Lambert : Ch. 9 pp. 191-199

Transformations de Mellin : Ch. 10 pp. 201-214

Transformations de Fourier : Ch. 12 pp. 221-263

Transformations de Hartley : Ch. 13 pp. 265-271

Transformations de Hilbert : Ch. 14 pp. 273-290

Transformations de Boas : Ch. 15 pp. 291-300

Transformations de Mittag-Leffler : Ch. 16 pp. 301-308

Transformations de convolution : Ch. 17 pp. 309-323

Transformations de Weierstass : Ch. 18 pp. 325-336

Transformations d'Abel : Ch. 19 pp. 337-344

Transformations de Hankel et de type Hankel : Ch. 21 pp. 371-388

Transformations de Hardy : Ch. 22 pp. 389-396

Transformations de Meijer ou transformations K : Ch. 23 pp. 397-404

Transformations de Kontorovich-Lebedev : Ch. 24 pp. 405-413

Transformations de Mehler-Fock : Ch. 25 pp. 415-426

Transformations de type Sturm-Liouville : Ch. 26 pp. 427-447

Transformations hypergéométriques. Transformation E. Transformation G : Ch. 27 pp. 449-459

Transformations de Bargmann : Ch. 28 pp. 461-471

Transformations de Zak : Ch. 29 pp. 473-490

Transformations de Gabor : Ch. 30 pp. 491-505

Transformations d'ambiguïté et les distributions de Wigner : Ch. 31 pp. 507-529

Transformations en ondelettes : Ch. 32 pp. 531-555

Transformations de Radon : Ch. 33 pp. 557-579

Remarque : le chapitre 20 pp. 345-370 est consacré aux intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et Weyl.

Annexe B : Contenu de l'ouvrage de A. D. Poularikas [27].

Signaux et systèmes : 1. A. D. Poularikas. pp. 1-94

Transformations de Fourier : 2. K. B. Howell. pp. 95-226

Transformations [304] en sinus et en cosinus : 3. P. Yip. pp. 227-280

Transformation de Hartley : 4. K. J. Olejniczak. pp. 281-330

Transformations de Laplace : 5. S. Seely. pp. 331-386

Transformation en z : 6. A. D. Poularikas. pp. 387-462

Transformations de Hilbert : 7. S. L. Hahn. pp. 463-630

Transformations de Radon et Abel : 8. S. R. Deans pp. 631-718

Transformation de Hankel : 9. R. Piessens. pp. 719-746

Transformation en ondelettes : 10. Y. Sheng. pp. 747-828

Transformation de Mellin : 11. J. Bertrand, P. Bertrand et J.-P. Ovarlez. pp. 829-886

Transformation des signaux mixtes temps fréquence : 12. G. Faye Boudreaux-Bartels. pp. 887-962

Annexe 1 : fonctions d'une variable complexe. A. D. Poularikas. pp. 963-1014.

Annexe 2 : séries et sommations. pp. 1015-1022

Annexe 3 : intégrales définies. pp. 1023-1036

Annexe 4 : matrices et déterminants. pp. 1037-1064

Annexe 5 : analyse vectorielle pp. 1065-1080

Annexe 6 : formules algébriques et systèmes de coordonnées. pp. 1081-1098

Index : pp. 1099-1103

304. de Fourier

Annexe C : Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h quelconque.

Remarque préliminaire :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$.

Démonstration

$\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,e^{\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{\Delta}}\,dt$.

Donc :

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\,n\,\pi\,i\,t}{\Delta}}]\,dt$.

Et, d'après la formule de Poisson, en temps :

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\Delta\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,e^{-2\,\pi\,i\,\nu\,t}\,\delta_{k\,\Delta}(t)\,dt]$
$=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ QED.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* quelconque il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k=\frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,;\,\forall k\in\mathbb{Z}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta,\ \forall k\in\mathbb{Z}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]-\infty\ \infty[$) on a :

$\boxed{\widehat{h_e}(\nu)=\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})}$.

Démonstration

Dans ce cas :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_k\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}=\widehat{h_e}(\nu)$ QED.

Annexe D : Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal

Remarque

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{h(0+0)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$.

Démonstration

D'après ce qui précède on a :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta-0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$
$=\frac{h(0+0)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ QED.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k=\frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,;\,\forall k\in\mathbb{Z}^{+*}$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta,\ \forall k\in\mathbb{Z}^{+*}$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ \infty[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_e}(\nu)=\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})+h_0-\frac{h(0+0)}{2}}.$$

Démonstration

Dans ce cas :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{h(0+0)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}=\frac{h(0+0)}{2}+\widehat{h_e}(\nu)-h_0$
QED.

Annexe E : Lien éventuel entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$ si h_e correspond à l'échantillonnage de h causal à support borné.

Remarque

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})$
$=\frac{h(0+0)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}+\frac{h(T-0)}{2}\,e^{-2\,n\,\pi\,i\,T\,\nu}$.

Démonstration

D'après ce qui précède on a :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta-0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$
$=\frac{h(0+0)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}+\frac{h(T-0)}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}$ QED.

Dans le cas général d'un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\ T[$ il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_e}$ et $\widehat{h}$.

Par contre ssi $h_k=\frac{1}{2}\,[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,;\,k=1,\,\ldots,\,N-1$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta\,;\,k=1,\,\ldots,\,N-1$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\ T[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_e}(\nu)=\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})+h_0-\frac{h(0+0)}{2}-\frac{h(T-0)}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}}.$$

Démonstration

Dans ce cas :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{h(0+0)}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}h_k\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}+\frac{h(T-0)}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}$
$=\frac{h(0+0)}{2}+\widehat{h_e}(\nu)-h_0+\frac{h(T-0)}{2}\,e^{-2\,\pi\,i\,T\,\nu}$ QED.

Annexe F : Lien éventuel entre $\widehat{h_{T\,e}}$ et $\widehat{h_T}$ si $h_{T\,e}$ correspond à l'échantillonnage de h_T périodique.

Remarque

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2\,T}\,[h(0+0)+h(T-0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)$
$+\,\frac{1}{2\,T}\,\sum_{k=1}^{N-1}\{[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}[\omega_N^{k\,r}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)]\}.$

Démonstration

D'après ce qui précède on a :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2}\,\sum_{k=-\infty}^{\infty}[h_T(k\,\Delta-0)+h_T(k\,\Delta+0)]\,e^{-2\,k\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$
car h_T peut être considéré comme un cas particulier de signal quelconque .

Mais comme h_T est un signal périodique, de période T, posons $k=q\,N+r$; avec $q\in\mathbb{Z}$ et $r=0,\,\ldots,\,N-1$; alors $k\,\Delta=q\,T+r\,\Delta$ et
$h_T(k\,\Delta-0)=h_T(r\,\Delta-0)$ et $h_T(k\,\Delta+0)=h_T(r\,\Delta+0)$; il vient alors :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})$
$=\frac{1}{2}\,\{\sum_{r=0}^{N-1}[h_T(r\,\Delta-0)+h_T(r\,\Delta+0)]\,e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}\}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}e^{-2\,q\,\pi\,i\,T\,\nu}$
$=\frac{1}{2}\,\{[h(T-0)+h(0+0)]+\sum_{r=1}^{N-1}[h(r\,\Delta-0)+h(r\,\Delta+0)]\,e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}\}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}e^{-2\,q\,\pi\,i\,T\,\nu}.$

D'après la formule de Poisson en fréquence on a :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2\,T}\,\{[h(0+0)+h(T-0)]$
$+\sum_{r=1}^{N-1}[h(r\,\Delta-0)+h(r\,\Delta+0)]\,e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}\}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{n}{T}}(\nu).$

Mais comme $e^{-2\,r\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}$ est une *fonction continue* on a :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2\,T}\,[h(0+0)+h(T-0)]\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)$
$+\,\frac{1}{2\,T}\,\sum_{k=1}^{N-1}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{2\,k\,n\,\pi\,i\,\Delta\,\nu}{T}}\,\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)$
$=\frac{1}{2\,T}\,[h(0+0)+h(T-0)]\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{n}{T}}(\nu)$
$+\,\frac{1}{2\,T}\,\sum_{k=1}^{N-1}[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_N^{k\,n}\,\delta_{\frac{n}{T}}(\nu).$

Soit $n=q\,N+r$; avec $q\in\mathbb{Z}$ et $r=0,\,\ldots,\,N-1$; alors $\omega_N^{k\,n}=\omega_N^{k\,r}$ et :

$\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu-\frac{n}{\Delta})=\frac{1}{2\,T}\,[h(0+0)+h(T-0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)$
$+\,\frac{1}{2\,T}\,\sum_{k=1}^{N-1}\{[h(k\,\Delta-0)+h(k\,\Delta+0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}[\omega_N^{k\,r}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)]\}$ QED.

Dans le cas général d'un signal h_T « périodisé » d'un signal h en *temps continu* causal à support borné $[0\;T[$ quelconque il n'y a *aucun* lien entre $\widehat{h_{T\,e}}$ [305] et $\widehat{h_T}$.

305. $\widehat{h_{T\,e}}=\widehat{h_{e\,T}}$ car $h_{T\,e}=h_{e\,T}$

Par contre ssi $h_k = \frac{1}{2}\left[h(k\,\Delta - 0) + h(k\,\Delta + 0)\right]\,;\, k = 1,\,\ldots,\,N-1$ (ce qui est le cas si h est *continu* en $k\,\Delta\,;\, k = 1,\,\ldots,\,N-1$ et, en particulier, si h est *continu* sur $]0\;T[$) on a :

$$\boxed{\widehat{h_{Te}}(\nu) = \frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu - \tfrac{n}{\Delta}) + \frac{1}{T}\,[h_0 - \tfrac{h(0+0)}{2} - \tfrac{h(T-0)}{2}]\,\sum_{r=0}^{N-1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)}.$$

Démonstration

On a :

$\frac{1}{\Delta}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{h_T}(\nu - \frac{n}{\Delta}) = \frac{1}{2\,T}\,[h(0+0) + h(T-0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)$
$+\,\frac{1}{T}\,\sum_{k=1}^{N-1}\{h_k\,\sum_{r=0}^{N-1}[\omega_N^{k\,r}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)]\}$
$= \frac{1}{2\,T}\,[h(0+0) + h(T-0)]\,\sum_{r=0}^{N-1}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)$
$+\frac{1}{T}\,\sum_{k=0}^{N-1}\{h_k\,\sum_{r=0}^{N-1}[\omega_N^{k\,r}\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)]\} - \frac{1}{T}\,\{h_0\,\sum_{r=0}^{N-1}[\,\sum_{q=-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{q}{\Delta}+\frac{r}{T}}(\nu)]\}$
QED.

Références

[1] M. Abramowitz et C. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical tables.* 9th printing. New-york Dover. 1972.

[2] A. Angot. *Compléments de mathémathiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications.* Collection technique et scientifique du CNET. Éditions de la revue d'optique. Paris. 1965.

[3] G. Arfken et H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* Harcourt/Academic Press. 5th ed. 2001.

[4] J. Arndt. *The z-Transform (ZT). Ch. 3 in « Remark on FFT algoritms ».* http ://www.jjj.de/fxt/.

[5] P. A. Barrucand. *La transformée de Mellin et ses applications.* Annals of telecommunications. Vol. 5. No. 11. pp. 381-388. Date ?

[6] W. H. Beyer. *Standard Mathematical Tables.* CRC press 28th ed. Boca Raton. FL. 1987.

[7] B. P. Bogert, M. J. R. Healy et J. W. Tukey. *The quefrency alanysis of times series for echoes : cepstrum, pseudo- covariance, cross-cepstrum and saphe tracking.* Proc. Symp. Time Seies Analysis, M. Rosenblatt. John Wiley & sons, Inc. pp.209-243. New-York. 1963.

[8] R. N. Braewell. *The Fourier Transform and its Application.* Mc Graw-Hill. New-York. 2nd ed. 1986.

[9] R. N. Bracewell. *The Hartley Transform.* New-York Oxford University Press. 1986.

[10] G. A. Campbell et R. M. Forster. . *Fourier integrals for practical applications.* Bell Telephon Lab. 1931, revised edition. Van Nostran. 1948.

[11] J. W. Cooley et J. W. Tukey. *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.* Math. Comput. 19, 297-301. 1965.

[12] Ph. Courmontagne. *Les ondelettes.* I.S.E.M./L2MP CNRS UMR 6137. M5 - Option Méca-Info-Tronique.

[13] P. Flajolet et M. Regnier. *Some uses of the Mellin integral transform in the analysis of algoritms.* INRIA. France. Date ?

[14] P. Franklin. *Fourier methods.* Mc Graw-Hill. 1949.

[15] E. Hewitt. *Remark on the invrse of Fourier-Stieltjes transforms.* Annals of Mathematics. Vol. 57. No. 3. Mai 1953.

[16] T. Kailath, A. H. Sayed et B. Hassibi. *Linear estimation.* Prentice Hall Inc. Upper Saddle River. New Jersey. 2000.

[17] S. A. Khayam. *Discrete Cosine Transform (DVT) : Theory and Application. ECE 802-602.* Information Theory and Coding. Seminar 1. 2003.

[18] I. Kiyosi. *Encyclopedic Dictionary of Mathemathics (EDM) by the Mathematical Society of Japan.* 2nd edition. The MIT Press. Cambridge, Massachussets, Londres, Angleterre. 1960.

[19] P. Lefèvre. *Optimalisation des systèmes dynamiques.* Dunod. Paris. 1965.

[20] P. Lefèvre. *Techniques Analogiques et Numériques. Analyse et Synthèse des Systèmes Échantillonnés Numériques.* ESE. Paris. 1967.

[21] Matlab. *Matlab Reference Guide.* The Mathworks, Inc. Août 1992.

[22] P. M. Morse et H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics. Part I.* McGraw-hill, New-York. 1953.

[23] A. V. Oppenheim et R. W. Schafer. *Digital Signal Processing.* Prentice Hall. Englewood Cliffs, New-Jersey. 1975.

[24] A. V. Oppenheim et A. S. Willsky avec I. T. Young. *Signal and Systems.* Prentice/Hall International editions. 1983.

[25] A. V. Oppenheim et R. W. Schafer. *Discrete-Time Signal Processing.* Prentice Hall Signal Processing Series. Upper Saddle River, New-Jersy. 1999 (deuxième édition).

[26] A. Papoulis. *Signal Analysis.* McGraw-Hill Book Company. New-York ... Toronto. 1977.

[27] A. D. Poularikas. *The transforms and application hanbook.* CRC Press, Inc. 1996.

[28] Ph. Robba. *Cours de Mathématiques.* École Supérieure d'Électricité. No. 1020. Paris. 1968-1969.

[29] E. Roubine. *Introduction à la théorie de la communication.* École Supérieure d'Électricité. No. 3038. Paris. 1968.

[30] E. Roubine. *Introduction à la théorie de la communication. Tome 1. Signaux non aléatoires.* Masson et Cie. Paris. 1970.

[31] L. Schwartz. *Méthodes Mathématiques pour les sciences Physiques (MMP).* Hermann. Paris. 1965.

[32] I. Sneddon. *Fourier transforms.* Mc Graw-Hill. 1951.

[33] M. Spiegel. *Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites.* Séries Schaum. Mc Graw-Hill. 1974.

[34] M. Spiegel. *Transformées de Laplace.* Séries Schaum. Mc Graw-Hill. 1980.

[35] . *Tables of Integral Transforms.* California Institute of Technology. Mc Graw-Hill. 1954.

[36] A. W. M. Van Den Enden et N. A. M. Verhoeckx. *Traitement numérique du signal. Une introduction.* Masson. Paris, Milan, Barcelone, Bonn. 1992.

[37] A. Vretblad. *Fourier Analysis and Its Application.* Graduate Texts in Mathematics 223. Spriger. 2003.

[38] E. W. Weisstein. *CRC Concice Encyclopedia of Mathematics.* CRC Press. Boca Raton, London, New-York, Washington D.C.. 1999.

[39] Wikipedia. *The free encyclopedia.*

[40] Wolfram MathWorld.

[41] A. I. Zayed. *Hanbook of Functions and Generalized Function Transformations.* CRC Press.Boca Raton. FL. 1996.