



# Comment définir l'orientation d'un corps ?

Marc Renaud

► **To cite this version:**

Marc Renaud. Comment définir l'orientation d'un corps ?. Rapport LAAS n° 96078. 2017. <hal-01523925>

**HAL Id: hal-01523925**

**<https://hal.laas.fr/hal-01523925>**

Submitted on 17 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comment définir l'orientation d'un corps ?

Quelles relations unissent les dérivées des paramètres d'orientation aux  
composantes de la vitesse angulaire du corps

Marc Renaud<sup>1</sup>

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INSA, Toulouse,  
France

Rapport LAAS No 96078. Mars 1996

1. Je remercie chaleureusement Patrick Danès, Jean-Yves Fourquet et Philippe Souères pour leur aide concernant la réalisation de cet article.



## Résumé

Nous présentons dans cet article divers choix de paramètres - plus ou moins redondants - permettant de définir l'orientation d'un corps, par rapport à un espace. Plus précisément nous examinons les composantes du vecteur rotation, les paramètres de la rotation finie, les paramètres d'Euler complets ou incomplets, les angles d'Euler classiques ou non, les cosinus directeurs complets ou incomplets et les paramètres de Cayley-Klein.

Puis nous établissons les relations qui unissent les dérivées de ces paramètres aux composantes de la vitesse angulaire du corps.

Après avoir établi les relations entre les paramètres et les angles d'Euler classiques nous examinons comment composer les orientations selon que l'on utilise les matrices de passage, les quaternions ou les paramètres de Cayley-Klein.

Nous proposons en conclusion le choix des paramètres d'Euler qui offrent le meilleur compromis entre une légère redondance et une grande facilité à composer les orientations.

**Mots-clés : Orientation (ou Attitude), Paramètres d'orientation, Matrice de passage (ou de changement de base), Quaternion, Vitesse angulaire.**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Définitions et notations générales</b>	<b>12</b>
2.1	Vecteurs, tenseurs et composantes . . . . .	12
2.2	Opérations entre vecteurs et tenseurs et opérations matricielles entre composantes . . . . .	14
2.2.1	Changeement de base . . . . .	15
2.3	Définition de l'orientation et de la vitesse angulaire . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Définitions et calculs concernant le premier ensemble de pa- ramètres d'orientation</b>	<b>18</b>
3.1	Définition du vecteur rotation $\underline{\varepsilon}$ et des vecteurs $\underline{t}$ et $\underline{s}$ . . . . .	18
3.2	Calcul du tenseur $\underline{\tau}$ , représentant la rotation de vecteur $\underline{\varepsilon}$ , en fonction de $\underline{\varepsilon}$ , $\underline{t}$ , ou $\underline{s}$ et $c$ . . . . .	20
3.2.1	Calcul de $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{\varepsilon}$ . . . . .	21
3.2.2	Calcul de $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{t}$ . . . . .	21
3.2.3	Calcul de $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{s}$ et $c$ . . . . .	22
3.2.4	Calcul de la matrice $R$ en fonction des composantes du tenseur $\underline{\tau}$ . . . . .	22
3.3	Calcul de $\underline{\varepsilon}$ , $\underline{t}$ , ou $\underline{s}$ et $c$ en fonction de $\underline{\tau}$ . . . . .	22
3.4	Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ), de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ), ou de $\underline{\dot{s}}$ et $\dot{c}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ) . . . . .	23
3.4.1	Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ) . . . . .	24
3.4.2	Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ) . . . . .	24
3.4.3	Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{s}}$ et $\dot{c}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ) . . . . .	24
3.5	Calcul de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ), de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ), ou de $\underline{\dot{s}}$ et $\dot{c}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ), en fonction de $\underline{\omega}$ . . . . .	25
3.5.1	Calcul de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ) en fonction de $\underline{\omega}$ . . . . .	25
3.5.2	Calcul de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ) en fonction de $\underline{\omega}$ . . . . .	25
3.5.3	Calcul de $\underline{\dot{s}}$ et $\dot{c}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ) en fonction de $\underline{\omega}$ . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Premier ensemble de paramètres d'orientation</b>	<b>26</b>
4.1	Composantes du vecteur rotation : paramètres $\xi, \eta, \zeta$ . . . . .	26
4.1.1	Calcul de $R$ en fonction de $\xi, \eta, \zeta$ . . . . .	26
4.1.2	Calcul de $\xi, \eta, \zeta$ en fonction de $R$ . . . . .	27
4.1.3	Calcul de $\xi, \dot{\eta}, \zeta$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $\xi, \eta, \zeta$ ) . . . . .	29
4.1.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ (connaissant $\xi, \eta, \zeta$ ) . . . . .	29
4.2	Paramètres de la rotation finie $u, v, w$ . . . . .	29
4.2.1	Calcul de $R$ en fonction de $u, v, w$ . . . . .	30
4.2.2	Calcul de $u, v, w$ en fonction de $R$ . . . . .	30
4.2.3	Calcul de $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $u, v, w$ ) . . . . .	30
4.2.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ (connaissant $u, v, w$ ) . . . . .	31
4.3	Paramètres d'Euler complets $c, p, q, r$ . . . . .	31
4.3.1	Calcul de $R$ en fonction de $c, p, q, r$ . . . . .	32
4.3.2	Calcul de $c, p, q, r$ en fonction de $R$ . . . . .	32
4.3.3	Calcul de $\dot{c}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $c, p, q, r$ ) . . . . .	33
4.3.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{c}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ (connaissant $c, p, q, r$ ) . . . . .	33
4.4	Paramètres d'Euler incomplets $p, q, r$ . . . . .	34
4.4.1	Calcul de $R$ en fonction de $p, q, r$ . . . . .	34
4.4.2	Calcul de $p, q, r$ en fonction de $R$ . . . . .	34
4.4.3	Calcul de $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $p, q, r$ ) . . . . .	36
4.4.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ (connaissant $p, q, r$ ) . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Deuxième ensemble de paramètres d'orientation</b>	<b>38</b>
5.1	Angles de Bryant . . . . .	38
5.1.1	Calcul de $R$ en fonction de $\lambda, \mu, \nu$ . . . . .	39
5.1.2	Calcul de $\lambda, \mu, \nu$ en fonction de $R$ . . . . .	39
5.1.3	Calcul de $\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $\lambda, \mu, \nu$ ) . . . . .	39
5.1.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}$ (connaissant $\lambda, \mu, \nu$ ) . . . . .	40
5.2	Angles de d'Euler classiques . . . . .	40
5.2.1	Calcul de $R$ en fonction de $\psi, \theta, \varphi$ . . . . .	41
5.2.2	Calcul de $\psi, \theta, \varphi$ en fonction de $R$ . . . . .	41

5.2.3	Calcul de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $\psi, \theta, \varphi$ ) . . . . .	41
5.2.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ (connaissant $\psi, \theta, \varphi$ ) . . . . .	41
5.2.5	Comparaison des notations selon les auteurs . . . . .	42
5.3	Angles d'Euler non classiques . . . . .	42
5.3.1	Angles aéronautiques [3] . . . . .	43
5.3.2	Angles nautiques [3] . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Troisième ensemble de paramètres d'orientation</b>	<b>46</b>
6.1	Cosinus directeurs complets	
	$x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ . . . . .	46
6.1.1	Calcul de $R$ en fonction de $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$	46
6.1.2	Calcul de $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ en fonction de $R$	46
6.1.3	Calcul de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{y}'_x, \dot{y}'_y, \dot{y}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ ) . . . . .	47
6.1.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{y}'_x, \dot{y}'_y, \dot{y}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ ) . . . . .	47
6.2	Cosinus directeurs incomplets	
	$x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ . . . . .	47
6.2.1	Calcul de $R$ en fonction de $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ . . . . .	48
6.2.2	Calcul de $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ en fonction de $R$ . . . . .	48
6.2.3	Calcul de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ ) . . . . .	48
6.2.4	Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ ) . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Quatrième ensemble de paramètres d'orientation</b>	<b>50</b>
7.1	Paramètres de Cayley-Klein [3] [18] . . . . .	50
<b>8</b>	<b>Relations entre les paramètres et les angles d'Euler</b>	<b>52</b>
<b>9</b>	<b>Composition des orientations</b>	<b>54</b>
9.1	Utilisation des matrices de passage . . . . .	54
9.2	Utilisation des quaternions . . . . .	55
9.3	Utilisation des paramètres de Cayley-Klein . . . . .	56
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>58</b>





# Chapitre 1

## Introduction

Le but de cet article est de présenter divers choix de *paramètres* permettant de définir l'*orientation*<sup>1</sup> d'un corps par rapport à un espace. Plus précisément il s'agit de définir l'orientation d'une base orthonormée directe  $\mathcal{B}'$ , composée de trois vecteurs  $\underline{x}'$ ,  $\underline{y}'$  et  $\underline{z}'$  liés à ce corps - et qualifiée de nouvelle -, par rapport à une base orthonormée directe  $\mathcal{B}$ , composée de trois vecteurs  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  et  $\underline{z}$  liés à cet espace - et qualifiée d'ancienne.

L'orientation du corps par rapport à l'espace, ou de la nouvelle base par rapport à l'ancienne, peut être définie par la matrice de passage, ou de changement de base,  $R$ , de l'ancienne à la nouvelle base. Cette matrice  $R$  est un élément du *groupe spécial orthogonal à trois dimensions*  $SO(3)$  [7] [12] [15] [22]. Ce groupe n'étant pas isomorphe à  $\mathbb{R}^3$  il n'est possible de définir l'orientation précédente que *localement* à l'aide de coordonnées locales de  $SO(3)$ . Là réside l'une des difficultés à définir l'orientation. Dans la suite nous présentons divers choix de coordonnées locales : les *coordonnées de première espèce* [16] - qui sont en quelque sorte les plus naturelles - et divers choix de *coordonnées de seconde espèce* [16].

Un second objectif est d'établir les relations qui unissent les *dérivées de ces paramètres* aux *composantes* - dans la base  $\mathcal{B}$  - de la *vitesse angulaire*  $\underline{\omega}$  du corps - par rapport à cet espace, i.e. par rapport à la base  $\mathcal{B}$ . Pour éviter toutes confusions par la suite nous parlerons d'orientation, ou de vitesse angulaire, *par rapport à un espace* - ou par rapport à une base de cet espace - et de composantes d'un vecteur *dans une base*.

Nous constaterons qu'il n'existe aucun choix de paramètres d'orientation dont les dérivées s'identifient aux composantes de la vitesse angulaire [4]. C'est une autre des raisons qui font qu'il est difficile de définir l'orientation.

---

1. ou attitude

Notre souci sera de présenter des calculs qui utilisent un nombre quasi-minimal d'opérations arithmétiques (additions, soustractions, multiplications et divisions) et de fonctions mathématiques (fonctions trigonométriques directes et inverses, fonction signe, fonction valeur absolue et fonction racine carrée) dans le but de permettre des calculs en-ligne.

Insistons sur le fait que l'utilisation de *bases*, et non de *repères* (bases dont on a spécifié l'origine), restreint l'étude à la seule *orientation* du corps et non à sa *position*. En conséquence dans les figures les origines des différentes bases représentées ne jouent aucun rôle ; elles sont distinguées les unes des autres uniquement pour la clarté de la représentation.

Les différents paramètres d'orientation que nous allons considérer - et qui sont définis précisément dans la suite de l'article - sont répartis en quatre ensembles.

1 - Premier ensemble de paramètres d'orientation :

- \* les coordonnées locales de première espèce de  $SO(3)$  [16], ou *composantes du vecteur rotation*,

- \* des coordonnées locales de seconde espèce de  $SO(3)$  [16] :

- les *paramètres de la rotation finie*,
- les *paramètres d'Euler complets*,
- les *paramètres d'Euler incomplets*.

2 - Deuxième ensemble de paramètres d'orientation (angles) :

- \* les angles de Bryant,
- \* les angles d'Euler classiques,
- \* les angles d'Euler non classiques.

3 - Troisième ensemble de paramètres d'orientation :

- \* les cosinus directeurs complets,
- \* les cosinus directeurs incomplets.

4 - Quatrième ensemble de paramètres d'orientation :

- \* les paramètres de Cayley-Klein,
- \* etc.

Nous indiquerons ensuite comment définir l'orientation d'une base  $\mathcal{B}''$  par rapport à une base  $\mathcal{B}$  connaissant son orientation par rapport à une autre base  $\mathcal{B}'$  et l'orientation de cette base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ . Nous montrerons l'intérêt d'utiliser les paramètres d'Euler complets, considérés comme composantes d'un *quaternion unitaire* pour cette définition.

Pour les différents paramètres d'orientation cités nous donnons successivement les calculs :

- de la matrice  $R$  en fonction de ces paramètres,
- de ces paramètres en fonction de la matrice  $R$ ,
- des dérivées de ces paramètres en fonction des composantes de la vitesse angulaire (connaissant ces paramètres),
- et des composantes de la vitesse angulaire en fonction des dérivées de ces paramètres (connaissant ces paramètres).

Le lecteur pourra se servir de ces calculs comme de tables, sans se soucier de leur obtention. S'il désire entrer dans les détails il devra suivre le plan suivant :

- la deuxième chapitre est consacré aux définitions et notations générales
- et la troisième chapitre aux définitions et calculs concernant le premier ensemble de paramètres d'orientation.

Les premier, deuxième, troisième et quatrième ensemble de paramètres sont présentés respectivement dans les quatrième, cinquième, sixième et septième chapitres.

Les relations entre les paramètres et les angles d'Euler classiques font l'objet du huitième chapitre alors que le neuvième chapitre présente la composition des orientations.

Finalement le dixième chapitre présente la conclusion.

Un petit lexique anglais-français est proposé en annexe.



# Chapitre 2

## Définitions et notations générales

### 2.1 Vecteurs, tenseurs et composantes

Soit  $\mathcal{B} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  une base orthonormée directe de l'espace vectoriel réel euclidien, de dimension 3,  $\mathbb{R}^3$ . Cette base permet de définir, canoniquement, une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 (plus simplement appelés tenseurs par la suite); il s'agit de :

$$(\underline{x} \otimes \underline{x}, \underline{x} \otimes \underline{y}, \underline{x} \otimes \underline{z}, \underline{y} \otimes \underline{x}, \underline{y} \otimes \underline{y}, \underline{y} \otimes \underline{z}, \underline{z} \otimes \underline{x}, \underline{z} \otimes \underline{y}, \underline{z} \otimes \underline{z})$$

(le produit tensoriel  $\otimes$ , qui intervient entre 2 vecteurs, sera défini ci-après).

Un vecteur quelconque  $\underline{v}$  peut être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$\underline{v} = v_x \underline{x} + v_y \underline{y} + v_z \underline{z}.$$

De même un tenseur quelconque  $\underline{t}$  peut être écrit comme combinaison linéaire des tenseurs de base :

$$\begin{aligned} \underline{t} = & t_{xx} \underline{x} \otimes \underline{x} + t_{xy} \underline{x} \otimes \underline{y} + t_{xz} \underline{x} \otimes \underline{z} \\ & + t_{yx} \underline{y} \otimes \underline{x} + t_{yy} \underline{y} \otimes \underline{y} + t_{yz} \underline{y} \otimes \underline{z} \\ & + t_{zx} \underline{z} \otimes \underline{x} + t_{zy} \underline{z} \otimes \underline{y} + t_{zz} \underline{z} \otimes \underline{z}. \end{aligned}$$

Les composantes du vecteur  $\underline{v}$ , dans la base  $\mathcal{B}$ , sont groupées dans la matrice colonne, de dimension  $3 \times 1$ , notée :

$$v_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

et les composantes du tenseur  $\underline{t}$ , dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ , dans la matrice carrée, d'ordre 3, notée :

$$t_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix}.$$

A tout vecteur  $\underline{v}$  nous associons le tenseur de pré-produit vectoriel  $\hat{\underline{v}}$  par ce vecteur, défini par :

$$\hat{\underline{v}} = -v_z \underline{x} \otimes \underline{y} + v_y \underline{x} \otimes \underline{z} + v_z \underline{y} \otimes \underline{x} - v_x \underline{y} \otimes \underline{z} - v_y \underline{z} \otimes \underline{x} + v_x \underline{z} \otimes \underline{y},$$

et dont la matrice des composantes, dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ , est la matrice, d'ordre 3 :

$$\hat{v}_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix}.$$

A tout tenseur  $\underline{t}$  nous associons le tenseur transposé  $\underline{t}^T$ , défini par :

$$\begin{aligned} \underline{t}^T &= t_{xx} \underline{x} \otimes \underline{x} + t_{yx} \underline{x} \otimes \underline{y} + t_{zx} \underline{x} \otimes \underline{z} \\ &+ t_{xy} \underline{y} \otimes \underline{x} + t_{yy} \underline{y} \otimes \underline{y} + t_{zy} \underline{y} \otimes \underline{z} \\ &+ t_{xz} \underline{z} \otimes \underline{x} + t_{yz} \underline{z} \otimes \underline{y} + t_{zz} \underline{z} \otimes \underline{z}, \end{aligned}$$

et dont la matrice des composantes, dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ , est la matrice, d'ordre 3 :

$$t_{(\mathcal{B})}^T = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{pmatrix}.$$

De plus nous utilisons le tenseur unité  $\underline{E}$ , défini par :

$$\underline{E} = 1 \underline{x} \otimes \underline{x} + 1 \underline{y} \otimes \underline{y} + 1 \underline{z} \otimes \underline{z},$$

dont la matrice des composantes, dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ , est la matrice unité  $E$ , d'ordre 3 :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Opérations entre vecteurs et tenseurs et opérations matricielles entre composantes

Soient  $v_{(\mathcal{B})}$ ,  $v'_{(\mathcal{B})}$ ,  $v''_{(\mathcal{B})}$  et  $v'''_{(\mathcal{B})}$  les matrices, de dimension  $3 \times 1$ , des composantes des vecteurs  $\underline{v}$ ,  $\underline{v}'$ ,  $\underline{v}''$  et  $\underline{v}'''$  dans la base  $\mathcal{B}$ , et  $t_{(\mathcal{B})}$ ,  $t'_{(\mathcal{B})}$  et  $t''_{(\mathcal{B})}$  les matrices, d'ordre 3, des composantes des tenseurs  $\underline{\underline{t}}$ ,  $\underline{\underline{t}'}$  et  $\underline{\underline{t}}''$  dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ .

A - Outre les opérations classiques d'addition et de produit extérieur, ou produit par un scalaire, nous utilisons :

1 - le produit contracté, généralisation du produit scalaire, noté  $\cdot$ , opérant entre deux vecteurs, un tenseur et un vecteur (dans cet ordre) ou deux tenseurs :

$$\begin{aligned} k &= \underline{v} \cdot \underline{v}', \\ \underline{v}' &= \underline{\underline{t}} \cdot \underline{v}, \\ \underline{\underline{t}}'' &= \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{t}'}, \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned} k &= v_{(\mathcal{B})}^T v'_{(\mathcal{B})} = v'_{(\mathcal{B})}^T v_{(\mathcal{B})}, \\ v'_{(\mathcal{B})} &= t_{(\mathcal{B})} v_{(\mathcal{B})}, \\ t''_{(\mathcal{B})} &= t_{(\mathcal{B})} t'_{(\mathcal{B})}. \end{aligned}$$

2 - le produit tensoriel entre vecteurs, noté  $\otimes$  :

$$\underline{\underline{t}} = \underline{v} \otimes \underline{v}',$$

tel que :

$$t_{(\mathcal{B})} = v_{(\mathcal{B})} v'_{(\mathcal{B})}^T.$$

On peut vérifier que :

$$\underline{\underline{t}} = \underline{v} \otimes \underline{v}' = \hat{\underline{v}}' \cdot \hat{\underline{v}} + (v \cdot v') \underline{\underline{E}},$$

car en effet la matrice  $t_{(\mathcal{B})}$  est telle que :

$$t_{(\mathcal{B})} = \hat{v}'_{(\mathcal{B})} \hat{v}_{(\mathcal{B})} + v_{(\mathcal{B})}^T v'_{(\mathcal{B})} E.$$



3 - Dans ces conditions on peut également vérifier que le produit vectoriel entre vecteurs, noté  $\times$ , est tel que :

$$\underline{v}'' = \underline{v} \times \underline{v}' = -\underline{v}' \times \underline{v} = \underline{\hat{v}} \cdot \underline{v}' = -\underline{\hat{v}}' \cdot \underline{v},$$

car en effet la matrice  $v''_{(\mathcal{B})}$  est telle que :

$$v''_{(\mathcal{B})} = \hat{v}_{(\mathcal{B})} v'_{(\mathcal{B})} = -\hat{v}'_{(\mathcal{B})} v_{(\mathcal{B})}.$$

Le tenseur  $\underline{\hat{v}}''$ , de pré-produit vectoriel par le vecteur  $\underline{v}'' = \underline{v} \times \underline{v}'$ , (noté par définition  $\underline{\hat{v}}'' = \underline{v} \hat{\times} \underline{v}'$ ) est tel que :

$$\underline{\hat{v}}'' = \underline{v} \hat{\times} \underline{v}' = \underline{v}' \otimes \underline{v} - \underline{v} \otimes \underline{v}' = \underline{\hat{v}} \cdot \underline{\hat{v}}' - \underline{\hat{v}}' \cdot \underline{\hat{v}}.$$

**B - Les différentes relations suivantes, que l'on peut démontrer aisément en considérant les composantes, sont utiles pour la suite des calculs :**

$$\begin{aligned} \underline{E} \cdot \underline{v} &= \underline{v}, \\ (\underline{v} \otimes \underline{v}') \cdot \underline{v}'' &= (\underline{v} \otimes \underline{v}'') \cdot \underline{v}' = (\underline{v}' \cdot \underline{v}'') \underline{v} = (\underline{v}'' \cdot \underline{v}') \underline{v}, \\ \underline{v} \times (\underline{v}' \times \underline{v}'') &= \underline{\hat{v}} \cdot (\underline{\hat{v}}' \cdot \underline{v}'') = (\underline{v} \cdot \underline{v}'') \underline{v}' - (\underline{v} \cdot \underline{v}') \underline{v}'', \\ \underline{\hat{v}} \cdot (\underline{v}' \otimes \underline{v}'') &= (\underline{\hat{v}} \cdot \underline{v}') \otimes \underline{v}'' = (\underline{v} \times \underline{v}') \otimes \underline{v}'', \\ (\underline{v} \otimes \underline{v}') \cdot \underline{\hat{v}}'' &= \underline{v} \otimes (\underline{\hat{v}}' \cdot \underline{v}'') = \underline{v} \otimes (\underline{v}' \times \underline{v}'''), \\ (\underline{v} \otimes \underline{v}') \cdot (\underline{v}'' \otimes \underline{v}''') &= (\underline{v}' \cdot \underline{v}'') (\underline{v} \otimes \underline{v}'''). \end{aligned}$$

### 2.2.1 Changement de base

Soient  $\mathcal{B} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $\mathcal{B}' = (\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}')$  deux bases orthonormées directes, qualifiées respectivement d'ancienne et de nouvelle.

Les composantes d'un vecteur  $\underline{v}$  quelconque dans la base  $\mathcal{B}$  ont été notées :

$$v_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

dans la base  $\mathcal{B}'$  nous les notons :

$$v_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$v_{(\mathcal{B})} = Rv_{(\mathcal{B}')} ,$$

avec :

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{x'} & x_{y'} & x_{z'} \\ y_{x'} & y_{y'} & y_{z'} \\ z_{x'} & z_{y'} & z_{z'} \end{pmatrix} .$$

La matrice  $R$  appartient au *groupe spécial orthogonal à trois dimensions*  $SO(3)$  [7] [12] [15] [22]; elle est orthogonale :

$$R^{-1} = R^T .$$

Les composantes d'un tenseur  $\underline{t}$  quelconque, dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}$ , ont été notées :

$$t_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{pmatrix} ,$$

dans la base canoniquement associée à la base  $\mathcal{B}'$  nous les notons :

$$t_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} t_{x'x'} & t_{x'y'} & t_{x'z'} \\ t_{y'x'} & t_{y'y'} & t_{y'z'} \\ t_{z'x'} & t_{z'y'} & t_{z'z'} \end{pmatrix} .$$

On a alors :

$$t_{(\mathcal{B})} = Rt_{(\mathcal{B}')}R^T .$$

La matrice  $R$  est appelée *matrice de passage*, ou *de changement de base*, de l'ancienne base  $\mathcal{B}$  à la nouvelle  $\mathcal{B}'$ .

## 2.3 Définition de l'orientation et de la vitesse angulaire

Supposons que  $\mathcal{B} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $\mathcal{B}' = (\underline{x}', \underline{y}', \underline{z}')$ , les deux bases orthonormées directes précédentes, soient liées respectivement à l'espace et au corps.

L'orientation du corps par rapport à l'espace, ou de la nouvelle base par rapport à l'ancienne, peut être définie par la matrice de passage  $R$ .

Le groupe  $SO(3)$  n'étant pas isomorphe à  $\mathbb{R}^3$  il n'est possible de définir l'orientation précédente que *localement* à l'aide de coordonnées locales de  $SO(3)$ .

Si cette orientation dépend du temps soit  $\underline{\omega}$  le vecteur vitesse angulaire du corps, par rapport à l'espace, ou de la base  $\mathcal{B}'$ , par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

On a donc :

$$\omega_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \text{ et } \omega_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}.$$

# Chapitre 3

## Définitions et calculs concernant le premier ensemble de paramètres d'orientation

### 3.1 Définition du vecteur rotation $\underline{\varepsilon}$ et des vecteurs $\underline{t}$ et $\underline{s}$

Il existe un vecteur rotation  $\underline{\varepsilon}$  permettant de transformer la base  $\mathcal{B}$  en la base  $\mathcal{B}'$  (cf. Figure 1) :

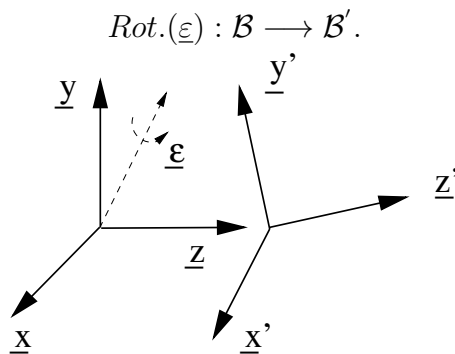


Figure 1 : définition du vecteur rotation  $\underline{\varepsilon}$ .

Le vecteur  $\underline{\varepsilon}$  peut s'écrire :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{e},$$

où  $\underline{e}$  est un vecteur unitaire et  $\varepsilon$  la valeur algébrique de la rotation.

Le vecteur unitaire  $\underline{e}$  est choisi de telle manière que<sup>1</sup> :

1)  $e_x + e_y + e_z > 0$ ,

ou :

2)  $e_x + e_y + e_z = 0$  et  $(e_y - e_z)(e_z - e_x)(e_x - e_y) > 0$ ,

ou :

3)  $e_x + e_y + e_z = 0$  et  $(e_y - e_z)(e_z - e_x)(e_x - e_y) = 0$  et  $e_x e_y e_z > 0$ ,

et la valeur algébrique de la rotation  $\varepsilon$  de telle manière que :  $-\pi < \varepsilon \leq \pi$ .

On a donc :

$$e_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = e_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{pmatrix},$$

avec :

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = e_{x'}^2 + e_{y'}^2 + e_{z'}^2 = 1,$$

et :

$$\varepsilon_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon e_x \\ \varepsilon e_y \\ \varepsilon e_z \end{pmatrix} = \varepsilon_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon e_{x'} \\ \varepsilon e_{y'} \\ \varepsilon e_{z'} \end{pmatrix},$$

avec :

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 = \varepsilon_{x'}^2 + \varepsilon_{y'}^2 + \varepsilon_{z'}^2 = \varepsilon^2.$$

On pose, par définition :

$$\begin{aligned} C &= \cos \varepsilon, \\ S &= \sin \varepsilon, \\ \Gamma &= (1 - C)/\varepsilon^2, \\ \Sigma &= S/\varepsilon, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} c &= \cos(\varepsilon/2), \\ s &= \sin(\varepsilon/2), \\ t &= \operatorname{tg}(\varepsilon/2), \\ \chi &= \varepsilon/t. \end{aligned}$$

---

1. le choix proposé est toujours possible

On a alors :

$$\begin{aligned} C &= c^2 - s^2 = 2c^2 - 1 = 1 - 2s^2 = (1 - t^2)/(1 + t^2), \\ S &= 2cs = 2t/(1 + t^2), \\ \Gamma &= 2t^2/(\varepsilon^2(1 + t^2)), \\ \Sigma &= 2t/(\varepsilon(1 + t^2)), \end{aligned}$$

et :

$$\Sigma = \chi\Gamma.$$

Outre le vecteur  $\underline{\varepsilon}$  nous allons également considérer les vecteurs  $\underline{t}$  et  $\underline{s}$  tels que :

$$\underline{t} = te \text{ et } \underline{s} = se.$$

Ces deux vecteurs peuvent également représenter la rotation, comme nous allons le voir.

On a donc :

$$t_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te_x \\ te_y \\ te_z \end{pmatrix} = t_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} t_{x'} \\ t_{y'} \\ t_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te_{x'} \\ te_{y'} \\ te_{z'} \end{pmatrix}$$

et :

$$s_{(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} se_x \\ se_y \\ se_z \end{pmatrix} = s_{(\mathcal{B}')} = \begin{pmatrix} s_{x'} \\ s_{y'} \\ s_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} se_{x'} \\ se_{y'} \\ se_{z'} \end{pmatrix}.$$

### 3.2 Calcul du tenseur $\underline{\underline{\tau}}$ , représentant la rotation de vecteur $\underline{\varepsilon}$ , en fonction de $\underline{\varepsilon}$ , $\underline{t}$ , ou $\underline{s}$ et $c$

Considérons un vecteur  $\underline{v}$  quelconque. Par la rotation de vecteur  $\underline{\varepsilon}$ , qui transforme la base  $\mathcal{B}$  en la base  $\mathcal{B}'$ , ce vecteur est transformé en vecteur  $\underline{v}'$  et on peut écrire [9](cf. Figure 2) :

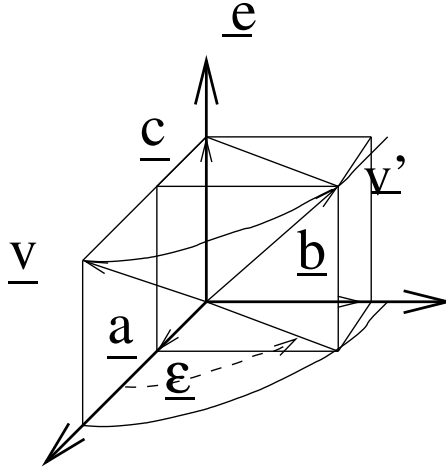


Figure 2 : décomposition du vecteur  $\underline{v}'$ .

$$\underline{v}' = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c},$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{c} &= (\underline{v} \cdot \underline{e}) \underline{e}, \\ \underline{a} &= (\underline{v} - \underline{c}) C, \\ \underline{b} &= (\underline{e} \times \underline{v}) S. \end{aligned}$$

Finalement, d'après les diverses relations indiquées auparavant :

$$\underline{v}' = \underline{\tau} \cdot \underline{v},$$

avec :

$$\underline{\tau} = (1 - C) \underline{e} \otimes \underline{e} + C \underline{E} + S \underline{\hat{e}}.$$

Le calcul de  $\underline{\tau}$  en fonction de  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{t}$ , ou  $\underline{s}$  et  $c$  s'en déduit ; il est présenté ci-après.

### 3.2.1 Calcul de $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{\varepsilon}$

$$\underline{\tau} = ((1 - \cos \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}) / \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}) \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon} + (\cos \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}) \underline{E} + ((\sin \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}) / \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}) \underline{\hat{\varepsilon}}.$$

### 3.2.2 Calcul de $\underline{\tau}$ en fonction de $\underline{t}$

$$\underline{\tau} = (2\underline{t} \otimes \underline{t} + (1 - \underline{t} \cdot \underline{t}) \underline{E} + 2\underline{\hat{t}}) / (1 + \underline{t} \cdot \underline{t}).$$

### 3.2.3 Calcul de $\underline{\underline{\tau}}$ en fonction de $\underline{s}$ et $c$

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\underline{s} \otimes \underline{s} + (2c^2 - 1)\underline{\underline{E}} + 2c\underline{\underline{\hat{s}}}.$$

### 3.2.4 Calcul de la matrice $R$ en fonction des composantes du tenseur $\underline{\underline{\tau}}$

Etant donné que  $v_{(\mathcal{B})} = v'_{(\mathcal{B}')}$  on peut écrire :

$$v'_{(\mathcal{B})} = \tau_{(\mathcal{B})}v_{(\mathcal{B})} = \tau_{(\mathcal{B})}v'_{(\mathcal{B}')}.$$

Comme  $v'_{(\mathcal{B})} = Rv'_{(\mathcal{B}')}$  pour tout vecteur  $\underline{v}'$  on en déduit que :

$$R = \tau_{(\mathcal{B})}.$$

De même :

$$\underline{v} = \underline{\underline{\tau}}^{-1} \cdot \underline{v}',$$

avec :

$$\underline{\underline{\tau}}^{-1} = (1 - C)\underline{e} \otimes \underline{e} + C\underline{\underline{E}} - S\underline{\underline{\hat{e}}},$$

(car  $\underline{\underline{\tau}}^{-1}$  représente la rotation de vecteur  $-\underline{\varepsilon}$ ).

Remarque :

$$\tau_{(\mathcal{B})}^{-1} = \tau_{(\mathcal{B})}^T = R^T.$$

Par conséquent :

$$\underline{\underline{\tau}}^{-1} = \underline{\underline{\tau}}^T.$$

## 3.3 Calcul de $\underline{\varepsilon}$ , $\underline{t}$ , ou $\underline{s}$ et $c$ en fonction de $\underline{\underline{\tau}}$

Ce calcul est difficile, voire impossible. Le calcul des composantes de  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\underline{t}$ , ou  $\underline{s}$  et  $c$  en fonction des éléments de la matrice  $R = \tau_{(\mathcal{B})}$  sera présenté pour chaque choix de paramètres d'orientation.



### 3.4 Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ), de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ), ou de $\underline{\dot{s}}$ et $\underline{\dot{c}}$ (connaissant $\underline{s}$ et $\underline{c}$ )

On peut écrire :

$$\underline{\dot{v}}' = \underline{\dot{t}} \cdot \underline{v} = \underline{\dot{t}} \cdot \underline{\tau}^{-1} \cdot \underline{v}'.$$

Cependant d'après la formule de la base mobile [4] [5] [6] :

$$\underline{\dot{v}}' = \underline{\omega} \times \underline{v}' = \underline{\hat{\omega}} \cdot \underline{v}',$$

et donc :

$$\underline{\hat{\omega}} = \underline{\dot{t}} \cdot \underline{\tau}^{-1}.$$

Etant donné que :

$$\underline{\tau} = (1 - C)\underline{e} \otimes \underline{e} + C\underline{E} + S\underline{\hat{e}},$$

on en déduit :

$$\underline{\dot{t}} = (1 - C)(\underline{e} \otimes \underline{\dot{e}} + \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e}) + S\underline{\dot{e}}\underline{e} \otimes \underline{e} - S\underline{\dot{e}}\underline{E} + S\underline{\hat{e}} + C\underline{\dot{e}}\underline{\hat{e}}.$$

De plus nous avons vu que :

$$\underline{\tau}^{-1} = (1 - C)\underline{e} \otimes \underline{e} + C\underline{E} - S\underline{\hat{e}}.$$

Par conséquent :

$$\underline{\hat{\omega}} = ((1 - C)(\underline{e} \otimes \underline{\dot{e}} + \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e}) + S\underline{\dot{e}}(\underline{e} \otimes \underline{e} - \underline{E}) + S\underline{\hat{e}} + C\underline{\dot{e}}\underline{\hat{e}}) \cdot ((1 - C)\underline{e} \otimes \underline{e} + C\underline{E} - S\underline{\hat{e}}).$$

Si l'on remarque tout d'abord que  $\underline{e} \cdot \underline{\dot{e}} = 0$  car  $\underline{e} \cdot \underline{e} = 1$  on peut établir, parfois grâce aux relations précédentes, que :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{e}} \cdot \underline{\hat{e}} &= \underline{e} \otimes \underline{e} - \underline{E}, \\ (\underline{e} \otimes \underline{e}) \cdot (\underline{e} \otimes \underline{e}) &= \underline{e} \otimes \underline{e}, \\ \underline{\hat{e}} \cdot (\underline{e} \otimes \underline{e}) &= (\underline{e} \otimes \underline{e}) \cdot \underline{\hat{e}} = \underline{0}, \\ \underline{\dot{e}} \cdot \underline{\dot{e}} &= \underline{e} \otimes \underline{\dot{e}}, \\ (\underline{e} \otimes \underline{\dot{e}} + \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e}) \cdot \underline{\hat{e}} &= -\underline{e} \otimes (\underline{e} \times \underline{\dot{e}}), \\ \underline{\dot{e}} \cdot (\underline{e} \otimes \underline{e}) &= -(\underline{e} \times \underline{\dot{e}}) \otimes \underline{e}, \\ (\underline{e} \otimes \underline{\dot{e}} + \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e}) \cdot (\underline{e} \otimes \underline{e}) &= \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e}, \\ \underline{e} \otimes \underline{\dot{e}} - \underline{\dot{e}} \otimes \underline{e} &= -\underline{e} \hat{\times} \underline{\dot{e}}, \\ \underline{e} \otimes (\underline{e} \times \underline{\dot{e}}) - (\underline{e} \times \underline{\dot{e}}) \otimes \underline{e} &= \underline{\dot{e}}. \end{aligned}$$

On obtient alors, tous calculs faits :

$$\underline{\hat{\omega}} = \dot{\underline{\hat{e}}} + S\underline{\hat{e}} + (1 - C)\underline{e} \hat{\times} \dot{\underline{\hat{e}}}.$$

Puis :

$$\underline{\omega} = \dot{\underline{e}} + S\underline{e} + (1 - C)\underline{e} \times \dot{\underline{e}}.$$

Le calcul de  $\underline{\omega}$  en fonction de  $\underline{\dot{e}}$ ,  $\underline{\dot{t}}$ , ou  $\underline{\dot{s}}$  et  $\underline{\dot{c}}$  s'en déduit ; il est présenté ci-après.

### 3.4.1 Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{e}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ )

Etant donné que :

$$\underline{e} = \underline{\varepsilon}/\varepsilon,$$

on en déduit que :

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{\varepsilon}}/\varepsilon - \underline{\varepsilon}\dot{\underline{\varepsilon}}/\varepsilon^2,$$

et par conséquent :

$$\underline{\omega} = (1 - (\sin\sqrt{\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon}})/\sqrt{\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon}})(\underline{\varepsilon}\cdot\dot{\underline{\varepsilon}}/\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon})\underline{\varepsilon} + ((\sin\sqrt{\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon}})/\sqrt{\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon}})\dot{\underline{\varepsilon}} + ((1 - \cos\sqrt{\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon}})/\underline{\varepsilon}\cdot\underline{\varepsilon})\underline{\varepsilon} \times \dot{\underline{\varepsilon}}.$$

### 3.4.2 Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ )

Etant donné que :

$$\underline{e} = \underline{t}/t,$$

on en déduit que :

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{t}}/t - \underline{t}\dot{\underline{t}}/t^2,$$

et par conséquent :

$$\underline{\omega} = 2(\underline{\dot{t}} + \underline{t} \times \dot{\underline{t}})/(1 + \underline{t}\cdot\underline{t}).$$

### 3.4.3 Calcul de $\underline{\omega}$ en fonction de $\underline{\dot{s}}$ et $\underline{\dot{c}}$ (connaissant $\underline{s}$ et $\underline{c}$ )

Etant donné que :

$$\underline{e} = \underline{s}/s,$$

on en déduit que :

$$\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{s}}/s - \underline{s}\dot{\underline{s}}/s^2,$$

et par conséquent :

$$\underline{\omega} = 2(-\underline{\dot{c}}\underline{s} + \underline{c}\dot{\underline{s}} + \underline{s} \times \dot{\underline{s}}).$$

### 3.5 Calcul de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ), de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ), ou de $\underline{\dot{s}}$ et $\underline{\dot{c}}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ), en fonction de $\underline{\omega}$

L'inversion des relations précédentes conduit aux résultats suivants.

#### 3.5.1 Calcul de $\underline{\dot{\varepsilon}}$ (connaissant $\underline{\varepsilon}$ ) en fonction de $\underline{\omega}$

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = (((2 - \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}} \cot g(\sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}/2)) \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\omega} / \underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}) \underline{\varepsilon} + \sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}} \cot g(\sqrt{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}}/2) \underline{\omega} - \underline{\varepsilon} \times \underline{\omega}) / 2.$$

#### 3.5.2 Calcul de $\underline{\dot{t}}$ (connaissant $\underline{t}$ ) en fonction de $\underline{\omega}$

$$\underline{\dot{t}} = ((\underline{t} \cdot \underline{\omega}) \underline{t} + \underline{\omega} - \underline{t} \times \underline{\omega}) / 2.$$

#### 3.5.3 Calcul de $\underline{\dot{s}}$ et $\underline{\dot{c}}$ (connaissant $\underline{s}$ et $c$ ) en fonction de $\underline{\omega}$

$$\begin{aligned} \underline{\dot{s}} &= (c \underline{\omega} - \underline{s} \times \underline{\omega}) / 2, \\ \underline{\dot{c}} &= -(\underline{s} \cdot \underline{\omega}) / 2. \end{aligned}$$

# Chapitre 4

## Premier ensemble de paramètres d'orientation

### 4.1 Composantes du vecteur rotation : paramètres $\xi, \eta, \zeta$

On peut définir l'orientation de la base  $\mathcal{B}'$ , par rapport à la base  $\mathcal{B}$ , grâce aux composantes du vecteur  $\underline{\varepsilon}$ .

On pose pour simplifier les notations :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Ces composantes sont les *composantes du vecteur rotation*, elles sont telles que :

$$\begin{aligned} -\pi < \xi &\leq \pi, \\ -\pi < \eta &\leq \pi, \\ -\pi < \zeta &\leq \pi, \end{aligned}$$

et ont l'avantage d'être au nombre minimum de trois.

Le triplet  $(\xi, \eta, \zeta)$  appartient à une partie  $\mathcal{D}_\varepsilon$  de la boule  $B(O, \pi)$  de centre O et de rayon  $\pi$ .

#### 4.1.1 Calcul de $R$ en fonction de $\xi, \eta, \zeta$

D'après 3.2.1 :

$$\underline{\tau} = \Gamma \underline{\varepsilon} \otimes \underline{\varepsilon} + C \underline{E} + \Sigma \underline{\hat{\varepsilon}}.$$

Par conséquent d'après 3.2.4 :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ |\varepsilon| &= \sqrt{\varepsilon^2}, \\ C &= \cos|\varepsilon|, \\ |S| &= \sin|\varepsilon|, \\ \Gamma &= (1 - C)/\varepsilon^2, \\ \Sigma &= |S|/|\varepsilon|, \\ R &= \begin{pmatrix} \Gamma\xi^2 + C & \Gamma\xi\eta - \Sigma\zeta & \Gamma\xi\zeta + \Sigma\eta \\ \Gamma\xi\eta + \Sigma\zeta & \Gamma\eta^2 + C & \Gamma\eta\zeta - \Sigma\xi \\ \Gamma\xi\zeta - \Sigma\eta & \Gamma\eta\zeta + \Sigma\xi & \Gamma\zeta^2 + C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque :  $SO(3)$  est en fait un *groupe de Lie* [7] [22]; la matrice  $R$  s'obtient grâce à l'application exponentielle de ce groupe de Lie :

$$R = \exp \begin{pmatrix} 0 & -\zeta & \eta \\ \zeta & 0 & -\xi \\ -\eta & \xi & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est la raison pour laquelle les paramètres  $\xi, \eta, \zeta$  sont qualifiés de *coordonnées de première espèce* [16].

#### 4.1.2 Calcul de $\xi, \eta, \zeta$ en fonction de $R$

Posons :  $\varsigma = Tr(R) + 1 = r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1 = 2(1 + C)$ .

1 - Si  $\varsigma \neq 4$  ou  $0$  :

$$\begin{aligned} C &= \varsigma/2 - 1, \\ |S| &= \sqrt{1 - C^2}, \\ \Lambda &= (Arc \cos C)/(2|S|)^1, \\ \xi &= \Lambda(r_{32} - r_{23}), \\ \eta &= \Lambda(r_{13} - r_{31}), \\ \zeta &= \Lambda(r_{21} - r_{12}). \end{aligned}$$

2 - Si  $\varsigma = 4$  :

$$\xi = \eta = \zeta = 0.$$

3 - Si  $\varsigma = 0$  :

3.1 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 \neq 0$  :

---

1. la fonction  $Arc \cos x$  définit un angle  $x$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$

$$\begin{aligned}\xi &= (\text{sign}(r_{11} + r_{12} + r_{13} + 1))\pi\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\ \eta &= (\text{sign}(r_{21} + r_{22} + r_{23} + 1))\pi\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\ \zeta &= (\text{sign}(r_{31} + r_{32} + r_{33} + 1))\pi\sqrt{(1 + r_{33})/2},\end{aligned}$$

3.2 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 = 0$  :

3.2.1 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{32})\pi\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\ \eta &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{13})\pi\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\ \zeta &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{21})\pi\sqrt{(1 + r_{33})/2},\end{aligned}$$

3.2.2 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) = 0$  :

3.2.2.1 - si  $r_{22} = r_{33} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= \pi\sqrt{6}/3, \\ \eta &= -\pi\sqrt{6}/6, \\ \zeta &= -\pi\sqrt{6}/6,\end{aligned}$$

3.2.2.2 - si  $r_{22} = r_{33} = 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= 0, \\ \eta &= \pi\sqrt{2}/2, \\ \zeta &= -\pi\sqrt{2}/2,\end{aligned}$$

3.2.2.3 - si  $r_{33} = r_{11} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= -\pi\sqrt{6}/6, \\ \eta &= \pi\sqrt{6}/3, \\ \zeta &= -\pi\sqrt{6}/6,\end{aligned}$$

3.2.2.4 - si  $r_{33} = r_{11} = 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= -\pi\sqrt{2}/2, \\ \eta &= 0, \\ \zeta &= \pi\sqrt{2}/2,\end{aligned}$$

3.2.2.5 - si  $r_{11} = r_{22} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= -\pi\sqrt{6}/6, \\ \eta &= -\pi\sqrt{6}/6, \\ \zeta &= \pi\sqrt{6}/3,\end{aligned}$$

3.2.2.6 - Si  $r_{11} = r_{22} = 0$  :

$$\begin{aligned}\xi &= \pi\sqrt{2}/2, \\ \eta &= -\pi\sqrt{2}/2, \\ \zeta &= 0.\end{aligned}$$

### 4.1.3 Calcul de $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connais- sant $\xi, \eta, \zeta$ )

D'après 3.5.1 :

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ |\varepsilon| &= \sqrt{\varepsilon^2}, \\ \chi &= |\varepsilon| \cot g(|\varepsilon|/2), \\ v &= (2 - \chi)(\xi\omega_x + \eta\omega_y + \zeta\omega_z)/\varepsilon^2, \\ \dot{\xi} &= (\chi\omega_x + v\xi + \zeta\omega_y - \eta\omega_z)/2, \\ \dot{\eta} &= (\chi\omega_y + v\eta - \zeta\omega_x + \xi\omega_z)/2, \\ \dot{\zeta} &= (\chi\omega_z + v\zeta + \eta\omega_x - \xi\omega_y)/2.\end{aligned}$$

### 4.1.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ (connai- sant $\xi, \eta, \zeta$ )

D'après 3.4.1 :

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ |\varepsilon| &= \sqrt{\varepsilon^2}, \\ C &= \cos|\varepsilon|, \\ |S| &= \sin|\varepsilon|, \\ \Gamma &= (1 - C)/\varepsilon^2, \\ \Sigma &= |S|/|\varepsilon|, \\ M &= (1 - \Sigma)(\xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} + \zeta\dot{\zeta})/\varepsilon^2, \\ \omega_x &= M\xi + \Sigma\dot{\xi} + \Gamma(-\zeta\dot{\eta} + \eta\dot{\zeta}), \\ \omega_y &= M\eta + \Sigma\dot{\eta} + \Gamma(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta}), \\ \omega_z &= M\zeta + \Sigma\dot{\zeta} + \Gamma(-\eta\dot{\xi} + \xi\dot{\eta}).\end{aligned}$$

## 4.2 Paramètres de la rotation finie $u, v, w$

On peut également définir l'orientation de la base  $\mathcal{B}'$ , par rapport à la base  $\mathcal{B}$ , grâce aux composantes du vecteur  $\underline{t}$ .

On pose, pour simplifier les notations :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}.$$

Ces composantes sont appelées *paramètres de la rotation finie*; elles sont telles que :

$$\begin{aligned}
-\infty < u < \infty, \\
-\infty < v < \infty, \\
-\infty < w < \infty,
\end{aligned}$$

et ont l'avantage d'être au nombre minimum de trois.

Le triplet  $(u, v, w)$  appartient à une partie  $\mathcal{D}_t$  de  $\mathbb{R}^3$ .

#### 4.2.1 Calcul de $R$ en fonction de $u, v, w$

D'après 3.2.2 et 3.2.4 :

$$c^2 = 1/(1 + u^2 + v^2 + w^2),$$

$$\begin{pmatrix}
c^2(1 + u^2 - v^2 - w^2) & (2c^2)(uv - w) & (2c^2)(uw + v) \\
(2c^2)(uv + w) & c^2(1 - u^2 + v^2 - w^2) & (2c^2)(vw - u) \\
(2c^2)(uw - v) & (2c^2)(vw + u) & c^2(1 - u^2 - v^2 + w^2)
\end{pmatrix}.$$

#### 4.2.2 Calcul de $u, v, w$ en fonction de $R$

Rappel :

$$\varsigma = r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1.$$

Si  $\varsigma \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
\varsigma^{-1} &= 1/\varsigma, \\
u &= \varsigma^{-1}(r_{32} - r_{23}), \\
v &= \varsigma^{-1}(r_{13} - r_{31}), \\
w &= \varsigma^{-1}(r_{21} - r_{12}).
\end{aligned}$$

Si  $\varsigma = 0$  :

le calcul de  $u, v, w$  est indéterminé.

#### 4.2.3 Calcul de $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaisant $u, v, w$ )

D'après 3.5.2 :

$$\begin{aligned}
\kappa &= u\omega_x + v\omega_y + w\omega_z, \\
\dot{u} &= (\omega_x + \kappa u + w\omega_y - v\omega_z)/2, \\
\dot{v} &= (\omega_y + \kappa v - w\omega_x + u\omega_z)/2, \\
\dot{w} &= (\omega_z + \kappa w + v\omega_x - u\omega_y)/2.
\end{aligned}$$



#### 4.2.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ (connais- sant $u, v, w$ )

D'après 3.4.2 :

$$\begin{aligned}2c^2 &= 2/(1 + u^2 + v^2 + w^2), \\ \omega_x &= (2c^2)(\dot{u} - w\dot{v} + v\dot{w}), \\ \omega_y &= (2c^2)(\dot{v} + w\dot{u} - u\dot{w}), \\ \omega_z &= (2c^2)(\dot{w} - v\dot{u} + u\dot{v}).\end{aligned}$$

### 4.3 Paramètres d'Euler complets $c, p, q, r$

Les paramètres de la rotation finie présentent le défaut de nécessiter une division pour le calcul de la matrice  $R$ . Ce défaut peut être évité en les homogénéisant pour obtenir les *paramètres d'Euler* (ou de Rodrigues ou de Rodrigues-Hamilton). Il faut noter toutefois que le nombre de paramètres est incrémenté d'une unité et qu'en conséquence une relation de dépendance entre ces paramètres apparaît. Nous montrerons que ces derniers peuvent également être considérés comme les composantes d'un quaternion unitaire (Cf. 9.2).

Les paramètres d'Euler sont alors :  $c$ , et les composantes du vecteur  $\underline{s}$ .

On pose, pour simplifier les notations :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix}.$$

En raison de la plage de variation choisie pour la rotation  $\varepsilon$  ( $-\pi < \varepsilon \leq \pi$ ) le premier paramètre d'Euler  $c$  est toujours positif ou nul.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}0 &\leq c, \\ -1 &< p \leq 1, \\ -1 &< q \leq 1, \\ -1 &< r \leq 1.\end{aligned}$$

Ces paramètres ont l'inconvénient d'être au nombre de quatre ; la relation de dépendance entre eux est :

$$c^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 1.$$

### 4.3.1 Calcul de $R$ en fonction de $c, p, q, r$

D'après 3.2.3 et 3.2.4 :

$$R = \begin{pmatrix} c^2 + p^2 - q^2 - r^2 & 2(pq - cr) & 2(pr + cq) \\ 2(pq + cr) & c^2 - p^2 + q^2 - r^2 & 2(qr - cp) \\ 2(pr - cq) & 2(qr + cp) & c^2 - p^2 - q^2 + r^2 \end{pmatrix}.$$

### 4.3.2 Calcul de $c, p, q, r$ en fonction de $R$

Rappel :

$$\varsigma = r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1.$$

$$c = \sqrt{\varsigma}/2.$$

1 - Si  $\varsigma \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= (r_{32} - r_{23})/(4c), \\ q &= (r_{13} - r_{31})/(4c), \\ r &= (r_{21} - r_{12})/(4c). \end{aligned}$$

2 - Si  $\varsigma = 0$  :

2.1 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= (\text{sign}(r_{11} + r_{12} + r_{13} + 1))\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\ q &= (\text{sign}(r_{21} + r_{22} + r_{23} + 1))\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\ r &= (\text{sign}(r_{31} + r_{32} + r_{33} + 1))\sqrt{(1 + r_{33})/2}, \end{aligned}$$

2.2 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 = 0$  :

2.2.1 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{32})\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\ q &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{13})\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\ r &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{21})\sqrt{(1 + r_{33})/2}, \end{aligned}$$

2.2.2 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) = 0$  :

2.2.2.1 - si  $r_{22} = r_{33} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{6}/3, \\ q &= -\sqrt{6}/6, \\ r &= -\sqrt{6}/6, \end{aligned}$$

2.2.2.2 - si  $r_{22} = r_{33} = 0$  :

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ q &= \sqrt{2}/2, \\ r &= -\sqrt{2}/2, \end{aligned}$$

2.2.2.3 - si  $r_{33} = r_{11} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{6}/6, \\ q &= \sqrt{6}/3, \\ r &= -\sqrt{6}/6, \end{aligned}$$

2.2.2.4 - si  $r_{33} = r_{11} = 0$  :

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{2}/2, \\ q &= 0, \\ r &= \sqrt{2}/2, \end{aligned}$$

2.2.2.5 - si  $r_{11} = r_{22} \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= -\sqrt{6}/6, \\ q &= -\sqrt{6}/6, \\ r &= \sqrt{6}/3, \end{aligned}$$

2.2.2.6 - si  $r_{11} = r_{22} = 0$  :

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2}/2, \\ q &= -\sqrt{2}/2, \\ r &= 0. \end{aligned}$$

### 4.3.3 Calcul de $\dot{c}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connais- sant $c, p, q, r$ )

D'après 3.5.3 :

$$\begin{aligned} \dot{c} &= (-p\omega_x - q\omega_y - r\omega_z)/2, \\ \dot{p} &= (c\omega_x + r\omega_y - q\omega_z)/2, \\ \dot{q} &= (c\omega_y - r\omega_x + p\omega_z)/2, \\ \dot{r} &= (c\omega_z + q\omega_x - p\omega_y)/2. \end{aligned}$$

### 4.3.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{c}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ (connais- sant $c, p, q, r$ )

D'après 3.4.3 :

$$\begin{aligned} \omega_x &= 2(-p\dot{c} + c\dot{p} - r\dot{q} + q\dot{r}), \\ \omega_y &= 2(-q\dot{c} + c\dot{q} + r\dot{p} - p\dot{r}), \\ \omega_z &= 2(-r\dot{c} + c\dot{r} - q\dot{p} + p\dot{q}). \end{aligned}$$

## 4.4 Paramètres d'Euler incomplets $p, q, r$

On peut éliminer la redondance qui existe entre les paramètres d'Euler en n'utilisant que les trois derniers  $p, q, r$  dénommés pour cette raison *paramètres d'Euler incomplets*. En effet le premier paramètre d'Euler  $c$  est toujours positif ou nul, et par conséquent  $c$  se déduit de  $p, q, r$  :

$$c = \sqrt{1 - p^2 - q^2 - r^2}.$$

Ces paramètres sont tels que :

$$\begin{aligned} -1 < p &\leq 1, \\ -1 < q &\leq 1, \\ -1 < r &\leq 1, \end{aligned}$$

et ont l'avantage d'être au nombre minimum de trois.

Le triplet  $(p, q, r)$  appartient à une partie  $\mathcal{D}_s$  de la boule  $B(O, 1)$  de centre  $O$  et de rayon 1.

### 4.4.1 Calcul de $R$ en fonction de $p, q, r$

D'après 3.2.3 et 3.2.4 :

$$c = \sqrt{1 - p^2 - q^2 - r^2},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2(q^2 + r^2) & 2(pq - cr) & 2(pr + cq) \\ 2(pq + cr) & 1 - 2(r^2 + p^2) & 2(qr - cp) \\ 2(pr - cq) & 2(qr + cp) & 1 - 2(p^2 + q^2) \end{pmatrix}.$$

### 4.4.2 Calcul de $p, q, r$ en fonction de $R$

Rappel :

$$\varsigma = r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1.$$

1 - Si  $\varsigma \neq 0$  :

$$\begin{aligned} p &= (r_{32} - r_{23}) / (2\sqrt{\varsigma}), \\ q &= (r_{13} - r_{31}) / (2\sqrt{\varsigma}), \\ r &= (r_{21} - r_{12}) / (2\sqrt{\varsigma}). \end{aligned}$$

2 - Si  $\varsigma = 0$  :

2.1 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= (\text{sign}(r_{11} + r_{12} + r_{13} + 1))\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\
q &= (\text{sign}(r_{21} + r_{22} + r_{23} + 1))\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\
r &= (\text{sign}(r_{31} + r_{32} + r_{33} + 1))\sqrt{(1 + r_{33})/2},
\end{aligned}$$

2.2 - si  $r_{32} + r_{13} + r_{21} + 1 = 0$  :

2.2.1 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{32})\sqrt{(1 + r_{11})/2}, \\
q &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{13})\sqrt{(1 + r_{22})/2}, \\
r &= -(\text{sign}(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22})r_{21})\sqrt{(1 + r_{33})/2},
\end{aligned}$$

2.2.2 - si  $(r_{22} - r_{33})(r_{33} - r_{11})(r_{11} - r_{22}) = 0$  :

2.2.2.1 - si  $r_{22} = r_{33} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{6}/3, \\
q &= -\sqrt{6}/6, \\
r &= -\sqrt{6}/6,
\end{aligned}$$

2.2.2.2 - si  $r_{22} = r_{33} = 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= 0, \\
q &= \sqrt{2}/2, \\
r &= -\sqrt{2}/2,
\end{aligned}$$

2.2.2.3 - si  $r_{33} = r_{11} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= -\sqrt{6}/6, \\
q &= \sqrt{6}/3, \\
r &= -\sqrt{6}/6,
\end{aligned}$$

2.2.2.4 - si  $r_{33} = r_{11} = 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= \text{sqrt}2/2, \\
q &= 0, \\
r &= \sqrt{2}/2,
\end{aligned}$$

2.2.2.5 - si  $r_{11} = r_{22} \neq 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= -\sqrt{6}/6, \\
q &= -\sqrt{6}/6, \\
r &= \sqrt{6}/3,
\end{aligned}$$

2.2.2.6 - si  $r_{11} = r_{22} = 0$  :

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{2}/2, \\
q &= -\sqrt{2}/2, \\
r &= 0.
\end{aligned}$$

**4.4.3 Calcul de  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  en fonction de  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (connais-  
sant  $p, q, r$ )**

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{1 - p^2 - q^2 - r^2}, \\ \dot{p} &= (c\omega_x + r\omega_y - q\omega_z)/2, \\ \dot{q} &= (-r\omega_x + c\omega_y + p\omega_z)/2, \\ \dot{r} &= (q\omega_x - p\omega_y + c\omega_z)/2.\end{aligned}$$

**4.4.4 Calcul de  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  en fonction de  $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$  (connais-  
sant  $p, q, r$ )**

$$\begin{aligned}c &= \sqrt{1 - p^2 - q^2 - r^2}, \\ \dot{c} &= -(p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r})/c, \\ \omega_x &= 2(-p\dot{c} + c\dot{p} - r\dot{q} + q\dot{r}), \\ \omega_y &= 2(-q\dot{c} + c\dot{q} + r\dot{p} - p\dot{r}), \\ \omega_z &= 2(-r\dot{c} + c\dot{r} - q\dot{p} + p\dot{q}).\end{aligned}$$



# Chapitre 5

## Deuxième ensemble de paramètres d'orientation

### 5.1 Angles de Bryant

Supposons que  $\mathcal{B} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $\mathcal{B}_\nu = (\underline{x}_\nu, \underline{y}_\nu, \underline{z}_\nu)$  soient deux bases orthonormées directes liées respectivement à l'espace et au corps ; la base  $\mathcal{B}_\nu$  s'identifiant à la base  $\mathcal{B}'$  précédente.

Les *angles de Bryant* (ou angles de Cardan ou angles d'Euler-Krylov) correspondent aux trois rotations successives (cf. Figure 3) :

- \*  $\lambda$  autour du vecteur unitaire  $\underline{x}$ ,
- \*  $\mu$  autour du nouveau vecteur unitaire  $\underline{y}_\lambda$  déduit du vecteur unitaire  $\underline{y}$ ,
- \*  $\nu$  autour du nouveau vecteur unitaire  $\underline{z}_\mu$  déduit du vecteur unitaire  $\underline{z}_\lambda$ .

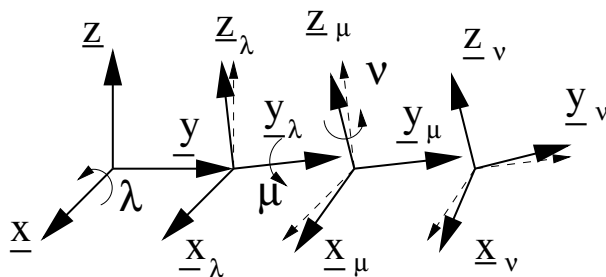


Figure 3 : définition des angles de Bryant.

Les angles de Bryant sont choisis de telle manière que :

$$\begin{aligned} -\pi &< \lambda \leq \pi, \\ -\pi/2 &\leq \mu \leq \pi/2, \\ -\pi &< \nu \leq \pi, \end{aligned}$$



et ont l'avantage d'être au nombre minimum de trois.

Les calculs qui suivent, et qui concernent les dérivées des angles de Bryant et les composantes du vecteur vitesse angulaire, proviennent de la propriété d'addition bien connue des vecteurs vitesses angulaires [4] [5] [6] :

$$\underline{\omega} = \dot{\lambda}\underline{x} + \dot{\mu}\underline{y}_\lambda + \dot{\nu}\underline{z}_\mu.$$

### 5.1.1 Calcul de $R$ en fonction de $\lambda, \mu, \nu$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\mu\cos\nu & -\cos\mu\sin\nu & \sin\mu \\ \sin\lambda\sin\mu\cos\nu + \cos\lambda\sin\nu & -\sin\lambda\sin\mu\sin\nu + \cos\lambda\cos\nu & -\sin\lambda\cos\mu \\ -\cos\lambda\sin\mu\cos\nu + \sin\lambda\sin\nu & \cos\lambda\sin\mu\sin\nu + \sin\lambda\cos\nu & \cos\lambda\cos\mu \end{pmatrix}.$$

### 5.1.2 Calcul de $\lambda, \mu, \nu$ en fonction de $R$

Si  $r_{13} \neq_{\pm} 1$  :

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{Arc tg}2(-r_{23}, r_{33})^1, \\ \mu &= \text{Arc sin}r_{13}^2, \\ \nu &= \text{Arc tg}2(-r_{12}, r_{11}). \end{aligned}$$

Si  $r_{13} =_{\pm} 1$  :

$$\begin{aligned} \mu &= \pi r_{13}/2, \\ r_{13}\lambda + \nu &= \text{Arc tg}2(r_{21}, r_{22}), \end{aligned}$$

(les valeurs de  $\lambda$  et  $\nu$  sont indéterminées).

### 5.1.3 Calcul de $\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connais- sant $\lambda, \mu, \nu$ )

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \omega_y\cos\lambda + \omega_z\sin\lambda, \\ \dot{\nu} &= (-\omega_y\sin\lambda + \omega_z\cos\lambda)/\cos\mu, \\ \dot{\lambda} &= \omega_x - \dot{\nu}\sin\mu. \end{aligned}$$

---

1. la fonction  $\text{Arc tg}2(y,x)$  définit un angle appartenant à l'intervalle  $] -\pi, \pi[$  dont le sinus et le cosinus sont respectivement proportionnels à  $y$  et  $x$ , la constante de proportionnalité étant strictement positive

2. la fonction  $\text{Arc sin}x$  définit un angle  $x$  dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$

### 5.1.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\lambda}, \dot{\mu}, \dot{\nu}$ (connais- sant $\lambda, \mu, \nu$ )

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\lambda} + \dot{\nu} \sin \mu, \\ \omega_y &= \dot{\mu} \cos \lambda - \dot{\nu} \sin \lambda \cos \mu, \\ \omega_z &= \dot{\mu} \sin \lambda + \dot{\nu} \cos \lambda \cos \mu.\end{aligned}$$

## 5.2 Angles de d'Euler classiques

Supposons que  $\mathcal{B} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  et  $\mathcal{B}_\varphi = (\underline{x}_\varphi, \underline{y}_\varphi, \underline{z}_\varphi)$  soient deux bases orthonormées directes liées respectivement à l'espace et au corps ; la base  $\mathcal{B}_\varphi$  s'identifiant à la base  $\mathcal{B}'$  précédente.

Les *angles d'Euler classiques* correspondent aux trois rotations successives (cf. Figure 4) :

- \*  $\psi$  autour du vecteur unitaire  $\underline{z}$ ,
- \*  $\theta$  autour du nouveau vecteur unitaire  $\underline{x}_\psi$  déduit du vecteur unitaire  $\underline{x}$ ,
- \*  $\varphi$  autour du nouveau vecteur unitaire  $\underline{z}_\theta$  déduit du vecteur unitaire  $\underline{z}_\psi$ .

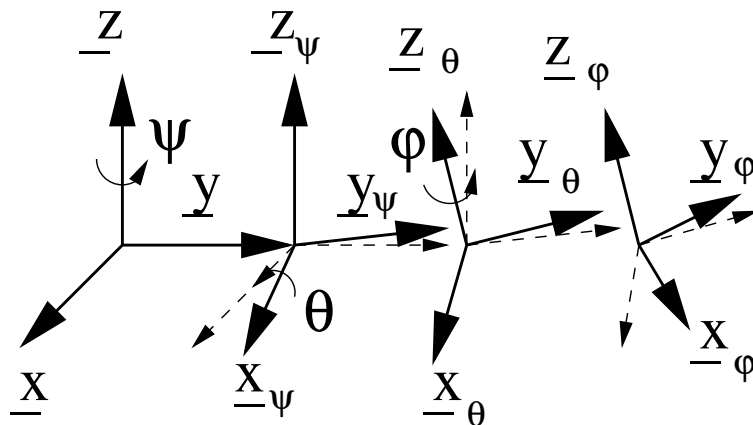


Figure 4 : définition des angles d'Euler.

Ces angles sont appelés respectivement *précession* ( $\psi$ ), *nutaton* ( $\theta$ ) et *rotation propre* ( $\varphi$ ), et le support du vecteur  $\underline{x}_\psi$  *ligne des noeuds* ou *ligne nodale*.

Les angles d'Euler sont choisis de telle manière que :

$$\begin{aligned}-\pi &< \psi \leq \pi, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ -\pi &< \varphi \leq \pi,\end{aligned}$$

et ont l'avantage d'être au nombre minimum de trois.

Les calculs qui suivent, et qui concernent les dérivées des angles d'Euler et les composantes du vecteur vitesse angulaire, proviennent de la propriété d'addition bien connue des vecteurs vitesses angulaires [4] [5] [6] :

$$\underline{\omega} = \dot{\psi}\underline{z} + \dot{\theta}\underline{x}_\psi + \dot{\varphi}\underline{z}_\theta.$$

### 5.2.1 Calcul de $R$ en fonction de $\psi, \theta, \varphi$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

### 5.2.2 Calcul de $\psi, \theta, \varphi$ en fonction de $R$

Si  $r_{33} \neq_{\pm} 1$  :

$$\begin{aligned} \psi &= \text{Arc tg}2(r_{13}, -r_{23}), \\ \theta &= \text{Arc cos}r_{33}, \\ \varphi &= \text{Arc tg}2(r_{31}, r_{32}). \end{aligned}$$

Si  $r_{33} =_{\pm} 1$  :

$$\begin{aligned} \theta &= \pi(1 - r_{33})/2, \\ \psi + r_{33}\varphi &= \text{Arc tg}2(r_{21}, r_{11}), \end{aligned}$$

(les valeurs de  $\psi$  et  $\varphi$  sont indéterminées).

### 5.2.3 Calcul de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connais-sant $\psi, \theta, \varphi$ )

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_x\cos\psi + \omega_y\sin\psi, \\ \dot{\varphi} &= (\omega_x\sin\psi - \omega_y\cos\psi)/\sin\theta, \\ \dot{\psi} &= \omega_z - \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned}$$

### 5.2.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ (connais-sant $\psi, \theta, \varphi$ )

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta, \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned}$$

### 5.2.5 Comparaison des notations selon les auteurs

Les angles d'Euler classiques que nous avons utilisés correspondent à trois rotations successives :  $\psi$  autour du vecteur  $\underline{z}$  puis  $\theta$  autour du nouveau vecteur  $\underline{x}_\psi$  et enfin  $\varphi$  autour du nouveau vecteur  $\underline{z}_\theta$  ce que nous notons plus simplement et conventionnellement :

$$\underline{z}(\psi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\varphi).$$

D'autres auteurs ont utilisés ces angles d'Euler classiques (souvent en les dénommant tout simplement angles d'Euler) mais avec d'autres notations ; nous indiquons dans le tableau ci-après quelques exemples que l'on trouve dans la littérature.

auteur	rotations successives et noms utilisés
[1] [4] [17]	$\underline{z}(\psi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\varphi)$
[3]	$\underline{z}(\psi) \underline{x}(\vartheta) \underline{z}(\varphi)$
[11]	$\underline{z}(\psi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\phi)$
[5] [12] [15]	$\underline{z}(\varphi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\psi)$
[25]	$\underline{z}(\phi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\psi)$
[2]	$\underline{z}(\phi + \pi/2) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\psi - \pi/2)$

### 5.3 Angles d'Euler non classiques

Toutes les rotations, autour de trois axes indépendants, font intervenir des *angles d'Euler non classiques*. Seules les rotations :

$$\underline{z}(\psi) \underline{x}(\theta) \underline{z}(\varphi),$$

font intervenir les angles d'Euler classiques. En ce sens les angles de Bryant sont des angles d'Euler non classiques. Ils correspondent aux rotations :

$$\underline{x}(\lambda) \underline{y}(\mu) \underline{z}(\nu).$$

Nous avons cependant distingués les angles de Bryant des autres angles d'Euler non classiques car ils sont très utilisés et très souvent avec la même définition par les différents auteurs.

Il n'en est pas de même des autres angles d'Euler non classiques, pour lesquels les définitions et les dénominations varient malheureusement très largement selon les auteurs et selon les domaines d'utilisation (aéronautique, nautique, astronomie, etc).

Nous citons ci-après quelques définitions en faisant référence aux auteurs qui les utilisent.

auteurs	nom des angles	rotations sucessives et noms utilisés
[17]	Bryant	$\underline{x}(\lambda) \underline{y}(\mu) \underline{z}(\nu)$
[3]	Cardan	$\underline{x}(\alpha) \underline{y}(\beta) \underline{z}(\varphi)$
[11]	Bryant ou Cardan	$\underline{x}(\phi_1) \underline{y}(\phi_2) \underline{z}(\phi_3)$
[14]	“Roll,Pitch,Yaw”	$\underline{x}(\psi : Yaw) \underline{y}(\theta : Pitch) \underline{z}(\phi : Roll)$
[21]	“roll,pitch,yaw”	$\underline{x}(\gamma : roll) \underline{y}(\beta : pitch) \underline{z}(\alpha : yaw)$
[18]	Euler-Krylov	$\underline{x}(\alpha) \underline{y}(\beta) \underline{z}(\gamma)$
[14]	Euler	$\underline{z}(\phi) \underline{y}(\theta) \underline{z}(\psi)$
[21]	Euler( $\underline{z}, \underline{y}, \underline{z}$ )	$\underline{z}(\alpha) \underline{y}(\beta) \underline{z}(\gamma)$
[21]	Euler( $\underline{z}, \underline{y}, \underline{x}$ )	$\underline{z}(\alpha) \underline{y}(\beta) \underline{x}(\gamma)$
[25]	Roulis-Tangage-Lacet	$\underline{z}(\phi : Roulis) \underline{y}(\theta : Tangage) \underline{x}(\psi : Lacet)$
[3]	aéronautiques	$\underline{y}(\psi : lacet) \underline{z}(\vartheta : tangage) \underline{x}(\varphi : roulis)$
[3]	nautiques	$\underline{y}(\psi : tangage) \underline{x}(\vartheta : roulis) \underline{z}(\varphi : embarde'e)$

Nous donnons ci-après les définitions plus précises des angles aéronautiques et nautiques de Lur'é [3].

### 5.3.1 Angles aéronautiques [3]

Ces angles sont définis sur la Figure 5.

Avec les notations utilisées par Lur'é (Cf. ci-devant) :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi & \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi & -\sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

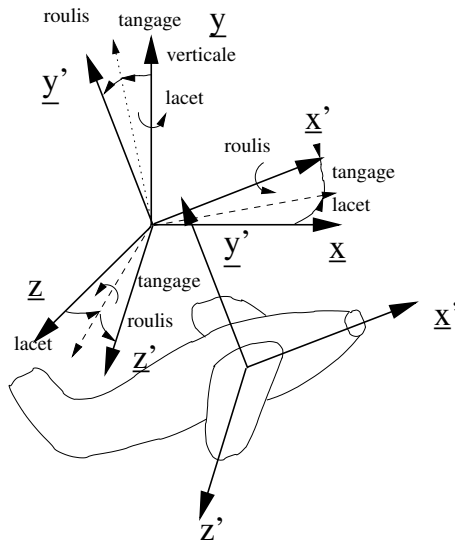


Figure 5 : angles aéronautiques.

### 5.3.2 Angles nautiques [3]

Ces angles sont définis sur la Figure 6.

Avec les notations de Lur'é (Cf. ci-devant) :

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\psi\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

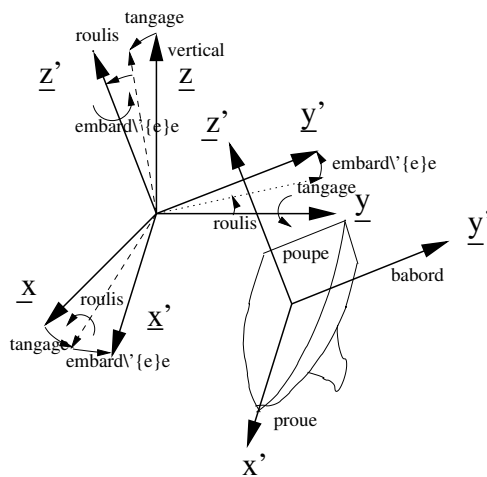


Figure 6 : angles nautiques.



# Chapitre 6

## Troisième ensemble de paramètres d'orientation

### 6.1 Cosinus directeurs complets

$$x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$$

Les *cosinus directeurs complets* sont les composantes, dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ , des vecteurs  $\underline{x}'$ ,  $\underline{y}'$  et  $\underline{z}'$  de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ . Il s'agit par conséquent des éléments de la matrice  $R$  considérés en colonne. On peut également considérer que ce sont les composantes, dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ , des vecteurs  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  et  $\underline{z}$  de l'ancienne base  $\mathcal{B}$ . Il s'agit alors des éléments de la matrice  $R$  considérés en ligne. Ces paramètres ont tous un module inférieur ou égal à un mais ont le grand inconvénient d'être au nombre prohibitif de neuf. Il existe de très nombreuses relations de dépendance entre ces neuf paramètres, dues au fait que la matrice de ces paramètres est orthogonale.

#### 6.1.1 Calcul de $R$ en fonction de $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$

$$\begin{aligned} r_{11} &= x'_x, r_{12} = y'_x, r_{13} = z'_x, \\ r_{21} &= x'_y, r_{22} = y'_y, r_{23} = z'_y, \\ r_{31} &= x'_z, r_{32} = y'_z, r_{33} = z'_z. \end{aligned}$$

#### 6.1.2 Calcul de $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ en fonction de $R$

$$\begin{aligned} x'_x &= r_{11}, y'_x = r_{12}, z'_x = r_{13}, \\ x'_y &= r_{21}, y'_y = r_{22}, z'_y = r_{23}, \\ x'_z &= r_{31}, y'_z = r_{32}, z'_z = r_{33}. \end{aligned}$$



### 6.1.3 Calcul de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{y}'_x, \dot{y}'_y, \dot{y}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ )

D'après la formule de la base mobile [4] [5] [6] :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}' &= \underline{\omega} \times \underline{x}', \\ \dot{\underline{y}}' &= \underline{\omega} \times \underline{y}', \\ \dot{\underline{z}}' &= \underline{\omega} \times \underline{z}'.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\dot{x}'_x &= x'_z \omega_y - x'_y \omega_z, \dot{y}'_x = y'_z \omega_y - y'_y \omega_z, \dot{z}'_x = z'_z \omega_y - z'_y \omega_z, \\ \dot{x}'_y &= -x'_z \omega_x + x'_x \omega_z, \dot{y}'_y = -y'_z \omega_x + y'_x \omega_z, \dot{z}'_y = -z'_z \omega_x + z'_x \omega_z, \\ \dot{x}'_z &= x'_y \omega_x - x'_x \omega_y, \dot{y}'_z = y'_y \omega_x - y'_x \omega_y, \dot{z}'_z = z'_y \omega_x - z'_x \omega_y.\end{aligned}$$

### 6.1.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{y}'_x, \dot{y}'_y, \dot{y}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; y'_x, y'_y, y'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ )

L'inversion des trois relations précédentes, qui proviennent de la formule de la base mobile conduit à :

$$\underline{\omega} = (\underline{x}' \times \dot{\underline{x}}' + \underline{y}' \times \dot{\underline{y}}' + \underline{z}' \times \dot{\underline{z}}')/2.$$

Il y a cependant plus simple pour calculer les composantes du vecteur  $\underline{\omega}$ . En effet d'après 3.2.4 et 3.4 :

$$\hat{\omega}_{(B)} = \dot{R}R^{-1} = \dot{R}R^T,$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}\omega_x &= x'_y \dot{x}'_z + y'_y \dot{y}'_z + z'_y \dot{z}'_z, \\ \omega_y &= x'_z \dot{x}'_x + y'_z \dot{y}'_x + z'_z \dot{z}'_x, \\ \omega_z &= x'_x \dot{x}'_y + y'_x \dot{y}'_y + z'_x \dot{z}'_y,\end{aligned}$$

(il existe trois autres formules équivalentes).

## 6.2 Cosinus directeurs incomplets

$$x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$$

Les cosinus directeurs complets ont le grand inconvénient d'être au nombre prohibitif de neuf. On peut réduire la redondance existant entre ces paramètres en n'en considérant que six d'entre eux<sup>1</sup>. On obtient alors les *cosinus*

1. il est difficile d'aller au delà

*directeurs incomplets.* Nous avons choisi ici ceux qui représentent les coordonnées, dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ , des vecteurs  $\underline{x}'$  et  $\underline{z}'$  de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  (mais bien entendu d'autres choix sont possibles). On peut remarquer que les cosinus directeurs manquants s'expriment de manière très simple en fonction de ceux qui ont été retenus :

$$\begin{aligned} y'_x &= -z'_z x'_y + z'_y x'_z, \\ y'_y &= z'_z x'_x - z'_x x'_z, \\ y'_z &= -z'_y x'_x + z'_x x'_y. \end{aligned}$$

Ces paramètres ont tous un module inférieur à un. Ils ont encore le grand inconvénient d'être au nombre surabondant de six. Il existe toujours de nombreuses relations de dépendance entre ces six paramètres, dues au fait que la matrice  $R$  est orthogonale.

### 6.2.1 Calcul de $R$ en fonction de $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$

$$\begin{aligned} r_{11} &= x'_x, r_{12} = -z'_z x'_y + z'_y x'_z, r_{13} = z'_x, \\ r_{21} &= x'_y, r_{22} = z'_z x'_x - z'_x x'_z, r_{23} = z'_y, \\ r_{31} &= x'_z, r_{32} = -z'_y x'_x + z'_x x'_y, r_{33} = z'_z. \end{aligned}$$

### 6.2.2 Calcul de $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ en fonction de $R$

$$\begin{aligned} x'_x &= r_{11}, z'_x = r_{13}, \\ x'_y &= r_{21}, z'_y = r_{23}, \\ x'_z &= r_{31}, z'_z = r_{33}. \end{aligned}$$

### 6.2.3 Calcul de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ en fonction de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}'_x &= x'_z \omega_y - x'_y \omega_z, \dot{z}'_x = z'_z \omega_y - z'_y \omega_z, \\ \dot{x}'_y &= -x'_z \omega_x + x'_x \omega_z, \dot{z}'_y = -z'_z \omega_x + z'_x \omega_z, \\ \dot{x}'_z &= x'_y \omega_x - x'_x \omega_y, \dot{z}'_z = z'_y \omega_x - z'_x \omega_y. \end{aligned}$$

### 6.2.4 Calcul de $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en fonction de $\dot{x}'_x, \dot{x}'_y, \dot{x}'_z; \dot{z}'_x, \dot{z}'_y, \dot{z}'_z$ (connaissant $x'_x, x'_y, x'_z; z'_x, z'_y, z'_z$ )

Un calcul possible est le suivant :

$$\begin{aligned}
y'_x &= -z'_z x'_y + z'_y x'_z, \\
y'_y &= z'_z x'_x - z'_x x'_z, \\
y'_z &= -z'_y x'_x + z'_x x'_y, \\
k &= y'_x \dot{x}'_x + y'_y \dot{x}'_y + y'_z \dot{x}'_z, \\
\omega_x &= -z'_z \dot{z}'_y + z'_y \dot{z}'_z + k z'_x, \\
\omega_y &= z'_z \dot{z}'_x - z'_x \dot{z}'_z + k z'_y, \\
\omega_z &= -z'_y \dot{z}'_x + z'_x \dot{z}'_y + k z'_z.
\end{aligned}$$

# Chapitre 7

## Quatrième ensemble de paramètres d'orientation

### 7.1 Paramètres de Cayley-Klein [3] [18]

La définition et le nombre de paramètres de Cayley-Klein varient selon les auteurs. Pour Lur'é il s'agit des quatre paramètres complexes suivants ( $i^2 = -1$ ) :

$$\alpha = c + ir, \beta = -q + ip, \gamma = q + ip, \delta = c - ir,$$

alors que pour Ishlinsky il s'agit des paramètres complexes suivants ( $i^2 = -1$ ) :

$$p + iq, c + ir.$$

Retenons la définition de Lur'é ; les paramètres vérifient alors les relations de redondance suivantes :

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1. \end{aligned}$$

L'intérêt des paramètres de Cayley-Klein est de définir l'orientation de la base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  à l'aide d'une matrice d'ordre 2 seulement (mais, il est vrai, complexe) ; la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$



## Chapitre 8

# Relations entre les paramètres et les angles d'Euler

Il est aisé d'établir que :

$$\begin{aligned}c &= \cos(\theta/2)\cos((\psi + \varphi)/2), \\p &= \sin(\theta/2)\cos((\psi - \varphi)/2), \\q &= \sin(\theta/2)\sin((\psi - \varphi)/2), \\r &= \cos(\theta/2)\sin((\psi + \varphi)/2).\end{aligned}$$



# Chapitre 9

## Composition des orientations

Le but de cette partie est de définir l'orientation d'une base  $\mathcal{B}''$  par rapport à une base  $\mathcal{B}$  connaissant son orientation par rapport à une autre base  $\mathcal{B}'$  et l'orientation de cette base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

### 9.1 Utilisation des matrices de passage

Soient  $R$  et  $R'$  les matrices de passage respectivement de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}''$ .

Etant donné que :

$$v_{(\mathcal{B})} = Rv_{(\mathcal{B}')} ,$$

et :

$$v_{(\mathcal{B}')} = R'v_{(\mathcal{B}'')} ,$$

pour tout vecteur  $\underline{v}$ , on peut écrire :

$$v_{(\mathcal{B})} = RR'v_{(\mathcal{B}'')} .$$

La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}''$  est par conséquent la matrice produit  $RR'$  qui définit donc l'orientation de cette base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ . Comme les matrices de passage s'expriment en fonction des différents paramètres d'orientation on en déduit les paramètres d'orientation de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  connaissant ceux de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$  et ceux de la base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .



## 9.2 Utilisation des quaternions

La méthode précédente est maladroite lorsque les paramètres d'orientation utilisés sont les paramètres d'Euler. En effet ces paramètres peuvent être considérés comme les composantes d'un quaternion unitaire.

### Définition des quaternions [8] [10] [19] [20] [23] [24]

A tout quadruplet de nombres réels  $(c,p,q,r)$  on associe le quaternion :

$$h = c + ip + jq + kr,$$

( $c$  étant la partie scalaire et  $ip + jq + kr$  la partie vectorielle du quaternion).

Un quaternion dont la partie scalaire est nulle est appelé ternion.

L'ensemble des quaternions constitue un corps non commutatif pour lequel les opérations d'addition et de multiplication sont définies ci-après.

Soient  $h = c + ip + jq + kr$  et  $h' = c' + ip' + iq' + kr'$  deux quaternions.

L'addition est telle que :

$$h'' = h + h' = c'' + ip'' + jq'' + kr'' = (c + c') + i(p + p') + j(q + q') + k(r + r'),$$

et la multiplication :

$$h'' = hh' = c'' + ip'' + jq'' + kr'' = cc' - pp' - qq' - rr' + i(cp' + pc' + qr' - rq') + j(cq' - pr' + qc' + rp') + k(cr' + pq' - qp' + rc')$$

(pour multiplier il suffit de conserver l'ordre des facteurs et d'utiliser le fait que :  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  et :  $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ ).

De plus à tout quaternion  $h = c + ip + jq + kr$  on associe le quaternion conjugué  $\bar{h} = c - ip - jq - kr$ .

La norme d'un quaternion est la quantité réelle positive ou nulle :

$$|h| = \sqrt{h\bar{h}}.$$

Un quaternion est unitaire si et seulement si sa norme est égale à un.

Finalement nous associons à tout quaternion  $h$  une matrice carrée réelle d'ordre quatre  $M_h$ , dite matrice du quaternion, telle que :

$$M_h = \begin{pmatrix} c & -p & -q & -r \\ p & c & -r & q \\ q & r & c & -p \\ r & -q & p & c \end{pmatrix}.$$

On à :

$$M_{\bar{h}} = M_h^T.$$

Il est alors facile de démontrer que si le quaternion unitaire  $h$  représente l'orientation de la base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  (grâce aux paramètres d'Euler  $c, p, q, r$ ) et le quaternion unitaire  $h'$  celle de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$  (grâce aux paramètres d'Euler  $c', p', q', r'$ ) alors le quaternion unitaire  $h'' = hh'$  représente l'orientation de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  (grâce aux paramètres d'Euler  $c'', p'', q'', r''$  ayant les valeurs ci-devant).

Remarque : la composition des orientations, à l'aide des quaternions, ou des paramètres d'Euler, peut être écrite matriciellement :

$$\begin{pmatrix} c'' \\ p'' \\ q'' \\ r'' \end{pmatrix} = M_h \begin{pmatrix} c' \\ p' \\ q' \\ r' \end{pmatrix}.$$

De plus si le vecteur  $\underline{v}$  est représenté par le ternion  $v_{(\mathcal{B})}^* = iv_x + jv_y + kv_z$ , dans la base  $\mathcal{B}$ , et par le ternion  $v_{(\mathcal{B}')}^* = iv'_x + jv'_y + kv'_z$ , dans la base  $\mathcal{B}'$  on peut écrire :

$$v_{(\mathcal{B})}^* = hv_{(\mathcal{B}')}^* \bar{h},$$

dans l'ensemble des quaternions, ou :

$$M_{v_{(\mathcal{B})}^*} = M_h M_{v_{(\mathcal{B}')}^*} M_h^T,$$

dans l'ensemble des matrices.

### 9.3 Utilisation des paramètres de Cayley-Klein

L'intérêt des paramètres de Cayley-Klein est de pouvoir définir l'orientation de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ , grâce à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

à l'aide du produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

qui représentent respectivement l'orientation de la base  $\mathcal{B}'$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  et celle de la base  $\mathcal{B}''$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$ .

En effet :

$$\begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}.$$

# Chapitre 10

## Conclusion

Nous avons présenté dans cet article divers choix de paramètres permettant de définir l'orientation d'un corps par rapport à un espace.

Les difficultés que nous avons rencontrées à définir l'orientation proviennent du fait que celle-ci ne peut être définie à l'aide de trois paramètres (nombre minimal) que localement : le groupe  $SO(3)$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ .

Les divers choix que nous avons proposés présentent tous des avantages (nombre minimal de paramètres, facilité de composition des orientations) et des inconvénients (nombre non-minimal de paramètres, complexité de composition des orientations).

Nous pensons que le meilleur choix réside dans celui des paramètres d'Euler qui offrent un bon compromis entre une légère redondance (de un seulement) et une grande facilité de composition des orientations (qui provient du fait que ces paramètres sont les éléments d'un quaternion). Nous ne partageons pas la critique de ceux qui prétendent que les paramètres d'Euler "ne se voient pas" dans la mesure où, de toutes façons, l'homme ne visualise pas l'orientation d'un corps dans l'espace, excepté dans quelques cas très particuliers (comme par exemple celui d'une rotation autour d'un seul axe fixe).

A contrario nous pensons que tous les choix qui utilisent des angles (Euler, Bryant, etc) sont, en général, mauvais ; ces angles "ne se voient" pas plus que les paramètres d'Euler et conduisent toujours à des problèmes de singularités inextricables.

L'orientation étant déterminée par la matrice  $R$  du groupe  $SO(3)$  n'est définie que modulo  $2\pi$  autour de l'axe unitaire de rotation. Il est possible de généraliser les paramètres d'Euler pour tenir compte de rotations supérieures à  $2\pi$  ; il suffit pour cela de définir quatre paramètres (liés par une relation de dépendance) analogues aux paramètres d'Euler mais dans lesquels l'angle

$\varepsilon/2$  qui intervient est remplacé par un angle plus petit ( $\varepsilon/4$ ,  $\varepsilon/8$ , etc). Il faut noter que la composition des rotations est alors nettement compliquée.

Nous avons également indiqué dans cet article les relations qui unissent les dérivées de ces paramètres aux composantes de la vitesse angulaire du corps. Ces relations vérifient bien le fait qu'il n'existe malheureusement aucun choix de paramètres d'orientation dont les dérivées s'identifient aux composantes du vecteur vitesse angulaire. Il s'agit peut être de la raison profonde pour laquelle il est si difficile de définir l'orientation d'un corps.

# Bibliographie

- [1] W. T. Thomson. Introduction to space dynamics. J. Wiley & sons, New-York, Londres, 1961.
- [2] E.T. Whittaker. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge university press, Londres, New-York, Ibadan, 1965.
- [3] L. Lur'é. Mécanique analytique. Masson & Cie, Paris, 1968.
- [4] J.J. Moreau. Mécanique classique. Tome 1. Masson & Cie, Paris, 1968.
- [5] L. Landau et E. Lifchitz. Physique théorique. Tome 1. Mécanique. MIR, 3ème édition, Moscou, 1969.
- [6] P. Brousse. Cours de mécanique. A. Colin, Collection U, Paris, 1973.
- [7] G. Pichon. Groupes de Lie. Représentation linéaires et applications. Hermann, Paris, 1973.
- [8] A. R. Klumpp. Singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix. J. SPACECRAFT, Vol. 13, No. 12, 1976.
- [9] H. Makino. A kinematical classification of robot manipulators. 6th ISIR, Nottingham, Mars 1976.
- [10] J. M. Flamme. Les systèmes hypercomplexes et leur application en cinématique Revue M, Vol. 23, No. 4, 1977.
- [11] J. Wittenburg. Dynamics of systems of rigid bodies. B.G. Teubner, Stuggart, 1977.
- [12] V.I. Arnold. Mathematical method of classical mechanics. Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1978.
- [13] P. Brousse. Mécanique analytique. Vuibert, Paris, 1981.
- [14] R. P. Paul. Robot manipulators : mathematics, programming, and control. MIT press, Cambridge (E.U.A), Londres, 1981.
- [15] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Première partie. Géométrie des surfaces, des groupes de transformation et des champs. MIR, Moscou, 1982.

- [16] B. Doubrovine, S. Novikov et A. Fomenko. Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. Deuxième partie. Géométrie et topologie des variétés. MIR, Moscou, 1982.
- [17] B. Gorla et M. Renaud. Modèles des robots manipulateurs. Application à leur commande. CEPADUES, Toulouse, 1984.
- [18] A. Ishlinsky. Orientation, gyroscopes et navigation par inertie. Tome2. MIR, Moscou, 1984.
- [19] R. A. Wehage. Quaternions and Euler parameters - a brief exposition NATO ASI series, Vol F9, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [20] J. M. Castelain. Application de la méthode hypercomplexe aux modélisations géométriques et différentielles des robots constitués d'une chaîne géométrique simple. These d'Etat, Université de Valenciennes et du Hainaut- Cambrésis, Valenciennes, Décembre 1986.
- [21] J. J. Craig. Introduction to robotics. Mechanisms and control. ADDISON WESLEY, Reading, 1986.
- [22] R. Mneimné et F. Testard. Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques. Hermann, Paris, 1986.
- [23] J. Funda et R. P. Paul. A comparison of transforms and quaternions in robotics. IEEE, 1988.
- [24] Y-L. Gu. Analysis of orientation representations by Lie algebra in robotics. IEEE, 1988.
- [25] E. Dombre et W. Khalil. Modélisation et commande des robots. HERMES, Paris, 1988.

## Petit Lexique anglais-français

anglais	français
yaw-lurch	embardée(naut.) lacet(aéronaut.)
pitch	tangage
roll	roulis
precession(astr.)	précession
nutation	nutation
spin	rotation propre
node axis-line of nodes	ligne des noeuds-ligne nodale