



HAL
open science

Stratégies de maintien à poste pour un satellite géostationnaire à propulsion tout électrique

Clément Gazzino

► **To cite this version:**

Clément Gazzino. Stratégies de maintien à poste pour un satellite géostationnaire à propulsion tout électrique. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2018. Français. NNT : 2018TOU30001 . tel-01705222v2

HAL Id: tel-01705222

<https://laas.hal.science/tel-01705222v2>

Submitted on 12 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ FÉDÉRALE TOULOUSE MIDI-PYRÉNÉES

Délivré par :

l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue le 25/01/2018 par :

CLÉMENT GAZZINO

STRATÉGIES DE MAINTIEN À POSTE POUR UN SATELLITE GÉOSTATIONNAIRE A PROPULSION TOUT ELECTRIQUE

JURY

HASNAA ZIDANI	Prof., ENSTA ParisTech	Rapporteur
JEAN-BAPTISTE CAILLAU	Prof., Univ. Côte d'Azur	Rapporteur
MARCO LOVERA	Prof., Politecnico di Milano	Examineur
PIERRE MARTINON	CR., INRIA Saclay	Examineur
DANIEL ALAZARD	Prof., ISAE-Supaero	Examineur
DAMIANA LOSA	Thales Alenia Space	Invitée
CHRISTELLE PITTET	CNES	Invitée
LUCA CERRI	CNES	Invité
CHRISTOPHE LOUEMBET	MC., Université Paul Sabatier	Directeur de thèse
DENIS ARZELIER	DR., LAAS-CNRS	Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de Recherche :

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes

Directeur(s) de Thèse :

Denis ARZELIER et Christophe LOUEMBET

Rapporteurs :

Hasnaa ZIDANI et Jean-Baptiste CAILLAU

*Ce travail est dédié à la
mémoire de mon grand-père maternel
parti trop tôt*

Résumé :

Pour mener à bien leur mission, les satellites de télécommunications doivent rester à la verticale d'un même point de la Terre, sur une orbite dite géostationnaire, pour laquelle la période de révolution des satellites sur leur orbite est identique à la période de rotation de la Terre sur elle-même. Cependant, à cause des perturbations orbitales, les satellites tendent à s'en éloigner, et il est alors nécessaire de concevoir des stratégies de commande pour les maintenir dans un voisinage de cette position de référence. Du fait de leur grande valeur de poussée, les systèmes à propulsion chimique ont largement été utilisés, mais aujourd'hui les systèmes à propulsion électrique avec leur grande impulsion spécifique sont des alternatives viables pour réduire la masse d'ergols du satellite, et ainsi le coût au lancement, ou allonger la durée de vie du satellite, ce qui permettrait de limiter l'encombrement dans l'espace. Cependant, l'utilisation d'un tel système propulsif induit des contraintes opérationnelles issues en partie du caractère limité de la puissance électrique disponible à bord. Ces contraintes sont difficiles à prendre en compte dans la transcription du problème de maintien à poste en un problème de contrôle optimal à consommation minimale avec contraintes sur l'état et le contrôle.

Ce manuscrit propose deux approches pour résoudre ce problème de commande optimale. La première, basée sur le développement et l'exploitation de conditions nécessaires d'optimalité, consiste à découper le problème initial en trois sous-problèmes pour former une méthode de résolution à trois étapes. La première étape permet de résoudre un problème de maintien à poste expurgé des contraintes opérationnelles, tandis que la deuxième, initialisée par le résultat de la première, produit une solution assurant le respect de ces dernières contraintes. La troisième étape permet d'optimiser la valeur des instants d'allumage et d'extinction des propulseurs dans le cadre du formalisme des systèmes à commutation. La seconde approche, dite « directe », consiste à paramétrer le profil de commande par une fonction binaire et à le discrétiser sur l'horizon temporel de résolution. Les contraintes opérationnelles sont ainsi facilement transcrites en contraintes linéaires en nombres entiers. Après l'intégration numérique de la dynamique, le problème de contrôle optimal se résume à un problème linéaire en nombres entiers.

Après la résolution du problème de maintien à poste sur un horizon court d'une semaine, le problème est résolu sur un horizon long d'un an par résolutions successives sur des horizons courts d'une durée de l'ordre de la semaine. Des contraintes de fin d'horizon court doivent alors être ajoutées afin d'assurer la faisabilité de l'enchaînement des problèmes sur l'horizon court constituant le problème sur l'horizon long.

Mots Clés : Maintien à poste, satellite GEO, poussée faible, contrôle optimal

Abstract :

Geostationary spacecraft have to stay above a fixed point of the Earth, on a so-called geostationary Earth orbit. For this orbit, the orbital period of the spacecraft is equal to the rotation period of the Earth. Because of orbital disturbances, spacecraft drift away their station keeping position. It is therefore mandatory to create control strategies in order to make the spacecraft stay in the vicinity of the station keeping position. Due to their high thrust capabilities, chemical thrusters have been widely used. However nowadays electric propulsion based thrusters with their high specific impulse are viable alternative in order to decrease the spacecraft mass or increase its longevity. The use of such a system induce the necessity to handle operational constraints because of the limited on-board power. These operational constraints are difficult to take into account in the mathematical transcription of the station keeping problem in an optimal control problem with control and state constraints.

This thesis proposed two techniques in order to solve this optimal control problem. The first one is based on the computation of first order necessary conditions and consists in decomposing the overall problem in three sub-problems, leading to a three-step decomposition method. The first step solves an optimal control problem without the operational constraints. The second steps enforces these operational constraints thanks to dedicated equivalence schemes and the third one optimises the switching times of the control profile thanks to a method borrowed from the switched systems theory.

The second proposed method consists in parametrising the on-off control profile with binary functions. After a time discretisation of the station keeping horizons, the operational constraints are easily recast as linear constraints on integer variables, the dynamics is numerically integrated and the station keeping problem is recast as a mixed integer linear programming problem.

After the resolution of the problem over a short time horizon of one week, the station keeping problem is solved over a long time horizon of one year. To this end, the long time horizon is split in shorter horizons over which the problem is successively solved. End-of-cycle constraints have been set up in order to ensure the feasibility of the solution one short horizon after another.

Key words : Station Keeping, GEO spacecraft, low thrust, optimal control

Remerciements

Le truc [...], c'est que ç'à rien à voir avec l'école. D'abord on passe l'examen, et après on cherche des années à savoir comment on l'a eu. Ça ressemble un peu à la vie, de ce point de vue là.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Je tiens à remercier mes deux directeurs de thèse Denis Arzelier et Christophe Louembet qui m'ont donné goût à la recherche et envie de poursuivre ma carrière dans cette direction. Je les remercie tout naturellement pour l'aide qu'ils m'ont apportée pour la réalisation de ce travail, que ce soit pour leurs suggestions ou leurs nouvelles idées tout autant que pour leur aide dans les développements mathématiques ou pour la relecture minutieuse des notes, des articles ainsi que de ce manuscrit. Je remercie également Christelle Pittet et Luca Cerri du CNES pour leurs nombreux conseils et leurs idées qui se sont révélées très fructueuses. J'adresse mes remerciements au CNES et à Thales Alenia Space pour le financement de ces travaux.

Je remercie par ailleurs Jean-Baptiste Caillau et Hasnaa Zidani d'avoir bien voulu accepter de relire mon manuscrit en un temps record, que les diverses péripéties administratives ont beaucoup réduit. Merci également aux membres du jury Daniel Alazard, Jean-Baptiste Caillau, Marco Lovera, Pierre Martinon et Hasnaa Zidani d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Un grand merci à mes compagnons de recherche de ces trois dernières années pour les discussions animées à la cantine, les pauses détente et les soirées (important!), et en particulier ceux du bureau E45, à Laura et son rire communicatif, Romain et ses discussions passionnées sur le spatial, Sofia *the Inkscape queen*, Roxana et ses bons gâteaux, Harmony la gazelle, Saïd et ses pâtisseries, Tillmann à la mode sandales-chaussettes sur son nouveau canapé, Simo et ses *Torwarthandschuhe*, Paulo et son Jenga, Florent et sa bonne humeur contagieuse, Sabrina et ses délicieux samoussas, Matthieu notre éclectique responsable des doctorants, Cédric et son Molky, Flavien jamais avare de raclette, tartiflette et croziflette ainsi que Swann pour ses bons bars, pour . Merci également à l'équipe MAC du LAAS pour son accueil chaleureux. Un grand merci à Sofia pour ses talents d'infographiste mis aux service de la poussée électrique et des rotations dans l'espace, à Paulo pour l'initiation du programme « Une thèse pour tous » et à Tillmann pour nos nombreuses discussions sur les accents, sur le rationalisme français et le romantisme allemand, ou sur le monde en général, autour une pizza accompagnée d'un vert de vin rouge bien sûr! Je ne peux pas ne

pas remercier Louis XIV qui nous a permis de passer de bons moments et de rire un grand coup!

I also would like to thank Luca Bellen from Politecnico di Milano for the discussions we had about station keeping.

Je profite de cet endroit pour remercier des personnes que je connais depuis plus longtemps et qui m'ont aussi soutenues ces trois dernières années. Un grand merci aux fidèles de la coinche à une époque où il était nécessaire de Clary-fier que Lhôpital se foutait de la charité, Raphaël, Arthur, Mathieu, Vincent. On peut sûrement dire maintenant que l'on a en partie élevé les chèvres ensemble!

Pour ces quelques années passées dans la ville rose depuis mon arrivée à l'avenue des crackers Belin, je voudrais d'abord remercier la Trolliste, aussi bien sa branche française que sa branche japonaise qui vient de s'agrandir, pour les passages pas si rares au London Town ou au Killarney, aux membres du BDA qui m'ont accompagné ainsi qu'au club d'astronomie pour les longues nuits d'hiver passées au coin du f... ah ben non, passées à se geler les pieds dans l'herbe humide. Je ne peux bien entendu pas ne pas remercier la KJL (alias Caroliste B.) et les hoplites de la Sp'Arta pour m'avoir accueilli dans leurs rangs pendant quelques semaines bien remplies (mais j'aime beaucoup la Poudl'Art aussi). Je remercie également mes amis de feu l'ENSICA avec qui j'ai passé de très bon moments, en particulier pour les randos. Je remercie finalement le SIMU, en particulier la lignée des Immortels (ce sont les meilleurs!), pour les parties de JDR, de JDS, pour la Convention, pour mes co-auteurs de scenarii, pour les canapés, pour l'annexion de la Biballe, pour les passations, les Noël, et je dois encore oublier des raisons. Je ne souhaite citer personne, de peur d'oublier quelqu'un.

Tout ceci n'aurait bien entendu pas été possible dans le soutien de toute ma famille qui m'a encouragé depuis le début. Un très grand merci.

Table des matières

Remerciements	vii
Nomenclature	1
Introduction	11
1 Maintien à poste d'un satellite géostationnaire	15
1.1 Introduction	16
1.2 Mécanique orbitale	17
1.2.1 Le mouvement képlérien	17
1.2.1.1 Équation du mouvement képlérien	17
1.2.1.2 Trajectoire képlérienne	18
1.2.1.3 L'orbite géostationnaire	19
1.2.2 Perturbations orbitales	19
1.3 Représentation d'état du mouvement	20
1.3.1 Représentation d'état cartésienne	20
1.3.2 Représentation d'état en éléments orbitaux	20
1.3.2.1 Éléments orbitaux classiques	20
1.3.2.2 Éléments orbitaux équinoxiaux	23
1.3.3 Position géographique	25
1.3.3.1 Expression du rayon r	25
1.3.3.2 Expression de la longitude λ	25
1.3.3.3 Expression de la latitude φ	27
1.3.3.4 Expression du vecteur position	27
1.3.4 Équations d'évolution régissant le système	28
1.4 Problème de maintien à poste sous forme de contrôle optimal	29
1.4.1 Contraintes sur le problème de maintien à poste	29
1.4.1.1 Expression des contraintes de maintien à poste en termes de paramètres géographiques relatifs	29
1.4.1.2 Expression des contraintes de maintien à poste en termes d'éléments orbitaux relatifs	31
1.4.2 Modélisation du système propulsif	34
1.4.2.1 Moteurs à propulsion électrique	34
1.4.2.2 Contraintes liées à l'utilisation de la poussée faible	36

	Description des contraintes	36
	Expression mathématique de ces contraintes	38
1.4.3	Expression sous forme de contrôle optimal	40
1.4.3.1	Fonctionnelle de coût à minimiser	40
1.4.3.2	Problème de maintien à poste optimal à consommation minimale	41
1.5	Contrôle optimal avec contraintes sur l'état	42
1.5.1	Problème de contrôle optimal de Bolza	42
1.5.1.1	Méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal	44
1.5.2	Méthodes directes et contraintes sur l'état	45
1.5.3	Méthodes indirectes et contraintes sur l'état	48
1.5.3.1	Les méthodes indirectes	48
1.5.3.2	Prise en compte des contraintes sur l'état via une méthode de pénalisation	51
1.5.3.3	Extension du PMP pour les contraintes sur l'état	52
	Définitions	52
	Conditions nécessaires d'optimalité	53
	Extensions particulières dans le cas où le contrôle est scalaire	55
1.6	Conclusion	56
2	Solutions optimales analytiques pour le maintien à poste hors-plan à poussée faible	57
2.1	Introduction	58
2.2	Description du problème	58
2.2.1	Équations d'évolution et trajectoire	58
2.2.2	Problèmes à résoudre	60
2.3	Solutions analytiques du problème de résonance hors-plan	62
2.3.1	Conditions nécessaires d'optimalité	62
2.3.2	Trajectoire optimale	65
2.3.3	Conditions de transversalité	67
2.3.4	Étude des différents cas possibles	69
2.3.4.1	Calcul des angles α et ϕ	70
	Cas 1 à 4 et 9 à 12	70
	Cas 5 à 8 et 13 à 16	80
2.3.4.2	Valeurs initiales du vecteur adjoint	81
2.3.5	Conclusion	82
2.4	Solution analytique du problème de maintien à poste hors-plan	83
2.4.1	Description du problème	83
2.4.2	Trajectoire avant le point de contact	85
2.4.2.1	Trajectoire $A - B - D$	86
2.4.2.2	Trajectoire $A - C - D$	90
2.4.2.3	Comparaison des trajectoires $A - B - D$ et $A - C - D$	92
2.4.3	Étude du point de contact et du vecteur adjoint	93
2.4.3.1	Condition de saut	93
2.4.3.2	Valeur initiale du vecteur adjoint	94
2.4.3.3	Saut au point de contact	96

2.4.3.4	Conclusion	98
2.5	Conclusion	98
3	Solution du problème de maintien à poste sur une semaine avec une méthode de décomposition en trois étapes	101
3.1	Introduction	102
3.2	Étape 1 : solution du problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles	103
3.2.1	Reformulation du problème	103
3.2.2	Initialisation du problème aux deux bouts par une méthode directe	105
3.2.3	Résolution du problème simplifié par une méthode indirecte	108
3.2.3.1	Méthode de pénalisation	108
3.2.3.2	Loi de commutation	110
3.2.3.3	Problème aux deux bouts	111
3.3	Étape 2 : Imposer les contraintes opérationnelles	113
3.3.1	Introduction	113
3.3.2	Obtention d'un profil de poussée	114
3.3.3	Schéma d'équivalence en consommation	115
3.3.4	Schéma d'équivalence en effet	115
3.4	Étape 3 : Optimisation des instants de commutation	117
3.4.1	Introduction	117
3.4.2	Description du système à commutations considéré	117
3.4.3	Optimisation des instants de commutation	120
3.4.3.1	Position du problème	120
3.4.3.2	Résolution en tant que problème d'optimisation de paramètres	121
3.4.4	Algorithme de résolution	124
3.5	Analyse des solutions	124
3.5.1	Application de la méthode à trois étapes pour un problème de rendez-vous simplifié	125
3.5.1.1	Étape 1 : problème de rendez-vous simplifié	125
	Initialisation de la solution au moyen d'une méthode directe	126
	Résolution du problème simplifié avec le Principe du Maximum	127
3.5.1.2	Étape 2 : schémas d'équivalence pour les contraintes opérationnelles	128
3.5.1.3	Étape 3 : optimisation des instants de commutation	130
3.5.2	Application de la méthode à trois étapes pour un problème de maintien à poste perturbé	132
3.5.2.1	Étape 1 : problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles	132
	Initialisation de la solution au moyen d'une méthode directe	132
	Résolution du problème simplifié avec le Principe du Maximum	133
3.5.2.2	Étape 2 : schémas d'équivalence pour les contraintes opérationnelles	136
3.5.2.3	Étape 3 : optimisation des instants de commutation	137
3.6	Conclusion	140

4	Optimisation en nombres entiers pour le problème de maintien à poste sur un horizon court	143
4.1	Introduction	144
4.2	Transformation du problème continu en problème discret	144
4.2.1	Formalisation binaire des contraintes opérationnelles	145
4.2.1.1	Profil de contrôle binaire	145
4.2.1.2	Transcription des contraintes opérationnelles	146
	Contrainte de disjonction des poussées	146
	Contrainte de durée minimale des poussées	147
	Contraintes intercraux entre deux poussées du même propulseur	148
	Contraintes intercraux entre deux propulseurs différents	149
4.2.1.3	Écriture sous forme matricielle	150
4.2.1.4	Problème de maintien à poste avec les contraintes opérationnelles discrétisées	152
4.2.2	Intégration de la dynamique	153
4.2.2.1	Discrétisation de la matrices de transition	153
4.2.2.2	Schémas d'intégration numérique	157
4.2.2.3	Discrétisation des contraintes de maintien à poste	160
4.2.3	Problèmes d'optimisation en nombres entiers	161
4.3	Solution numérique d'un problème de maintien à poste képlérien	162
4.3.1	Introduction	162
4.3.2	Expression du problème de maintien à poste	163
4.3.2.1	Contraintes opérationnelles	163
4.3.2.2	Contraintes de maintien à poste	164
4.3.3	Solution numérique	166
4.4	Solution numérique du problème de maintien à poste complet	172
4.4.1	Comparaison entre les différentes méthodes d'intégration	172
4.4.2	Comparaison avec la méthode de décomposition en trois étapes	173
4.4.3	Effet des contraintes opérationnelles	175
4.5	Conclusion	176
5	Problème de maintien à poste résolu sur un an	179
5.1	Introduction	180
5.2	Contrainte de fin d'horizon court	181
5.2.1	Conditions finales sur les positions et vitesses cartésiennes relatives	181
5.2.1.1	Trajectoire et contraintes hors-plan	182
5.2.1.2	Trajectoire et contraintes dans le plan	183
	Interprétation géométrique	185
5.2.2	Application dans le cas d'un modèle perturbé	187
5.2.2.1	Contraintes terminales	187
5.2.2.2	Expression en termes de positions et de vitesses géographiques	188
5.2.2.3	Discrétisation des contraintes terminales	189
5.2.3	Problèmes de maintien à poste à résoudre	190
5.2.4	Contraintes de maintien à postes quadratiques	191
5.3	Simulations et analyse paramétrique	193

5.3.1	Résolution du problème dans le cas nominal choisi	194
5.3.2	Effet de la méthode d'intégration de la dynamique	198
5.3.3	Effet de la durée de l'horizon court	199
5.3.4	Approximation des contraintes terminales quadratiques	201
5.3.5	Approximation des contraintes quadratiques de maintien à poste	203
5.3.6	Angles de déviation et de déflexion des propulseurs	203
5.3.7	Cas de panne	206
5.3.8	Système propulsif idéalisé	208
5.3.9	Conclusion	208
5.4	Optimisation à horizon glissant	209
5.4.1	Présentation de la méthode	209
5.4.2	Résultats	210
5.5	Conclusion	211
Conclusion		215
A Repères de référence		219
A.1	Repère inertiel géocentrique	219
A.2	Repère géocentrique tournant	220
A.3	Repère orbital local	221
A.4	Repère équinoxial	225
B Équations d'évolution		229
B.1	Équations d'évolution libre	229
B.1.1	Mouvement képlérien	229
B.1.1.1	Dynamique képlérienne	229
B.1.1.2	Dynamique képlérienne relative	231
B.1.2	Mouvement non képlérien	233
B.1.2.1	Orbites osculatrices	233
B.1.2.2	Équations de Lagrange	234
B.1.3	Équations d'évolution linéarisées	236
B.1.3.1	Point de linéarisation	236
B.1.3.2	Dérivée de l'écart du vecteur d'état à l'ordre 1	237
B.2	Modèle d'évolution forcée	237
B.2.1	Perturbations dues à la propulsion	237
B.2.1.1	Introduction	237
B.2.1.2	Propulsion chimique et propulsion électrique	238
B.2.2	Équations de Gauss	239
B.2.2.1	Perturbations de poussée	240
B.2.2.2	Equations de perturbation de Gauss	240
B.2.3	Linéarisation de la dynamique contrôlée	241
B.2.4	Analyse des effets de la propulsion sur les éléments orbitaux relatifs	243
B.2.4.1	Variation des paramètres orbitaux	243
B.2.4.2	Corrections à poussée forte	244
B.2.4.3	Corrections à poussée faible	245
B.3	Position géographique	247
B.3.1	Position géographique linéarisée	247

B.3.2	Dérivée de l'écart en position géographique	248
B.3.2.1	Notations	248
B.3.2.2	Calcul formel	248
B.3.2.3	Calcul explicite	252
C	Calculs et conversions avec les éléments orbitaux classiques	255
C.1	Intégrales du mouvement képlérien	255
C.2	Rappels des transformations entre les anomalies	256
C.3	Calcul des éléments orbitaux à partir de la position et de la vitesse	257
C.4	Calcul de la position et de la vitesse à partir des éléments orbitaux	259
C.4.1	Expression de la position	259
C.4.2	Expression de la vitesse	260
D	Conversions avec les éléments orbitaux équinoxiaux	261
D.1	Définition des éléments orbitaux équinoxiaux à partir des éléments orbitaux classiques	261
D.2	Calcul des éléments orbitaux classiques à partir des éléments orbitaux équinoxiaux	261
D.3	Calcul des éléments orbitaux équinoxiaux à partir de la position et la vitesse	266
D.4	Calcul de la position et de la vitesse à partir des éléments orbitaux équinoxiaux	268
E	Méthode approchée de résolution de l'équation de Kepler	273
E.1	Algorithme de Newton	273
E.1.1	Équation de Kepler en E	273
E.1.2	Équation de Kepler en ν	274
E.2	Méthode de Hull	275
E.2.1	Avec les équations (E.1) et (E.2)	275
E.2.2	Avec l'équation (E.3)	276
E.2.3	Équation de Kepler en éléments orbitaux équinoxiaux	277
F	Stratégies de maintien à poste existantes	281
F.1	Corrections à poussée forte	281
F.1.1	Maintien à poste hors plan	281
F.1.2	Maintien à poste dans le plan de l'orbite	282
F.1.2.1	Contrôle de l'excentricité	283
F.1.2.2	Contrôle de la longitude	285
F.1.2.3	Contrôle du rayon	287
F.1.3	Conclusion	289
F.2	Corrections à poussée faible	289
F.2.1	Perte d'efficacité	289
F.2.2	Maintien à poste hors plan	290
F.2.3	Maintien à poste dans le plan	290
F.2.4	Couplage des poussées	291
F.3	Valeurs numériques	293
G	Transformation des fonctions trigonométriques	297

H	Calcul des dérivées du problème à commutation	299
I	Intégration des équations de Hill-Clohessy-Wiltshire	303
J	Transformation entre les positions et vitesse cartésiennes relatives et les positions et vitesses géographiques relatives	307
J.1	Position géographique	308
J.2	Vitesse géographique	309
J.3	Résumé de la transformation linéarisée	312
K	Discrétisation des contraintes terminales pour la résolution sur un horizon long	313
	Bibliographie	318

Nomenclature

Symbole	Signification
a	demi-grand axe <i>à partir du chapitre 3</i> : demi grand axe relatif
$A(t)$	matrice dynamique de l'équation d'évolution linéaire
A_{HCW}	matrice de la dynamique pour les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire
A_Z	matrice de la dynamique pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
A_0	demi-petit axe de l'ellipse de la trajectoire libre relative hors-plan
A_{\pm}	demi-petit axe de l'ellipse de la trajectoire relative hors-plan contrôlée par une poussée positive ou négative
A_{λ}	demi-petit axe de l'ellipse de la trajectoire de phase du vecteur adjoint du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
b	demi-petit axe
\mathbf{b}_c	matrice de calcul du vecteur d'état (terme constant) pour le problème en nombres entiers
\mathbf{b}_x	matrice de calcul du vecteur d'état (terme proportionnel à l'état initial) pour le problème en nombres entiers
\mathcal{B}_G	base géocentrique inertielle
\mathcal{B}_{OL}	base orbitale locale
\mathcal{B}_{sat}	base liée au satellite
$B(t)$	matrice de commande de l'équation d'évolution linéaire, le contrôle étant exprimé comme l'accélération des propulseurs dans la base orbitale locale
$\tilde{B}(t)$	matrice de commande pour l'expression de la dynamique, le contrôle étant exprimé au travers des fonctions de poussée des propulseurs
\mathfrak{B}	matrice de calcul du vecteur d'état (terme proportionnel au contrôle) pour le problème en nombres entiers
B_{HCW}	matrice de commande pour les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire
B_Z	matrice de commande pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
$C(t)$	matrice de transformation linéarisée entre les éléments orbitaux équinoxiaux relatif et la position géographique relative
\mathcal{C}_{δ}^0	cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon δ

Symbole	Signification
e	excentricité
\mathbf{e}_c	matrice de calcul du vecteur des dérivées des positions géographiques (terme constant) pour le problème en nombres entiers
\mathbf{e}_x	matrice de calcul du vecteur des dérivées des positions géographiques (terme proportionnel à l'état initial) pour le problème en nombres entiers
e_x	première composante du vecteur excentricité
e_y	à partir du chapitre 3 : première composante du vecteur excentricité relatif deuxième composante du vecteur excentricité
E	à partir du chapitre 3 : deuxième composante du vecteur excentricité relatif anomalie excentrique
\mathbf{e}	matrice de calcul du vecteur des dérivées des positions géographiques (terme proportionnel au contrôle) pour le problème en nombres entiers
E_Q	anomalie équinoxiale excentrique
$E(t)$	matrice dynamique pour l'équation d'évolution de la position géographique linéarisée
f_c	fonction de commutation issue du Principe du Maximum de Pontryagin
\tilde{f}_c	fonction de commutation approchée
f_G	contribution des potentiel perturbateurs à la dynamique non linéaire au travers des équations de Gauss
f_L	contribution des potentiel perturbateurs à la dynamique non linéaire au travers des équations de Lagrange
$\tilde{F}(t)$	vecteur de contrôle du satellite en fonction des fonctions de poussée de chaque propulseur
$F(t)$	vecteur de contrôle du satellite en fonction des fonctions de poussée de chaque propulseur normalisées
\bar{F}	vecteur des variables binaires de contrôle
F_{\max}	valeur maximale de la poussée
\tilde{F}_{NE}	fonction de poussée du propulseur Nord-Est
F_1	fonction de poussée du propulseur Nord-Est normalisée
\tilde{F}_{SE}	fonction de poussée du propulseur Sud-Est
F_2	fonction de poussée du propulseur Sud-Est normalisée
\tilde{F}_{NO}	fonction de poussée du propulseur Nord-Ouest
F_3	fonction de poussée du propulseur Nord-Ouest normalisée
\tilde{F}_{SO}	fonction de poussée du propulseur Sud-Ouest
F_4	fonction de poussée du propulseur Sud-Ouest normalisée
\mathbf{g}_c	matrice de calcul du vecteur des positions géographiques (terme constant) pour le problème en nombres entiers
\mathbf{g}_x	matrice de calcul du vecteur des positions géographiques (terme proportionnel à l'état initial) pour le problème en nombres entiers
\mathcal{G}	constante de gravitation
\mathcal{G}	matrice de calcul du vecteur des positions géographiques (terme proportionnel au contrôle) pour le problème en nombres entiers
\vec{h}	vecteur moment cinétique
h_x	première composante du moment cinétique dans la base géocentrique inertielle

Symbole	Signification
h_y	deuxième composante du moment cinétique dans la base géocentrique inertielle
h_z	troisième composante du moment cinétique dans la base géocentrique inertielle
\mathcal{H}	Hamiltonien
i	inclinaison
i_x	première composante du vecteur inclinaison <i>à partir du chapitre 3</i> : première composante du vecteur inclinaison relatif
i_y	deuxième composante du vecteur inclinaison <i>à partir du chapitre 3</i> : deuxième composante du vecteur inclinaison relatif
I_n	matrice identité de dimension n
$*_j$	évaluation de la matrice ou du vecteur $*$ à l'instant τ_j
J	fonction objectif (consommation du satellite)
\tilde{J}	fonction objectif réduite (sans termes multiplicatifs constants)
K_{xy}^+	nombre de contraintes linéaires approchant la contrainte de fin de cycle positive dans le plan de l'équateur
K_{xy}^-	nombre de contraintes linéaires approchant la contrainte de fin de cycle négative dans le plan de l'équateur
K_z	nombre de contraintes linéaires approchant la contrainte de fin de cycle hors-plan
\tilde{K}_{xy}^+	nombre de contraintes linéaires approchant la première contrainte de maintien à poste quadratique dans le plan de l'équateur
\tilde{K}_{xy}^-	nombre de contraintes linéaires approchant la deuxième contrainte de maintien à poste quadratique dans le plan de l'équateur
\tilde{K}_z	nombre de contraintes linéaires approchant la contrainte de maintien à poste quadratique hors plan
$\ell_{E\Theta}$	longitude excentrique
$\ell_{M\Theta}$	longitude moyenne <i>à partir du chapitre 3</i> : longitude moyenne relative
$\ell_{\nu\Theta}$	longitude vraie
m	nombre de pas de temps nécessaires au respect de la contrainte de latence entre deux poussées d'un même propulseur
m_{sat}	masse du satellite
m_{\oplus}	masse de la Terre
M	anomalie moyenne
M_Q	anomalie équinoxiale moyenne
n	mouvement moyen
N	nombre de points de discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_f]$
p	nombre de pas de temps nécessaire au respect de la contrainte de durée minimale pour chaque poussée
P	nombre total de poussées
P_1	nombre de poussées du propulseur Nord-Est
P_2	nombre de poussées du propulseur Sud-Est
P_3	nombre de poussées du propulseur Nord-Ouest
P_4	nombre de poussées du propulseur Sud-Ouest

Symbole	Signification
q	nombre de pas de temps nécessaires au respect de la contrainte de latence entre deux poussées de deux propulseurs différents
Q	nombre de cycles pour le problème de maintien à poste képlérien hors-plan
r	distance centre de la Terre - satellite
\vec{r}	vecteur centre de la Terre - satellite
s	variable indépendante pour le problème de contrôle optimal à commutation
s_k	$k^{\text{ème}}$ instant de commutation
s_1	fonction de commande binaire pour le propulseur Nord-Est
s_2	fonction de commande binaire pour le propulseur Sud-Est
s_3	fonction de commande binaire pour le propulseur Nord-Ouest
s_4	fonction de commande binaire pour le propulseur Sud-Ouest
$(s_1)_j$	fonction de commande binaire pour le propulseur Nord-Est sur l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$
$(s_2)_j$	fonction de commande binaire pour le propulseur Sud-Est sur l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$
$(s_3)_j$	fonction de commande binaire pour le propulseur Nord-Ouest sur l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$
$(s_4)_j$	fonction de commande binaire pour le propulseur Sud-Ouest sur l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$
t_0	instant initial
t_f	instant final
t_j^i	instant de milieu de la $j^{\text{ème}}$ poussée du propulseur i
T_d	temps de latence entre deux poussées de deux propulseurs différents
$t_p^{+\uparrow}$	instant de début de la $p^{\text{ème}}$ poussée positive du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
$t_p^{+\downarrow}$	instant de fin de la $p^{\text{ème}}$ poussée positive du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
$t_p^{-\uparrow}$	instant de début de la $p^{\text{ème}}$ poussée négative du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
$t_p^{-\downarrow}$	instant de fin de la $p^{\text{ème}}$ poussée négative du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
T_l	durée minimale d'une poussée
T_s	temps de latence entre deux poussées du même propulseur
T_{\oplus}	période de rotation de la Terre
\mathcal{T}_k	$k^{\text{ème}}$ intervalle sur lequel le contrôle est constant
u	vecteur de commande dans la base orbitale locale
u_N	composante selon \vec{u}_N de la commande
\vec{u}_e	vecteur unitaire dans la direction du vecteur excentricité
\vec{u}_h	vecteur unitaire dans la direction du moment cinétique
\vec{u}_m	vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_n, \vec{u}_m, \vec{u}_{Z_G})$ est orthonormée directe
\vec{u}_n	vecteur unitaire dans la direction du nœud ascendant
\vec{u}_N	troisième vecteur de la base orbitale locale
\vec{u}_{NE}	vecteur de poussée du propulseur Nord-Est dans la base orbital locale
\vec{u}_{NO}	vecteur de poussée du propulseur Nord-Ouest dans la base orbital locale

Symbole	Signification
u_R	composante selon \vec{u}_R de la commande
\vec{u}_p	premier vecteur de la base équinoxiale
\vec{u}_q	deuxième vecteur de la base équinoxiale
\vec{u}_R	premier vecteur de la base orbitale locale
\vec{u}_{SE}	vecteur de poussée du propulseur Sud-Est dans la base orbital locale
\vec{u}_{SO}	vecteur de poussée du propulseur Sud-Ouest dans la base orbital locale
u_T	composante selon \vec{u}_T de la commande
\vec{u}_T	deuxième vecteur de la base orbitale locale
\vec{u}_v	vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_n, \vec{u}_v, \vec{u}_h)$ est orthonormée directe
\vec{u}_{X_G}	premier vecteur de la base inertielle géocentrique
\vec{u}_{Y_G}	deuxième vecteur de la base inertielle géocentrique
\vec{u}_{Z_G}	troisième vecteur de la base inertielle géocentrique
U	vecteur de contrôle pour les problèmes de maintien à poste simplifiés pour un satellite équipé d'un système propulsif idéal (un propulseur par face)
U_{\max}	valeur maximale du contrôle pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
v	norme de la vitesse du satellite dans le repère géocentrique inertiel
\vec{v}	vecteur vitesse du satellite dans le repère géocentrique inertiel
x	abscisse de la position du satellite dans le repère géocentrique inertiel
x_{cart}	vecteur d'état du satellite en paramètres cartésiens
x_{EOC}	vecteur d'état du satellite en éléments orbitaux classiques
x_{EOE}	vecteur d'état du satellite en éléments orbitaux équinoxiaux
x_{mp}	vecteur des éléments orbitaux équinoxiaux de maintien à poste
x_r	abscisse relative de la position du satellite dans le repère orbital local
X	vecteur d'état pour les problèmes képlériens simplifiés pour un satellite équipé d'un système propulsif idéal (un propulseur par face)
y	ordonnée de la position du satellite dans le repère géocentrique inertiel
$y(x_{\text{EOE}}, t)$	position géographique
y_r	ordonnée relative de la position du satellite dans le repère orbital local
z	côte de la position du satellite dans le repère géocentrique inertiel
\dot{z}	vitesse relative dans le repère géocentrique inertiel
z_r	côte relative de la position du satellite dans le repère orbital local
\dot{z}_r	vitesse relative dans le repère orbital local
z_1	première composante du vecteur d'état pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
z_2	deuxième composante du vecteur d'état pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan
Z	vecteur d'état pour la résolution du problème de maintien à poste hors-plan analytique
\mathcal{Z}	espace admissible pour la résolution du problème de maintien à poste hors-plan analytique
\mathcal{Z}_f	espace admissible final pour la résolution du problème de maintien à poste képlérien hors-plan

Symbole	Signification
α	paramétrage angulaire de la durée des poussées pour le problème de maintien à poste hors-plan analytique dans le plan de phase du vecteur adjoint
α_{NE}	angle de déflexion de la tuyère Nord-Est
α_{SE}	angle de déflexion de la tuyère Sud-Est
α_{NO}	angle de déflexion de la tuyère Nord-Ouest
α_{SO}	angle de déflexion de la tuyère Sud-Ouest
β	paramétrage angulaire d'un cycle incomplet final pour le problème de maintien à poste hors-plan analytique dans le plan de phase du vecteur adjoint
$\gamma(t)$	nombre de propulseurs actifs à l'instant t
$\bar{\gamma}$	vecteur des variables entières comptant le nombre de propulseurs actifs à chaque pas de temps
γ_j	variable entière comptant le nombre de propulseurs actifs sur l'intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$
Γ	matrice de transformation du vecteur de contrôle en fonction de poussées des moteurs dans la base orbitale locale
Γ_{NE}	direction de poussée de la tuyère Nord-Est dans la base orbitale locale
Γ_{SE}	direction de poussée de la tuyère Sud-Est dans la base orbitale locale
Γ_{NO}	direction de poussée de la tuyère Nord-Ouest dans la base orbitale locale
Γ_{SO}	direction de poussée de la tuyère Sud-Ouest dans la base orbitale locale
δ	demi-largeur de la fenêtre de maintien à poste
Δt_j^i	demi-largeur de la $j^{\text{ème}}$ poussée du propulseur i
$\Delta\tau$	pas de la discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_f]$
$\Delta\mathcal{T}$	durée d'un horizon court
θ_k	angles d'approximation de la contrainte de fin de cycle hors-plan par un ensemble de contraintes linéaires
$\tilde{\theta}_k$	angles d'approximation de la contrainte de maintien à poste quadratique hors-plan par un ensemble de contraintes linéaires
θ_{NE}	angle de déviation de la tuyère Nord-Est
θ_{SE}	angle de déviation de la tuyère Sud-Est
θ_{NO}	angle de déviation de la tuyère Nord-Ouest
θ_{SO}	angle de déviation de la tuyère Sud-Ouest
$\Theta(t)$	ascension droite du méridien de Greenwich, aussi appelé temps sidéral
Θ_{mp}	matrice d'expression des contraintes de maintien à poste à partir du vecteur d'état
$\kappa(t)$	ascension droite du satellite
κ_{mp}	ascension droite de maintien à poste
λ	longitude géographique <i>à partir du chapitre 3</i> : longitude géographique relative
λ_{mp}	longitude géographique de maintien à poste
λ_1	première composante du vecteur adjoint pour le problème de maintien à poste képlérien hors-plan
λ_2	deuxième composante du vecteur adjoint pour le problème de maintien à poste képlérien hors-plan
Λ	vecteur adjoint pour le problème de maintien à poste hors-plan analytique

Symbole	Signification
μ_{\oplus}	paramètre gravitationnel standard géocentrique
ν	anomalie vraie
ν_k^+	angles d'approximation de la contraintes de fin de cycle positive dans le plan de l'équateur par un ensemble de contraintes linéaires
ν_k^-	angles d'approximation de la contraintes de fin de cycle négative dans le plan de l'équateur par un ensemble de contraintes linéaires
$\tilde{\nu}_k^+$	angles d'approximation de la première contraintes de maintien à poste quadratique dans le plan de l'équateur par un ensemble de contraintes linéaires
$\tilde{\nu}_k^-$	angles d'approximation de la deuxième contraintes de maintien à poste quadratique dans le plan de l'équateur par un ensemble de contraintes linéaires
ν_Q	anomalie équinoxiale vraie
ξ_1	paramétrage du demi-grand axe de l'ellipse de la trajectoire képlérienne relative dans le plan de l'équateur
ξ_2	paramétrage du demi-grand axe de l'ellipse de la trajectoire képlérienne relative dans le plan de l'équateur
ξ_+	paramétrage du centre de l'ellipse de la trajectoire képlérienne relative dans le plan de l'équateur
ξ_-	paramétrage du centre de l'ellipse de la trajectoire képlérienne relative dans le plan de l'équateur
Ξ_*^*	matrices des contraintes en nombres entiers
ς	fonction de seuil
ς_1	fonction de seuil pour le propulseur Nord-Est
ς_2	fonction de seuil pour le propulseur Sud-Est
ς_3	fonction de seuil pour le propulseur Nord-Ouest
ς_4	fonction de seuil pour le propulseur Sud-Ouest
τ_i	instant i de la discrétisation de l'intervalle $[t_0, t_f]$
φ	latitude géographique
φ_{mp}	latitude de maintien à poste
ϕ	paramétrage de la position finale sur le cercle de maintien à poste pour le problème de maintien à poste képlérien hors-plan
Φ	matrice de transition de la dynamique linéaire prenant en compte toutes les perturbations orbitales
Φ_{HCW}	matrice de transition de la dynamique de Hill-Clohessy-Wiltshire
ψ	fonction de pénalisation pour les contraintes de maintien à poste exprimées avec la position géographique
$\tilde{\psi}$	fonction de pénalisation pour les contraintes de maintien à poste exprimées avec les éléments orbitaux équinoxiaux
Ψ	matrice de transition discrète pour les schémas numériques d'intégration de la dynamique
ω	argument du périégée
ω_{\oplus}	vitesse angulaire de rotation de la Terre
Ω	ascension droite du nœud ascendant
$\mathbb{1}$	fonction indicatrice
$\mathbf{0}_{\mu \times \nu}$	matrice de taille $\mu \times \nu$ remplie de 0

Symbole	Signification
$\mathbf{1}_{\mu \times \nu}$	matrice de taille $\mu \times \nu$ remplie de 1
$\mathbf{2}_{\mu \times \nu}$	matrice de taille $\mu \times \nu$ remplie de 2

NOTATIONS MATHÉMATIQUES

- $x \in \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p \times 1}$ désigne un vecteur colonne de dimension p , $x \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ désigne un vecteur ligne de dimension p et $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ désigne une matrice constituée de p lignes et de q colonnes.
- Soit $x : t \mapsto x(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ un vecteur dépendant du temps. La dérivée temporelle de ce vecteur à l'instant t est notée :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = [\dot{x}_1(t) \ \dots \ \dot{x}_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

avec $\forall i = 1, \dots, n$, $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ une fonction scalaire de la variable vectorielle x . La dérivée partielle de f par rapport à x est donnée par :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (2)$$

- Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(x) = [f_1(x) \ \dots \ f_m(x)]^T$. La dérivée partielle de f par rapport à x est donnée par :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (3)$$

- Soit $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \psi(t, x(t))$. La dérivée temporelle totale de cette fonction est donnée par :

$$\frac{d\psi(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial \psi(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t, x(t))}{\partial x} \frac{\partial x(t)}{\partial t} \in \mathbb{R} \quad (4)$$

- Soit $M : t \mapsto M(t) = [M_{ij}(t)]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ une matrice dépendant du temps. La dérivée temporelle de la matrice M est donnée par :

$$\dot{M}(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \left[\frac{dM_{ij}(t)}{dt} \right]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}} \in \mathbb{R}^{p \times q} \quad (5)$$

Introduction

Ne jamais promettre le possible. Tout le monde en est capable. Il faut promettre l'impossible, parce que l'impossible est parfois possible si on trouve le bon moyen, et on peut souvent repousser au moins les limites du possible. Et quand on échoue, eh bien, c'était vraiment impossible.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Pour mener à bien leur mission, les satellites de télécommunications, comme ceux basés sur les plateformes SpaceBus NEO de Thales Alenia Space ou Eurostar d'Airbus, doivent rester à la verticale d'un même point de la Terre, sur une orbite dite géostationnaire. Sur cette orbite, la période de révolution des satellites est identique à la période de rotation de la Terre sur elle-même, et leur position est repérée par la longitude de stationnement, c'est-à-dire la longitude du point au-dessus duquel les satellites doivent rester.

L'orbite géostationnaire est une abstraction mathématique obtenue dans le cas où seule l'attraction gravitationnelle d'une Terre supposée sphérique et homogène est prise en compte. Du fait de la présence d'autres forces, appelées perturbations orbitales, un satellite placé sur une orbite géostationnaire voit sa position s'écarter progressivement de sa position de stationnement. Le problème du maintien à poste d'un satellite géostationnaire consiste donc à mettre en place une stratégie de correction de la trajectoire afin que cette dernière reste confinée dans une fenêtre définie par une amplitude maximale pour l'écart par rapport à la position de maintien à poste. Cette stratégie doit minimiser la consommation de carburant pour assurer une durée de vie maximale du satellite.

Afin de réaliser les corrections d'orbite nécessaires pour le maintien à poste, les satellites sont équipés de propulseurs. Depuis la conception des premiers satellites, les systèmes de propulsion chimique sont largement utilisés pour bénéficier du fort niveau de poussée que ce type de système propulsif procure. L'analyse des corrections par des propulseurs à poussée électrique est menée depuis la fin des années soixante-dix, mais ils ont peu été utilisés à cause du faible niveau de poussée de ce type de système propulsif. Cependant, bien que la poussée produite par les systèmes propulsifs chimiques soit plus importante que la poussée produite par les systèmes propulsifs électriques, ces derniers disposent d'une impulsion spécifique, autrement dit un rendement, plus élevée que les premiers, réduisant ainsi la masse de carburant nécessaire pour réaliser le maintien à poste. Grâce à sa grande

impulsion spécifique, la technologie des systèmes de propulsion à poussée faible est devenue compétitive par rapport à la technologie traditionnelle des propulseurs chimiques à poussée forte. Cela induit toutefois de revoir en profondeur les stratégies de correction utilisées pour minimiser la consommation de carburant embarqué.

Le satellite considéré pour cette étude doit être maintenu à poste sur une orbite géostationnaire et est équipé d'un système de propulsion à poussée faible mis au point dans les années quatre-vingt-dix. Pour des raisons de simplicité, les profils de poussée produits par les propulseurs utilisés sont modélisés par des profils tout ou rien, et du fait de l'utilisation de propulseurs électriques, l'amplitude de la poussée est limitée. Puisque la puissance électrique nécessaire pour le fonctionnement des propulseurs est fournie à la plate-forme satellite par les panneaux solaires et est donc limitée, il n'est pas possible d'utiliser deux propulseurs simultanément. De plus, afin de permettre une recharge efficace des batteries, un temps de latence doit être respecté entre deux poussées. Afin de valider les stratégies obtenues, les algorithmes mis en place seront également testés sur un satellite équipé d'un système propulsif idéalisé, pour lequel chaque face est équipée d'un propulseur.

Le problème de maintien à poste s'écrit sous la forme d'un problème de minimisation de la consommation de la stratégie de correction mise en place sous une contrainte dynamique prenant en compte les perturbations orbitales. La contrainte de limiter l'excursion du satellite en latitude et en longitude s'écrit mathématiquement sous la forme de contrainte sur le vecteur d'état du satellite, tandis que la prise en compte du caractère limité de la poussée des propulseurs se traduit par des contraintes sur le vecteur de contrôle. Les contraintes opérationnelles de disjonctions des poussées et de temps de latence sont des contraintes sur les paramètres du profil de commande. Le problème de maintien à poste s'exprime ainsi sous la forme d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état, sur le contrôle et sur la structure de la commande. L'objectif du travail présenté dans ce manuscrit est de mettre en place des stratégies de résolution de ce problème complexe de contrôle optimal au travers des chapitres suivants.

Le premier chapitre présente la représentation d'état choisie pour la description du mouvement du satellite par les équations de la dynamique en vol libre d'une part, et de la dynamique modifiée par les accélérations produites par les propulseurs. Puisque le satellite doit rester au voisinage du point à la longitude de stationnement, il est naturel de linéariser la dynamique par rapport à ce point. Par ailleurs, puisque les contraintes de maintien à poste sont exprimées en termes de latitude et longitude, les équations de calcul de la position géographique en fonction des éléments orbitaux équinoxiaux sont linéarisées par rapport à la position de maintien à poste. Le problème de contrôle optimal de maintien à poste à consommation minimale est ensuite dérivé à partir de la transcription mathématique des contraintes de maintien à poste et des contraintes opérationnelles. Puisque le problème de maintien à poste est résolu numériquement, les méthodes de résolution numérique des problèmes de contrôle optimal avec des contraintes sur l'état sont passées en revue.

Le deuxième chapitre propose la résolution analytique d'un problème simplifié pour lequel les perturbations orbitales sont retirées. Comme dans ce cas, le mouvement dans le plan de l'équateur et perpendiculairement à ce plan sont découplées, il est possible de résoudre le problème hors-plan seul. Pour ce problème, le système propulsif n'est constitué que de deux propulseurs orientés dans la direction Nord-Sud, et les contraintes opérationnelles ne sont pas prises en compte. Les contraintes de maintien à poste sont considérées dans un

premier temps comme des contraintes finales pour définir un problème dit de résonance. Dans un deuxième temps, les contraintes de maintien à poste sont écrites sous la forme de contraintes inégalité sur l'état et le problème de contrôle optimal est résolu avec une méthode indirecte étendue pour prendre en compte les contraintes sur l'état. L'intérêt de la résolution de ces problèmes réside dans le fait de montrer que le caractère borné de la poussée permet de définir des régions de l'espace pour les conditions initiales pour lesquelles le maintien à poste ne peut pas être assuré. Les solutions numériques calculées dans les chapitres suivants respectent les conditions nécessaires dérivées dans ce chapitre.

Le troisième chapitre met en œuvre une stratégie de résolution basée sur des méthodes indirectes. L'objectif de cette stratégie est de contourner les difficultés posées par les contraintes opérationnelles sur le signal de poussée tout en exploitant des conditions d'optimalité. L'approche proposée est une décomposition en trois étapes. La première étape consiste à résoudre un problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles. A partir de la solution continue obtenue, le nombre de poussées nécessaires pour résoudre le problème de maintien à poste est déterminé au moyen de fonctions seuil. La deuxième étape consiste en la résolution de problèmes d'équivalence pour créer une séquence de poussées qui respecte les contraintes opérationnelles. La troisième étape utilise le formalisme des systèmes à commutation pour optimiser la valeur des instants d'allumage et d'extinction des propulseurs tout en assurant que les contraintes de maintien à poste d'une part et les contraintes opérationnelles d'autre part sont respectées. La méthode est appliquée sur un problème de rendez-vous képlérien puis sur le problème de maintien à poste complet sur une horizon court de 1 semaine.

Le quatrième chapitre décrit une méthode de résolution alternative basée sur des méthodes directes. La propulsion électrique étant modélisée par un signal de type tout ou rien, des variables binaires sont utilisées pour paramétrer les profils de commande de chaque propulseur. Ces derniers sont discrétisés sur l'horizon temporel de résolution, ce qui permet de transformer le problème de contrôle optimal initial en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie par l'utilisation de la transition du mouvement. Une transition formelle étant difficilement calculable, elle a été obtenue de façon numérique. Plusieurs méthodes d'intégration ont été analysées. Cette méthode de résolution est appliquée d'une part sur un problème de maintien à poste pour un satellite équipé d'un système de propulsion idéal avec un propulseur par face, et d'autre part au problème de maintien à poste complet.

Le cinquième chapitre propose une technique de résolution du problème de maintien à poste sur un horizon long d'une durée d'un an par résolutions successives sur des horizons courts d'une durée de l'ordre de la semaine. Comme la loi de contrôle déterminée sur l'horizon court ne permet pas d'anticiper l'effet des perturbations sur l'horizon court suivant, des contraintes *ad-hoc* ont été ajoutées au problème afin d'assurer que le problème de commande optimale contraint admette des solutions sur l'horizon suivant.

La conclusion propose une comparaison des deux approches proposées pour la résolution du problème de maintien à poste à consommation minimale sur un horizon court ainsi qu'un bilan sur la solution du problème de maintien à poste sur un horizon long d'un an. Enfin, des perspectives ouvertes par les résultats proposés sont présentées.

Maintien à poste d'un satellite géostationnaire

Personne ne remarque ce qui marche trop bien.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Sommaire

1.1	Introduction	16
1.2	Mécanique orbitale	17
1.2.1	Le mouvement képlérien	17
1.2.1.1	Équation du mouvement képlérien	17
1.2.1.2	Trajectoire képlérienne	18
1.2.1.3	L'orbite géostationnaire	19
1.2.2	Perturbations orbitales	19
1.3	Représentation d'état du mouvement	20
1.3.1	Représentation d'état cartésienne	20
1.3.2	Représentation d'état en éléments orbitaux	20
1.3.2.1	Éléments orbitaux classiques	20
1.3.2.2	Éléments orbitaux équinoxiaux	23
1.3.3	Position géographique	25
1.3.3.1	Expression du rayon r	25
1.3.3.2	Expression de la longitude λ	25
1.3.3.3	Expression de la latitude φ	27
1.3.3.4	Expression du vecteur position	27
1.3.4	Équations d'évolution régissant le système	28
1.4	Problème de maintien à poste sous forme de contrôle optimal	29
1.4.1	Contraintes sur le problème de maintien à poste	29
1.4.1.1	Expression des contraintes de maintien à poste en termes de paramètres géographiques relatifs	29
1.4.1.2	Expression des contraintes de maintien à poste en termes d'éléments orbitaux relatifs	31

1.4.2	Modélisation du système propulsif	34
1.4.2.1	Moteurs à propulsion électrique	34
1.4.2.2	Contraintes liées à l'utilisation de la poussée faible	36
1.4.3	Expression sous forme de contrôle optimal	40
1.4.3.1	Fonctionnelle de coût à minimiser	40
1.4.3.2	Problème de maintien à poste optimal à consommation minimale	41
1.5	Contrôle optimal avec contraintes sur l'état	42
1.5.1	Problème de contrôle optimal de Bolza	42
1.5.1.1	Méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal	44
1.5.2	Méthodes directes et contraintes sur l'état	45
1.5.3	Méthodes indirectes et contraintes sur l'état	48
1.5.3.1	Les méthodes indirectes	48
1.5.3.2	Prise en compte des contraintes sur l'état via une méthode de pénalisation	51
1.5.3.3	Extension du PMP pour les contraintes sur l'état	52
1.6	Conclusion	56

1.1 INTRODUCTION

L'étude de la dynamique d'un corps en orbite autour de la Terre a commencé avec l'étude de l'équation de la gravitation donnée par Newton et les trois lois de Kepler qui permettent de décrire le mouvement d'un corps en orbite autour d'une Terre supposée sphérique et homogène. Ce mouvement est appelé mouvement képlérien. Pour les applications spatiales telles que le maintien à poste, ce seul mouvement képlérien ne suffit pas à rendre compte de la trajectoire du satellite autour de la Terre, et il est nécessaire d'inclure les perturbations orbitales – le potentiel d'attraction créé par une Terre non homogène, le potentiel d'attraction de la Lune, le potentiel d'attraction du Soleil et la pression de radiation solaire – dans le modèle dynamique.

L'objet d'étude de ce travail est le maintien à poste de satellites en orbite géostationnaires. A cause des perturbations orbitales, le satellite tend à s'éloigner continuellement de la position sur orbite qui lui a été assignée. Le satellite doit alors être équipé de propulseurs afin de corriger sa trajectoire et rester dans une fenêtre de maintien à poste admissible.

A partir de l'étude du mouvement képlérien et des perturbations orbitales, un modèle dynamique du mouvement du satellite est constitué. Le vecteur d'état est constitué de la position et la vitesse cartésienne ou des éléments orbitaux et le vecteur de commande est constitué de la poussée des propulseurs. Puisque le satellite doit rester à proximité d'une trajectoire géostationnaire, le modèle dynamique peut être linéarisé autour de cette trajectoire de référence. Dans le cas simplifié sans perturbations orbitales, la linéarisation du mouvement du satellite par rapport à la position de maintien à poste mène aux équations de Hill-Clohessy-Wiltshire. Dans le cas où toutes les perturbations orbitales sont considérées, le mouvement du satellite est linéarisé par rapport à une trajectoire de référence idéale géostationnaire.

Après avoir modélisé la physique orbitale à laquelle un satellite géostationnaire est soumis, défini un vecteur d'état et extrait de ces informations un modèle d'évolution à

la fois linéaire et non linéaire, l'objectif de ce chapitre est de traduire le problème de maintien à poste en termes mathématiques. La première partie traduit les contraintes de maintien à poste en contraintes sur le vecteur d'état et des contraintes opérationnelles inhérentes à l'utilisation de la poussée faible en contraintes sur le vecteur de contrôle, définit la fonctionnelle à minimiser dans le but de réduire la consommation nécessaire, et traduit le problème de maintien à poste en un problème de contrôle optimal.

Les problèmes de contrôle optimal avec contraintes sur l'état sont en général difficiles à résoudre. Les méthodes directes, qui utilisent un maillage temporel et une discrétisation des vecteurs d'état et de contrôle, ne permettent pas d'imposer les contraintes entre deux nœuds. Les méthodes indirectes, basées sur le calcul des variations, ne peuvent prendre en compte les contraintes sur l'état qu'au travers de multiplicateurs, qui ne peuvent être exprimés explicitement que dans des cas simples.

Les stratégies de maintien à poste utilisées dans la littérature reposent sur une analyse physique du problème de maintien à poste et des perturbations orbitales. Un récapitulatif donne les grandes lignes des stratégies existantes dans la littérature.

1.2 MÉCANIQUE ORBITALE

1.2.1 LE MOUVEMENT KÉPLÉRIEN

Les équations képlériennes du mouvement ainsi que la forme de la trajectoire sont rappelées dans cette section, et certaines notations utilisées dans toute la suite de ce mémoire sont présentées (voir par exemple les références [Battin, 1999], [Sidi, 1997] ou [Vallado, 1997]).

1.2.1.1 ÉQUATION DU MOUVEMENT KÉPLÉRIEN

En première approximation, la Terre peut être considérée comme un corps dont la répartition de masse est à symétrie sphérique et dont l'attraction gravitationnelle est la seule force considérée. Un satellite évoluant dans ce champ de gravité subit une force qui suit la loi de la gravitation de Newton :

$$\vec{F}_g = -\frac{\mathcal{G}m_{\oplus}m_{\text{sat}}}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.1)$$

avec :

- \mathcal{G} , la constante de gravitation,
- m_{\oplus} la masse de la Terre,
- m_{sat} la masse du satellite,
- \vec{r} le vecteur centre de la Terre - satellite,
- r , sa norme.

Le paramètre gravitationnel standard géocentrique est défini par : $\mathcal{G}m_{\oplus} = \mu_{\oplus}$.

Selon la seconde loi de Newton, la variation de quantité de mouvement du satellite est égal à la somme des forces exercées sur le satellite. Comme toutes les forces autres que l'attraction gravitationnelle de la Terre ont été négligées, une seule force s'applique sur

le satellite. Par ailleurs, on suppose que la masse du satellite reste constante au cours du temps. On peut alors écrire dans le repère inertiel géocentrique supposé galiléen (voir figure A.1 page 220) les équations du mouvement :

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.2)$$

Cette équation différentielle décrit le mouvement du satellite et de la Terre autour du centre de masse du système {Terre-satellite}. En supposant la masse du satellite très faible devant celle de la Terre, le centre de masse du système {Terre-satellite} est confondu avec le centre de masse de la Terre. Ainsi, l'équation (1.2) décrit le mouvement du satellite autour de la Terre. Ce mouvement est appelé mouvement képlérien.

1.2.1.2 TRAJECTOIRE KÉPLÉRIENNE

On peut montrer que la solution de l'équation (1.2) est une conique. En utilisant un paramétrage polaire, on peut écrire l'équation de la conique sous la forme :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu)}, \quad (1.3)$$

où a est le demi grand axe de la conique, e son excentricité, et ν est le paramétrage angulaire. a et e décrivent la forme de la conique. En particulier, la valeur de e détermine le type de conique :

- si $0 \leq e < 1$, la conique est une ellipse (ou un cercle dans le cas limite $e = 0$),
- si $e = 1$, la conique est une parabole,
- si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

Ce n'est que dans le premier cas que la trajectoire est bornée et le mouvement périodique. C'est pourquoi nous considérons dans toute la suite de cette étude des trajectoire pour lesquelles l'excentricité est strictement plus petite que 1.

Il est également possible d'introduire le demi petit-axe b , relié au demi grand-axe par la relation :

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (1.4)$$

Dans le cas où $e < 1$, la trajectoire étant fermée, une période orbitale peut être définie sous la forme :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\oplus}}}. \quad (1.5)$$

On définit le mouvement moyen comme :

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}}. \quad (1.6)$$

Les formules de conversion entre la position et la vitesse du satellite et les éléments définissant la forme de l'ellipse sont données dans l'annexe C page 255.

1.2.1.3 L'ORBITE GÉOSTATIONNAIRE

Dans le cas des trajectoires fermées pour lesquelles le satellite orbite autour de la Terre, les orbites sont classés en différentes catégories :

- les orbites basses (LEO, *Low Earth Orbits*), pour une altitude inférieure à 800 km ($a < 7178$ km),
- les orbites moyennes (MEO, *Mid-Earth Orbits*), pour une altitude comprise entre 800 km et 30 000 km ($7178 \text{ km} < a < 36378$ km),
- les orbites géosynchrones, pour lesquelles la période de révolution du satellite sur son orbite est égale à la période de rotation de la Terre,
- l'orbite géostationnaire (GEO, *Geostationary Earth Orbit*) pour laquelle le satellite reste à la verticale d'un même point. L'orbite géostationnaire est une orbite géosynchrone d'inclinaison et d'excentricité nulle.

Remarque 1.1. Il est possible de calculer le demi-grand axe géostationnaire à partir de l'équation (1.5) qui permet d'écrire :

$$a = \left(\frac{\mu_{\oplus} T_{\oplus}^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.7)$$

Avec la période sidérale de rotation de la Terre $T_{\oplus} = 86\,164$ s et le paramètre gravitationnel standard géocentrique $\mu_{\oplus} = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, il vient : $a = 42\,164,125$ km.

La vitesse sur une orbite circulaire se calcule selon la relation :

$$v = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a}}. \quad (1.8)$$

Avec l'expression de a obtenue précédemment, la vitesse d'un satellite en orbite géostationnaire est : $v = 3,071$ km/s. Ces valeurs de référence serviront pour des applications numériques dans le cadre de l'analyse de stratégies de maintien à poste.

1.2.2 PERTURBATIONS ORBITALES

Sous le terme de « perturbations orbitales » sont regroupées toutes les forces que subit un satellite en orbite autour de la Terre autres que la force centrale de la Terre supposée à répartition de masse à symétrie sphérique. Parmi ces forces, les références [Valorge, 1995] et [Vallado, 1997] distinguent :

- la partie du potentiel de gravitation terrestre liée à une répartition de masse qui n'est pas à symétrie sphérique : le mouvement képlérien suppose que la Terre est à symétrie sphérique, mais ceci n'est qu'une approximation et les irrégularités du potentiel doivent être prises en compte,
- l'attraction du Soleil et de la Lune : ces deux corps exercent également une attraction gravitationnelle sur le satellite,
- la pression de radiation solaire : les photons émis par le Soleil sont absorbés par le satellite et réémis, ce qui induit une modification de la quantité de mouvement du satellite,

- le frottement atmosphérique : pour les satellites en orbite basse, l'atmosphère résiduelle entraîne un frottement sur le satellite.

La référence [Valorge, 1995] présente également d'autres forces perturbatrices comme les effets de marée ou de relativité générale. Dans le cadre d'un satellite en orbite géostationnaire, la référence [Shrivastava, 1978] retient les trois premières perturbations.

1.3 REPRÉSENTATION D'ÉTAT DU MOUVEMENT

Le système étudié est constitué d'un satellite en orbite assimilé à un point matériel et soumis à la force d'attraction centrale et les perturbations orbitales présentées dans la partie précédente. La description complète du mouvement dynamique nécessite la connaissance de six coordonnées généralisées ou de six paramètres constituant le vecteur d'état. Différentes représentations d'état existent dans la littérature pour décrire le mouvement. L'apparition possible de singularités dans les équations du mouvement, la simplicité d'écriture des propriétés apparentes (découplage, dynamique temps invariant, etc.) ou encore la volonté de travailler avec des variables canoniques par exemple permettent d'orienter le choix de l'une ou l'autre de ces représentations d'état. Dans cette partie, le vecteur d'état du satellite est écrit en utilisant la position et la vitesse cartésiennes (appelés par la suite paramètres cartésiens) d'une part, les éléments orbitaux classiques d'autre part, et enfin les éléments orbitaux équinoxiaux. De nombreux autres types d'éléments orbitaux existent, et sont présentés dans la référence [Hintz, 2008].

1.3.1 REPRÉSENTATION D'ÉTAT CARTÉSIENNE

L'état du satellite est représenté par sa position et sa vitesse dans le repère géocentrique inertielle illustré sur la figure A.1 page 220 et sont écrits de la façon suivante :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}^T = x\vec{u}_{X_G} + y\vec{u}_{Y_G} + z\vec{u}_{Z_G}, \quad (1.9)$$

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}^T = \dot{x}\vec{u}_{X_G} + \dot{y}\vec{u}_{Y_G} + \dot{z}\vec{u}_{Z_G}. \quad (1.10)$$

Le vecteur d'état du satellite s'écrit en paramètres cartésiens :

$$x_{\text{cart}}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (1.11)$$

1.3.2 REPRÉSENTATION D'ÉTAT EN ÉLÉMENTS ORBITAUX

1.3.2.1 ÉLÉMENTS ORBITAUX CLASSIQUES

Dans le cas où le satellite ne subit que la force d'attraction centrale, la trajectoire est une conique. Dans le cas où la trajectoire est périodique, cette conique est une ellipse (ou un cercle dans le cas limite où l'excentricité est nulle). La trajectoire peut alors être simplement représentée par :

- deux paramètres qui décrivent la forme de l'ellipse :

- ◇ le demi grand-axe a ,
- ◇ l'excentricité e ,
- trois paramètres qui décrivent l'orientation de l'ellipse dans l'espace :
 - ◇ l'inclinaison i de l'orbite par rapport au plan de l'écliptique,
 - ◇ l'ascension droite du nœud ascendant Ω : angle dans le plan de l'équateur entre le point vernal et le point d'intersection de l'orbite avec le plan de l'écliptique dans le « sens montant » (nœud ascendant),
 - ◇ l'argument du périhélie ω : angle dans le plan de l'orbite entre le nœud ascendant et le périhélie,
- un paramètre appelé anomalie qui rend compte de la position du satellite sur son orbite au cours du temps.

Ces six paramètres sont appelés éléments orbitaux képlériens ou éléments orbitaux classiques (voir [Battin, 1999]). La signification physique de ces éléments orbitaux est représentée sur le schéma de la figure 1.1. L'information du mouvement moyen n du satellite sur son orbite est généralement associée à ces éléments orbitaux :

$$n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}}, \quad (1.12)$$

Trois types d'anomalies peuvent être introduites pour décrire la position du satellite sur son orbite au cours du temps :

- l'anomalie vraie ν ,
- l'anomalie excentrique E ,
- l'anomalie moyenne M .

L'anomalie vraie ν est l'angle entre la direction du périhélie et la direction du rayon vecteur \vec{r} .

L'anomalie excentrique est un angle défini à l'aide du cercle circonscrit à l'ellipse dont le diamètre est le demi-grand axe, de la façon illustrée sur la figure 1.2. Le sinus, le cosinus et la tangente de l'anomalie excentrique sont reliés au sinus, au cosinus et à la tangente de l'anomalie vraie avec les relations données par les équations (C.10).

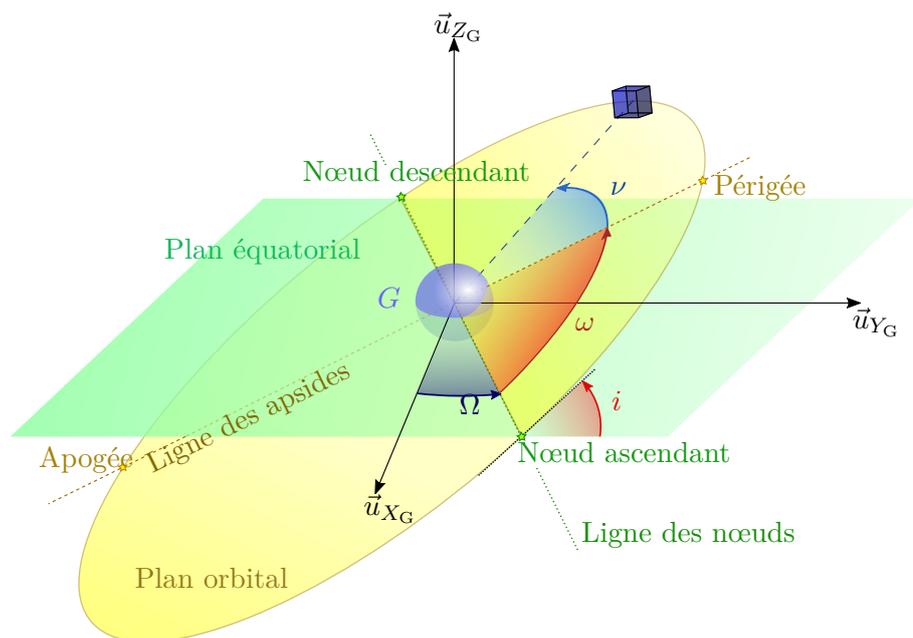


FIGURE 1.1 – Illustrations des éléments orbitaux classiques

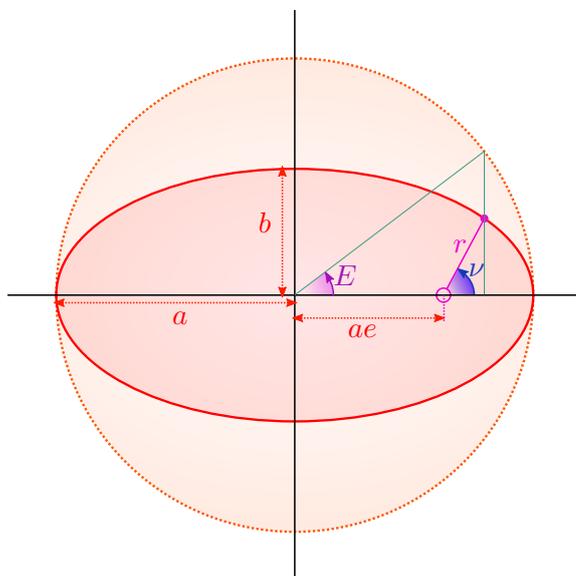


FIGURE 1.2 – Anomalie excentrique et anomalie vraie

L'anomalie moyenne correspond à la position d'un corps qui se déplacerait à vitesse constante sur le cercle auxiliaire circonscrit à l'ellipse, avec une période égale à celle du corps réel. L'anomalie moyenne est donc liée au temps par la relation :

$$M(t) = M(t_0) + n(t - t_0). \quad (1.13)$$

Les anomalies excentrique et moyenne sont reliées par l'équation de Kepler :

$$E - e \sin E = M. \quad (1.14)$$

Cette équation transcendante n'admet pas de solution simple. Une solution approchée peut être calculée de façon itérative avec la méthode de Newton par exemple ([Battin, 1999]). Dans le cas où l'excentricité e est petite, [Hull, 2003] présente une méthode de calcul approchée qui est reproduite en annexe E page 273.

Un vecteur d'état peut être défini avec les éléments orbitaux classiques :

$$x_{\text{EOC}}(t) = \begin{bmatrix} a \\ e \\ i \\ \Omega \\ \omega \\ \nu(t) \text{ ou } E(t) \text{ ou } M(t) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

et dans toute la suite, l'anomalie choisie comme sixième paramètre est l'anomalie moyenne M . Il vient alors :

$$x_{\text{EOC}}(t) = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M(t)]^T. \quad (1.16)$$

Les formules de conversion entre les paramètres cartésiens (position et vitesse exprimées dans le repère géocentrique inertiel) et les éléments orbitaux cartésiens sont données dans l'annexe C.

1.3.2.2 ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX

Les éléments orbitaux classiques définis précédemment présentent deux cas singuliers :

- lorsque l'orbite est circulaire, l'excentricité est nulle et l'argument du périégée ω n'est pas défini (car le périégée n'est pas défini) ;
- lorsque l'orbite est dans le plan de l'équateur, l'inclinaison est nulle et l'ascension droite du nœud ascendant n'est pas définie (car le nœud ascendant n'est pas défini).

De nouveaux éléments orbitaux sont alors introduits pour palier ces cas singuliers. Il s'agit des éléments orbitaux équinoxiaux :

$$\begin{cases} a \\ e_x = e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y = e \sin(\omega + \Omega) \\ i_x = \tan(i/2) \cos(\Omega) \\ i_y = \tan(i/2) \sin(\Omega) \\ \text{anomalie équinoxiale} \end{cases} \quad (1.17)$$

(e_x, e_y) est appelé le vecteur excentricité et (i_x, i_y) est appelé le vecteur inclinaison.

Dans les références [Battin, 1999] et [Cefola, 1972], une définition des paramètres équinoxiaux peut être trouvée pour laquelle e_x et e_y sont inversés, de même que i_x et i_y . Le

vecteur inclinaison est parfois défini sous les formes alternatives :

$$\begin{cases} i_x = \sin(i/2) \cos(\Omega), \\ i_y = \sin(i/2) \sin(\Omega), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} i_x = \sin(i) \cos(\Omega), \\ i_y = \sin(i) \sin(\Omega). \end{cases} \quad (1.18)$$

Les anomalies pour les paramètres équinoxiaux sont généralement appelées longitude dans la littérature (voir [Battin, 1999] par exemple) : longitude vraie L , longitude moyenne l , et longitude excentrique K . Par soucis de clarté, et pour minimiser les risques de confusion avec la longitude géographique, ces paramètres sont renommés et réécrits de la façon suivante :

- longitude vraie : $L \rightarrow$ anomalie équinoxiale vraie : $\nu_Q = \Omega + \omega + \nu$,
- longitude moyenne : $l \rightarrow$ anomalie équinoxiale moyenne : $M_Q = \Omega + \omega + M$,
- longitude excentrique : $K \rightarrow$ anomalie équinoxiale excentrique : $E_Q = \Omega + \omega + E$.

On définit en outre trois autres paramètres angulaires qui seront appelés longitude vraie $\ell_{\nu\Theta}$, longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$ et longitude excentrique $\ell_{E\Theta}$ définis par :

$$\begin{aligned} \ell_{\nu\Theta} &= \Omega + \omega + \nu - \Theta = \nu_Q - \Theta, \\ \ell_{M\Theta} &= \Omega + \omega + M - \Theta = M_Q - \Theta, \\ \ell_{E\Theta} &= \Omega + \omega + E - \Theta = E_Q - \Theta. \end{aligned} \quad (1.19)$$

$\Theta(t)$ peut être considérée comme l'ascension droite du méridien de Greenwich et est définie par l'équation (A.4), page 220.

Nous choisissons de remplacer le sixième paramètre équinoxial par la longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$ pour donner le vecteur d'état suivant :

$$x_{\text{EOE}}(t) = \begin{bmatrix} a & e_x & e_y & i_x & i_y & \ell_{M\Theta}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (1.20)$$

L'intérêt de ce choix sera explicité dans la sous section 1.3.3 avec l'expression des coordonnées géographiques en fonction des paramètres équinoxiaux.

En résumé, les anomalies et longitudes introduites ici sont résumées dans le tableau 1.1.

Anomalie équinoxiale vraie	$\nu_Q = \Omega + \omega + \nu$
Anomalie équinoxiale moyenne	$M_Q = \Omega + \omega + M$
Anomalie équinoxiale excentrique	$E_Q = \Omega + \omega + E$
Longitude géographique	λ
Longitude vraie	$\ell_{\nu\Theta} = \nu_Q - \Theta$
Longitude moyenne	$\ell_{M\Theta} = M_Q - \Theta$
Longitude excentrique	$\ell_{E\Theta} = E_Q - \Theta$

TABLE 1.1 – Tableau récapitulatif des anomalies équinoxiales et longitudes introduites dans cette sous section.

1.3.3 POSITION GÉOGRAPHIQUE

La position du satellite dans l'espace peut être repérée à l'aide des coordonnées géographiques données comme le rayon r , la longitude λ et la latitude φ . Il s'agit donc de trouver la fonction g telle que :

$$y(t) = \begin{bmatrix} r(t) & \varphi(t) & \lambda(t) \end{bmatrix}^T = g(x_{\text{EOE}}, t). \quad (1.21)$$

1.3.3.1 EXPRESSION DU RAYON r

Le rayon vecteur r s'exprime en éléments orbitaux équinoxiaux selon (voir [Battin, 1999]) :

$$r = a(1 - e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q), \quad (1.22)$$

et fait intervenir l'anomalie équinoxiale excentrique E_Q . Il faut chercher à l'exprimer en fonction de la longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$. Pour ce faire, il est possible d'utiliser l'équation de Kepler en paramètres orbitaux équinoxiaux :

$$E_Q + e_y \cos E_Q - e_x \sin E_Q = \ell_{M\Theta} + \Theta(t) = \kappa(t). \quad (1.23)$$

Cette équation transcendante peut être résolue en E_Q à l'aide de la méthode présentée dans [Hull, 2003] dans le cas où e_x et e_y sont petits et décrite dans l'annexe E.2.3 page 277. Ceci permet d'obtenir :

$$\cos E_Q = \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) = \cos \kappa(t), \quad (1.24a)$$

$$\sin E_Q = \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) = \sin \kappa(t). \quad (1.24b)$$

et en remplaçant dans l'expression du rayon :

$$r = a \left(1 - e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) - e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) \right) = a \left(1 - e_x \cos \kappa(t) - e_y \sin \kappa(t) \right). \quad (1.25)$$

1.3.3.2 EXPRESSION DE LA LONGITUDE λ

La longitude du satellite est représentée sur la figure 1.3. Elle s'exprime sous la forme :

$$\lambda = \Omega + f - \Theta. \quad (1.26)$$

On cherche alors à exprimer f en fonction des paramètres orbitaux. Les relations de trigonométrie sphérique donnent :

$$\begin{aligned} \cos f &= \cos \varphi \cos(\omega + \nu) + \sin \varphi \sin(\omega + \nu) \cos j, \\ \cos j &= \sin i \cos f, \quad \sin \varphi = \sin(\omega + \nu) \sin i, \\ \sin f &= \sin(\omega + \nu) \sin j, \quad \sin j \cos(\omega + \nu) = \cos i \cos f. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Les orbites considérées étant des orbites géostationnaires perturbées, on considère que

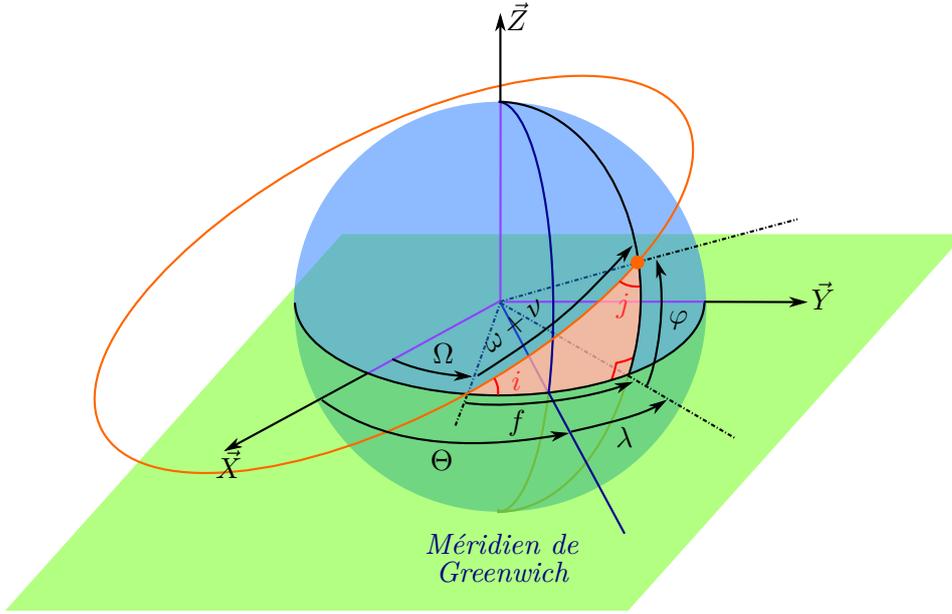


FIGURE 1.3 – Illustration des relations entre les paramètres orbitaux et les coordonnées géographiques

l'inclinaison i est petite, et par conséquent que la latitude φ du satellite est petite. On obtient alors à partir des relations précédentes, en restant à l'ordre 1 en φ :

$$\cos f = \frac{\cos \varphi \cos(\omega + \nu)}{1 - \sin^2 \varphi} \simeq \frac{\cos(\omega + \nu)}{1 - \varphi^2} \simeq \cos(\omega + \nu) [1 + \varphi^2] \simeq \cos(\omega + \nu), \quad (1.28)$$

et en restant à l'ordre 1 en i :

$$\begin{aligned} \sin f &= \sin(\omega + \nu) \cos i \frac{\cos f}{\cos(\omega + \nu)} \simeq \sin(\omega + \nu) \cos i, \\ &\simeq \sin(\omega + \nu). \end{aligned} \quad (1.29)$$

On obtient donc :

$$f \simeq \omega + \nu, \quad (1.30)$$

et par conséquent :

$$\lambda \simeq \Omega + \omega + \nu - \Theta = \nu_Q - \Theta = \ell_{\nu\Theta}. \quad (1.31)$$

Dans le même contexte, il est possible de supposer que l'excentricité e est petite. L'anomalie vraie peut alors être exprimée en fonction de l'anomalie moyenne avec l'équation de Kepler (1.14) et la transformation entre anomalie vraie et excentrique (C.10). Avec la méthode de [Hull, 2003], il s'agit de résoudre $f(\nu; e) = 0$ pour e petit et :

$$f(\nu; e) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - e \sin \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) \right] - M. \quad (1.32)$$

En utilisant l'équation (E.18) et en réinjectant la définition de $\ell_{\nu\Theta}$ et $\ell_{M\Theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\lambda &= \ell_{M\Theta} + 2e_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) - 2e_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \\ &= \ell_{M\Theta} + 2e_x \sin \kappa(t) - 2e_y \cos \kappa(t).\end{aligned}\quad (1.33)$$

A l'ordre 0 en e_x et e_y , on obtient $\lambda = \ell_{M\Theta}$. Ceci justifie le choix du sixième paramètre équinoxial qui a été fait dans la section 1.3.2.2 pour avoir une grandeur qui se rapproche le plus de la longitude géographique.

1.3.3.3 EXPRESSION DE LA LATITUDE φ

Si la Terre est considérée comme sphérique et si l'inclinaison de l'orbite est faible, alors φ est petit et il est possible d'écrire (voir figure 1.3) :

$$\varphi \simeq \sin \varphi = \sin(\omega + \nu) \sin i. \quad (1.34)$$

Or, sous l'hypothèse d'une inclinaison petite, l'approximation suivante peut être faite :

$$\sin i \simeq 2 \tan \frac{i}{2}. \quad (1.35)$$

il vient alors en associant (1.34) et (1.35) :

$$\varphi = 2 \sin(\nu_Q - \Omega) \tan \frac{i}{2},$$

et :

$$\varphi = 2i_x \sin \nu_Q - 2i_y \cos \nu_Q. \quad (1.36)$$

Or d'après l'équation (E.18), on peut écrire à l'ordre 0 en e :

$$\nu = M. \quad (1.37)$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\varphi &= 2i_x \sin M_Q - 2i_y \cos M_Q, \\ &= 2i_x \sin \kappa(t) - 2i_y \cos \kappa(t).\end{aligned}\quad (1.38)$$

1.3.3.4 EXPRESSION DU VECTEUR POSITION

Avec ce qui a été établi dans les paragraphes précédents, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}y(x_{\text{EOE}}, t) &= \begin{bmatrix} 1 & -a \cos(\kappa(t)) & -a \sin(\kappa(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin(\kappa(t)) & -2 \cos(\kappa(t)) & 0 \\ 0 & 2 \sin(\kappa(t)) & -2 \cos(\kappa(t)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_{\text{EOE}} \\ &= T(x_{\text{EOE}}, t) x_{\text{EOE}},\end{aligned}\quad (1.39)$$

en rappelant que $\kappa(t) = \ell_{M\Theta} + \Theta(t)$.

1.3.4 ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION RÉGISSANT LE SYSTÈME

L'annexe B.1 décrit l'évolution libre d'un satellite en orbite géostationnaire soumis au potentiel gravitationnel de la Terre, à l'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil ainsi qu'à la pression de radiation solaire, et l'annexe B.2 décrit l'évolution contrôlée d'un satellite, c'est-à-dire l'évolution de ce satellite sous l'effet de l'accélération produite par les propulseurs. Comme le satellite doit rester à proximité de sa position de maintien à poste, il est possible de linéariser les équations de la dynamique par rapport à ce point de maintien poste évoluant sur une orbite géostationnaire.

Comme la dynamique de l'écart entre la position du satellite et la position de maintien à poste est linéarisée, d'après le principe de superposition, si l'on ajoute les perturbations orbitales naturelles et la perturbation induite par les propulseurs, il est possible de décrire la dynamique complète du satellite.

Puisque les perturbations naturelles dérivent d'un potentiel, ces dernières sont prises en compte dans la dynamique au travers des équations planétaires de Lagrange. L'accélération produite par les propulseurs est quant à elle prise en compte au travers des équations de Gauss. On peut ainsi écrire :

$$\frac{dx}{dt} = f_L(x, t) + f_G(x, t)u, \quad (1.40)$$

avec $f_L(x, t)$ le terme prenant en compte les perturbations orbitales naturelles, $f_G(x, t)$ le terme prenant en compte l'accélération des propulseurs u . Ce modèle constitue le modèle de simulation pour tester les lois de commande qui seront développées tout au long de cette étude.

De la même façon, le principe de superposition permet d'écrire pour le système linéaire :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x(t) + D(t) + B(t)u(t), \quad (1.41)$$

avec :

$$A(t) = \left. \frac{\partial}{\partial x} (f_L(x(t), t)) \right|_{x=x_{mp}}, \quad (1.42)$$

$$B(t) = f_G(x_{mp}, t), \quad (1.43)$$

$$D(t) = f_L(x_{mp}, t). \quad (1.44)$$

Ce modèle est le modèle de synthèse qui sera utilisé pour calculer les lois de commandes pour le maintien à poste du satellite géostationnaire.

L'expression analytique de la matrice $B(t)$ est donnée par l'équation (B.59) page 242.

La position géographique du satellite est calculée selon un modèle non linéaire :

$$y(t) = g(x(t), t) = T(x(t), t)x(t), \quad (1.45)$$

et est linéarisée par rapport à la position géographique d'un point fictif qui se déplace sur l'orbite géostationnaire (voir l'annexe B.3.1). L'écart entre les deux positions est écrit comme :

$$\Delta y(t) = C(t)\Delta x(t), \quad (1.46)$$

avec la matrice $C(t)$ définie par l'équation (B.82) page 248. Ces équations peuvent être considérées comme les équations de sorties puisque, comme cela sera explicité dans le chapitre suivant, la fenêtre de maintien à poste est exprimée en terme de latitude et de longitude géographiques.

Par ailleurs, la dérivée temporelle de cet écart géographique peut être également exprimée en fonction de l'écart Δx (voir l'annexe B.3.2) :

$$\frac{d\Delta y}{dt} = E(t)\Delta x + C(t)D(t) + C(t)B(t)u(t), \quad (1.47)$$

avec :

$$E(t) = 2[H(t)] + [C(t)][A(t)] + [\dot{C}(t)]. \quad (1.48)$$

1.4 PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE SOUS FORME DE CONTRÔLE OPTIMAL

1.4.1 CONTRAINTES SUR LE PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE

Le maintien à poste d'un satellite géostationnaire est étudié depuis les années 1960, que ce soit dans le cadre de propulseurs à poussée forte ou faible. Certaines stratégies s'appuient sur une analyse physique de la dynamique orbitale tandis que d'autres implantent des lois de régulation pour un contrôle autonome de maintien à poste. En général, les corrections à apporter pour corriger des perturbations hors plan de l'orbite (Nord-Sud) sont étudiées séparément des corrections à apporter pour corriger des perturbations dans le plan de l'orbite (Est-Ouest). Ce découplage vient du fait que les équations de Gauss présentent un découplage entre les corrections dans le plan de l'équateur et perpendiculaires à ce plan. De plus, comme l'inclinaison de l'orbite est principalement affectée par le potentiel d'attraction de la Lune et du Soleil tandis que la pression de radiation solaire affecte principalement le vecteur excentricité et la non sphéricité du potentiel terrestre affecte la longitude moyenne, il est possible d'analyser et corriger les effets de ces trois perturbations indépendamment. Dans cette section, des stratégies de maintien à poste à poussée forte et à poussée faible sont passées en revue.

Selon la référence [Sidi, 1997], la consommation de carburant pour les corrections hors plan à réaliser dans le cadre du maintien à poste d'un satellite géostationnaire est bien plus importante que la consommation pour les corrections à réaliser dans le plan de l'orbite, et justifie ainsi de s'intéresser d'abord au maintien à poste hors plan dans un premier temps puis au maintien à poste dans le plan de l'orbite.

Les deux sous-sections suivantes présentent les contraintes de maintien à poste qu'il est nécessaire de prendre en compte. L'annexe F décrit des stratégies de maintien à poste existantes qu'il est possible de trouver dans la littérature.

1.4.1.1 EXPRESSION DES CONTRAINTES DE MAINTIEN À POSTE EN TERMES DE PARAMÈTRES GÉOGRAPHIQUES RELATIFS

Pour des besoins opérationnels, certains satellites doivent rester à la verticale d'un point de la Terre positionné à une certaine longitude. Or, les forces orbitales perturbatrices

tendent à éloigner le satellite de cette position nominale. Il est ainsi nécessaire de mettre en œuvre des stratégies de maintien à poste du satellite autour de sa position nominale. On définit néanmoins une certaine tolérance sur la position du satellite par rapport au point de maintien à poste. Ces tolérances, exprimées en terme de latitude et de longitude, définissent la fenêtre de maintien à poste :

$$\varphi_{mp} - \delta \leq \varphi \leq \varphi_{mp} + \delta, \quad (1.49a)$$

$$\lambda_{mp} - \delta \leq \lambda \leq \lambda_{mp} + \delta, \quad (1.49b)$$

où λ_{mp} est la longitude de maintien à poste, φ_{mp} la latitude de maintien à poste et δ la demi-largeur de la fenêtre de maintien à poste en latitude et longitude (voir la figure 1.4). Selon [Campan et al., 1995], un ordre de grandeur classique de la taille des fenêtres de maintien à poste est $\pm 0,1^\circ$, ce qui correspond à environ 70 km. On considère alors : $\delta = 0,05^\circ$.

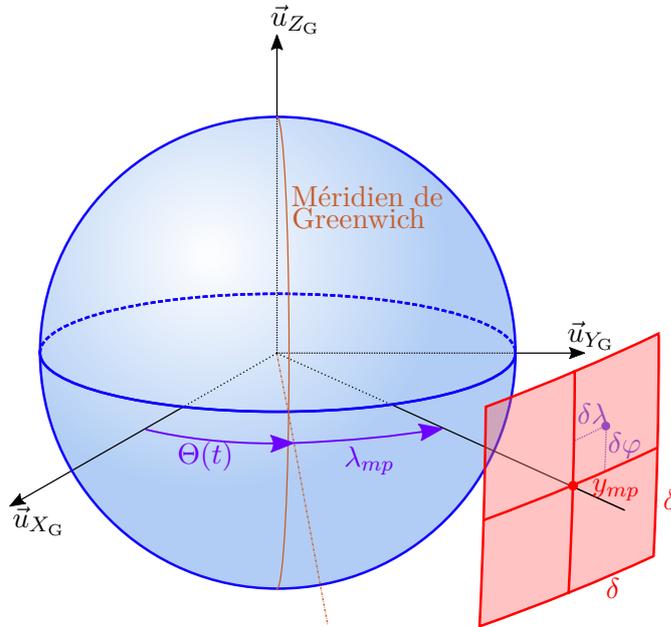


FIGURE 1.4 – Représentation de la fenêtre de maintien à poste dans l'espace.

En termes de position géographique relative par rapport au point de maintien à poste, les contraintes de maintien à poste s'écrivent sous la forme :

$$|\Delta\varphi| \leq \delta, \quad (1.50a)$$

$$|\Delta\lambda| \leq \delta. \quad (1.50b)$$

En omettant le Δ pour plus de lisibilité par la suite, les contraintes de maintien à poste s'écrivent pour la suite :

$$|\varphi| \leq \delta, \quad |\lambda| \leq \delta. \quad (1.51)$$

En exploitant l'équation de sortie (B.82), les contraintes (1.51) peuvent se réécrire en

fonction du vecteur d'état contenant les éléments orbitaux équinoxiaux relatifs :

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \quad \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta. \quad (1.52)$$

Aucune contrainte n'est imposée sur le rayon relatif au rayon de la position de maintien à poste. La raison de ceci est explicitée dans l'annexe F.1.2.3.

1.4.1.2 EXPRESSION DES CONTRAINTES DE MAINTIEN À POSTE EN TERMES D'ÉLÉMENTS ORBITAUX RELATIFS

Il est possible d'écrire les contraintes de maintien à poste en utilisant les éléments orbitaux équinoxiaux relatifs.

Tout d'abord, à partir des équations (1.46) page 28 et (B.82) page 248 (en omettant les symboles Δ pour les éléments orbitaux et la position géographiques relatifs), nous obtenons l'expression de la latitude relative :

$$\varphi = 2i_x \sin(\kappa_{mp}(t)) - 2i_y \cos(\kappa_{mp}(t)). \quad (1.53)$$

En utilisant la transformation trigonométrique de l'annexe G page 297, cette expression peut être réécrite sous la forme :

$$\varphi = -2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \cos\left(\kappa_{mp}(t) + \arctan\left(\frac{i_x}{i_y}\right)\right) \quad (1.54)$$

pour $i_y \neq 0$.

Or, nous pouvons remarquer que :

$$-2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \leq -2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \cos\left(\kappa_{mp}(t) + \arctan\left(\frac{i_x}{i_y}\right)\right) \leq 2\sqrt{i_x^2 + i_y^2}, \quad (1.55)$$

obtenant ainsi les bornes :

$$-2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \leq \varphi \leq 2\sqrt{i_x^2 + i_y^2}. \quad (1.56)$$

Dans le cas où $i_y = 0$, l'équation (1.53) se réécrit :

$$\varphi = 2i_x \sin(\kappa_{mp}(t)). \quad (1.57)$$

En notant que :

$$i_x \sin(\kappa_{mp}(t)) \leq |i_x| = \sqrt{i_x^2 + i_y^2} \text{ avec } i_y = 0, \quad (1.58)$$

nous pouvons déduire que la contrainte (1.56) reste valide même dans le cas $i_y = 0$.

Ainsi la contrainte :

$$2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \leq \delta, \quad (1.59)$$

est une condition suffisante de maintien à poste hors plan. L'espace défini par cette contrainte est un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{\delta}{2}$ dans le plan (i_x, i_y) (voir le schéma de la figure

1.5).

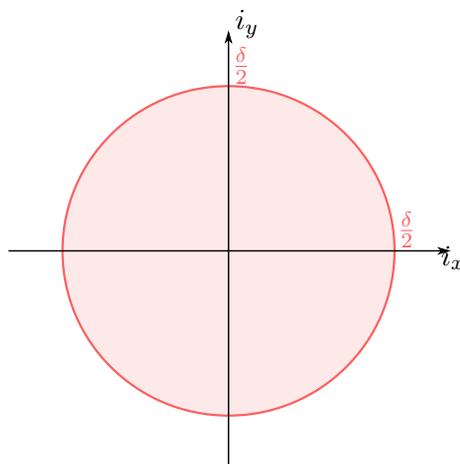


FIGURE 1.5 – Contrainte de maintien à poste en inclinaison.

De même, la longitude géographique, donnée par :

$$\lambda = \ell_{M\Theta} + 2e_x \sin \kappa_{mp}(t) - 2e_y \cos \kappa_{mp}(t), \quad (1.60)$$

peut également être réécrite en utilisant les transformations trigonométriques de l'annexe G page 297 :

$$\lambda = \ell_{M\Theta} - 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \cos \left(\kappa_{mp}(t) + \arctan \left(\frac{e_x}{e_y} \right) \right), \quad (1.61)$$

si $e_y \neq 0$. En remarquant que :

$$\lambda - \ell_{M\Theta} = -2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \cos \left(\kappa_{mp}(t) + \arctan \left(\frac{e_x}{e_y} \right) \right), \quad (1.62)$$

et :

$$-2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq -2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \cos \left(\kappa_{mp}(t) + \arctan \left(\frac{e_x}{e_y} \right) \right) \leq 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \quad (1.63)$$

il est possible de réécrire :

$$-2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \lambda - \ell_{M\Theta} \leq 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \quad (1.64)$$

et par conséquent :

$$\ell_{M\Theta} - 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \lambda \leq \ell_{M\Theta} + 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2}. \quad (1.65)$$

Dans le cas où $e_y = 0$, l'équation (1.60) s'exprime :

$$\lambda = \ell_{M\Theta} + 2e_x \sin \kappa_{mp}(t). \quad (1.66)$$

De manière analogue à (1.58) :

$$e_x \sin \kappa_{mp}(t) \leq |e_x| \leq \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \text{ avec } e_y = 0, \quad (1.67)$$

et la contrainte (1.65) reste envisageable dans la cas où $e_y = 0$.

Ainsi, imposer les contraintes :

$$\ell_{M\Theta} - 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \geq -\delta, \quad \ell_{M\Theta} + 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \delta, \quad (1.68)$$

encore écrites :

$$2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \delta + \ell_{M\Theta}, \quad 2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \delta - \ell_{M\Theta}, \quad (1.69)$$

permet de définir une condition suffisante de maintien à poste dans le plan.

Notons que les relations (1.69) imposent :

$$\delta + \ell_{M\Theta} \geq 0 \text{ et } \delta - \ell_{M\Theta} \geq 0. \quad (1.70)$$

Ainsi, l'ordre des inégalités dans les contraintes (1.69) est maintenu en élevant ces expressions au carré :

$$(2e_x)^2 + (2e_y)^2 \leq (\delta + \ell_{M\Theta})^2, \quad (1.71a)$$

$$(2e_x)^2 + (2e_y)^2 \leq (\delta - \ell_{M\Theta})^2. \quad (1.71b)$$

Les contraintes (1.71) définissent un demi-cône dans l'espace $(2e_x, 2e_y, \delta + \ell_{M\Theta})$ pour (1.71a) et dans l'espace $(2e_x, 2e_y, \delta - \ell_{M\Theta})$ pour (1.71b) (voir le schéma de la figure 1.6).

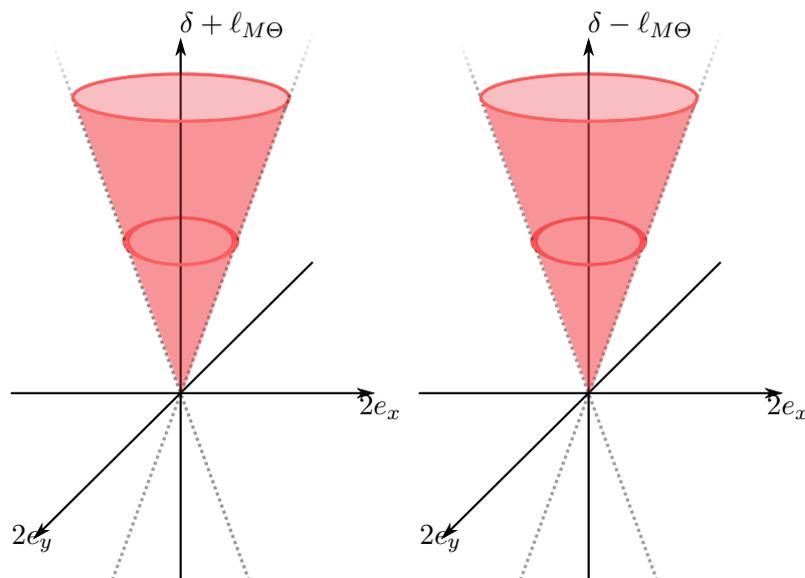


FIGURE 1.6 – Contrainte de maintien à poste en inclinaison.

1.4.2 MODÉLISATION DU SYSTÈME PROPULSIF

1.4.2.1 MOTEURS À PROPULSION ÉLECTRIQUE

Le système de propulsion considéré est celui du brevet d'[Anzel, 1995] constitué de quatre moteurs à propulsion électrique (poussée faible), disposés sur la face anti-nadir – c'est-à-dire opposée à la Terre – du satellite. Chaque propulseur est orienté avec un angle de déviation θ par rapport à l'axe $\vec{u}_{Y_{\text{sat}}}$ et un angle de déflexion α par rapport à l'axe $\vec{u}_{Z_{\text{sat}}}$ comme représenté sur les figures 1.7 et 1.8.

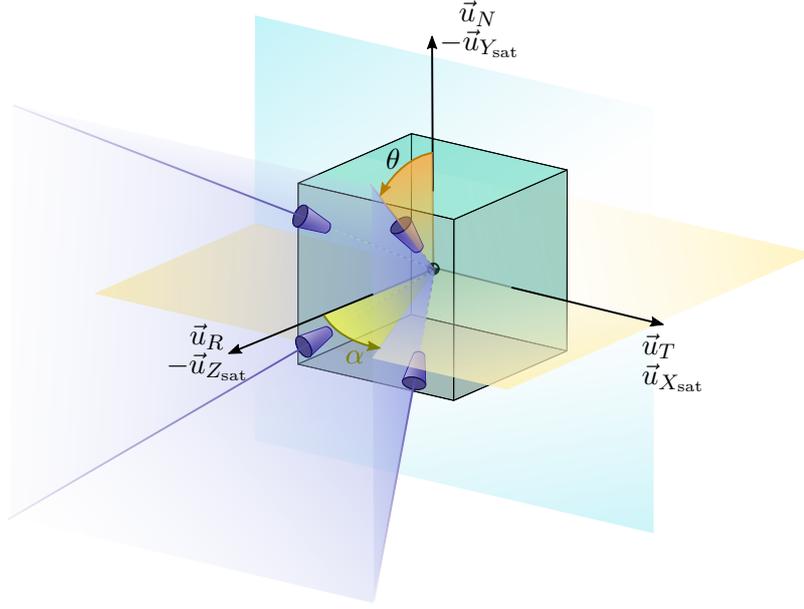


FIGURE 1.7 – Illustration de la configuration des moteurs.

Le repère satellite et le repère orbital local sont orientés de telle sorte que :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{sat}}} . \quad (1.72)$$

Les angles de déviation et de déflexion des moteurs orientent ces derniers dans les directions Nord-Est (NE), Sud-Est (SE), Nord-Ouest (NO) et Sud-Ouest (SO) respectivement.

L'accélération des propulseurs dans la base orbitale locale est exprimée selon :

$$\vec{u}_{\text{NE}} = \begin{bmatrix} u_{R,\text{NE}} \\ u_{R,\text{NE}} \\ u_{R,\text{NE}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}} = \frac{F_{\text{NE}}}{m} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{\text{NE}} \cos \alpha_{\text{NE}} \\ -\sin \theta_{\text{NE}} \sin \alpha_{\text{NE}} \\ -\cos \theta_{\text{NE}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}} = \vec{\Gamma}_{\text{NE}} F_{\text{NE}}, \quad (1.73a)$$

$$\vec{u}_{\text{SE}} = \begin{bmatrix} u_{R,\text{SE}} \\ u_{R,\text{SE}} \\ u_{R,\text{SE}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}} = \frac{F_{\text{SE}}}{m} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{\text{SE}} \cos \alpha_{\text{SE}} \\ -\sin \theta_{\text{SE}} \sin \alpha_{\text{SE}} \\ \cos \theta_{\text{SE}} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}} = \vec{\Gamma}_{\text{SE}} F_{\text{SE}}, \quad (1.73b)$$

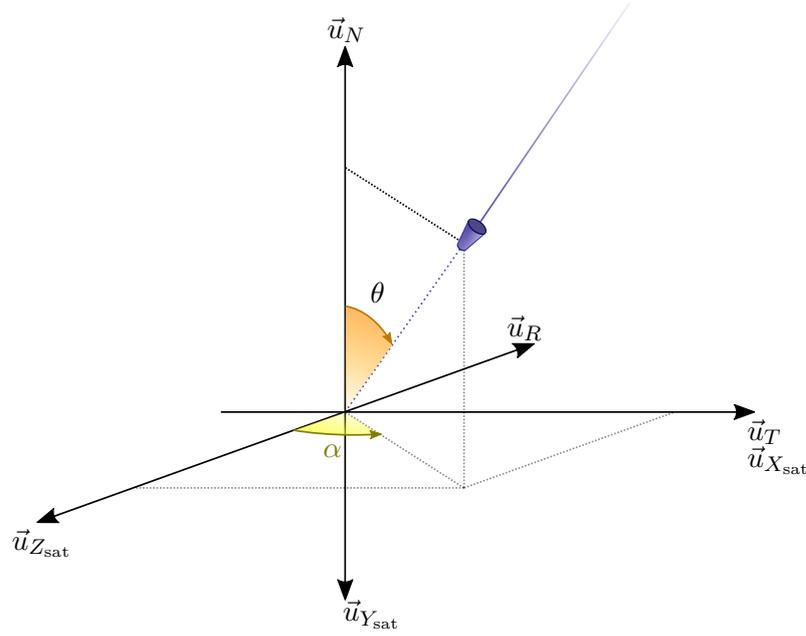


FIGURE 1.8 – Illustration d'orientation des angles.

$$\vec{u}_{NO} = \begin{bmatrix} u_{R,NO} \\ u_{R,NO} \\ u_{R,NO} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}} = \frac{F_{NO}}{m} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{NO} \cos \alpha_{NO} \\ \sin \theta_{NO} \sin \alpha_{NO} \\ -\cos \theta_{NO} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}} = \vec{\Gamma}_{NO} F_{NO}, \quad (1.73c)$$

$$\vec{u}_{SO} = \begin{bmatrix} u_{R,SO} \\ u_{R,SO} \\ u_{R,SO} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}} = \frac{F_{SO}}{m} \begin{bmatrix} -\sin \theta_{SO} \cos \alpha_{SO} \\ \sin \theta_{SO} \sin \alpha_{SO} \\ \cos \theta_{SO} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}} = \vec{\Gamma}_{SO} F_{SO}. \quad (1.73d)$$

Pour le propulseur i , le vecteur $\vec{\Gamma}_i$ peut être réécrit de façon générique :

$$\vec{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{i,R} & \Gamma_{i,T} & \Gamma_{i,N} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}^T. \quad (1.74)$$

Trouver le vecteur de contrôle $\vec{u}(t)$ permettant de résoudre le problème de maintien à poste revient à déterminer les fonctions $u_R(t)$, $u_T(t)$ et $u_N(t)$ en reprenant les notations de l'équation (B.61). Or, au regard des transformations précédentes (1.73a) - (1.73d), chaque moteur produit une poussée sur chacun des trois axes du repère orbital local. Trouver la fonction $u(t)$ permettant de réaliser le maintien à poste nécessiterait de résoudre un problème d'allocation de poussées pour déterminer le profil de chacun des propulseurs. C'est pourquoi, dans ce travail, le choix du vecteur de commande se porte sur le vecteur $\begin{bmatrix} F_{NE} & F_{SE} & F_{NO} & F_{SO} \end{bmatrix}^T$.

Le vecteur de contrôle dans le repère orbital local est alors transformé de la façon suivante :

$$\vec{u}(t) = \Gamma \tilde{F}(t) \quad (1.75)$$

en définissant le nouveau vecteur de contrôle :

$$\tilde{F}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{NE}(t) & \tilde{F}_{SE}(t) & \tilde{F}_{NO}(t) & \tilde{F}_{SO}(t) \end{bmatrix}^T \quad (1.76)$$

et la matrice de transformation :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \vec{\Gamma}_{\text{NE}} & \vec{\Gamma}_{\text{SE}} & \vec{\Gamma}_{\text{NO}} & \vec{\Gamma}_{\text{SO}} \end{bmatrix} \quad (1.77)$$

Utiliser un vecteur contenant les valeurs de poussée des propulseurs en tant que vecteur de contrôle augmente cependant la dimension de l'espace de contrôle.

1.4.2.2 CONTRAINTES LIÉES À L'UTILISATION DE LA POUSSÉE FAIBLE

DESCRIPTION DES CONTRAINTES

L'utilisation de propulseurs électriques impose la prise en compte de contraintes inhérentes à ce type de propulsion. Ces contraintes sont les suivantes :

- (i) la poussée est idéalement soit nulle soit non nulle et constante (il s'agit d'un profil on-off),
- (ii) deux propulseurs ne peuvent pas être actifs simultanément,
- (iii) une poussée doit avoir une durée minimale de $T_l = 5$ minutes,
- (iv) l'intervalle de temps minimal entre deux poussées d'un même propulseur est de $T_d = 20$ minutes,
- (v) l'intervalle de temps entre deux poussées de deux propulseurs différents est de $T_s = 5$ minutes.

En notant la valeur maximale de la poussée F_{\max} , la contrainte opérationnelle (i) permet de normaliser les fonctions de poussée de chacun des propulseurs \tilde{F}_i pour $i \in \{\text{NE}, \text{SE}, \text{NO}, \text{SO}\}$ (voir figure 1.9). Il est alors possible de réécrire :

$$\tilde{F}(t) = F_{\max} \begin{bmatrix} F_{\text{NE}}(t) & F_{\text{SE}}(t) & F_{\text{NO}}(t) & F_{\text{SO}}(t) \end{bmatrix}^T = F_{\max} F(t), \quad (1.78)$$

où $F(t)$ est une fonction vectorielle à 4 dimensions dont les composantes sont comprises entre 0 et 1. Dans la suite de l'étude du maintien à poste, on sera amené à considérer deux cas :

- $t \mapsto F(t)$ peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 1 : $\forall t, F(t) \in [0, 1]^4$, et le caractère on-off doit être imposé par une contrainte,
- $t \mapsto F(t)$ est modélisée de telle sorte que seules les valeurs 0 et 1 sont accessibles. On a ainsi $\forall t, F(t) \in \{0, 1\}^4$.

La plage de valeurs considérée pour F sera indiquée dans chaque cas.

Les indices des propulseurs sont réécrits de la façon suivante par souci de lisibilité :

$$\tilde{F}(t) = F_{\max} \begin{bmatrix} F_1(t) & F_2(t) & F_3(t) & F_4(t) \end{bmatrix}^T. \quad (1.79)$$

Un tel paramétrage du profil de contrôle permet de réécrire la dynamique linéarisée par rapport au point de maintien à poste en orbite géostationnaire (1.41) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + D(t) + F_{\max}B(t)\Gamma F(t), \\ &= A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t), \end{aligned} \quad (1.80)$$

avec $\tilde{B}(t) = F_{\max}B(t)\Gamma$.

L'expression des contraintes opérationnelles (ii) à (v) permet de définir des contraintes sur les dates de début et de fin des poussées. La figure 1.10 illustre la prise en compte de ces contraintes.

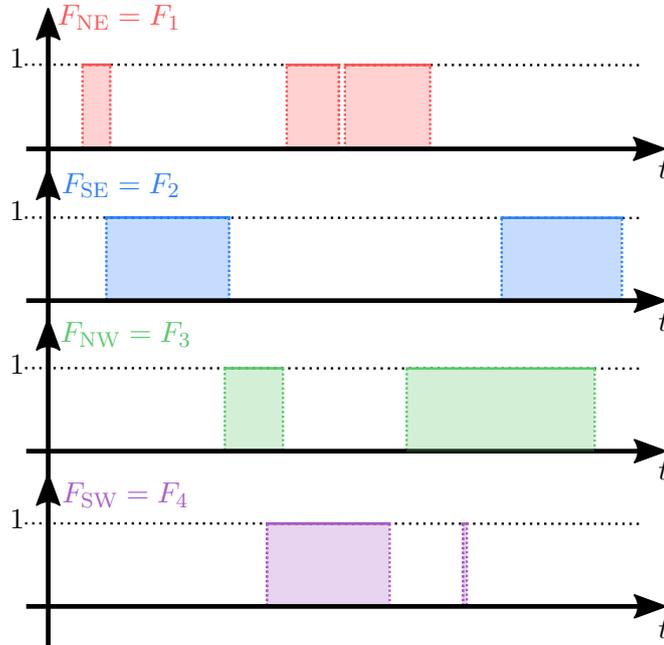


FIGURE 1.9 – Profils de poussée on-off pour chacun des 4 propulseurs (contrainte (i)).

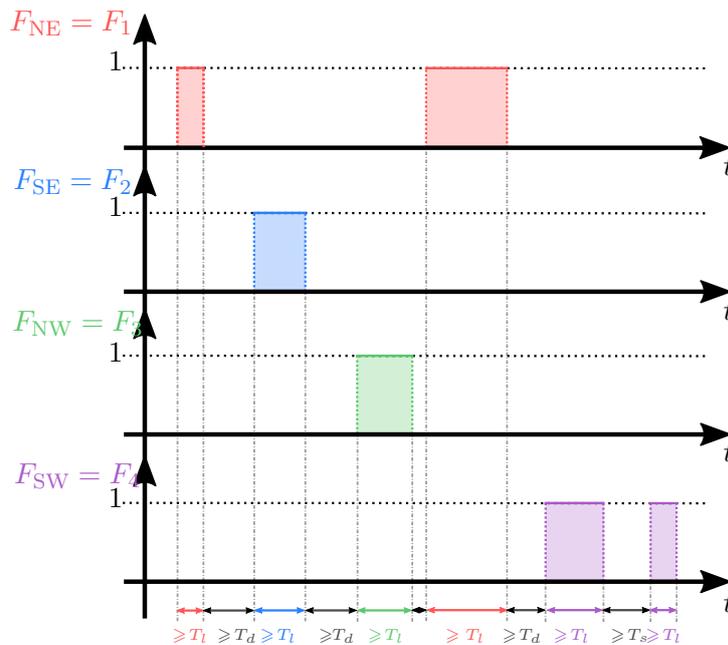


FIGURE 1.10 – Contraintes (ii) - (v) à respecter.

 EXPRESSION MATHÉMATIQUE DE CES CONTRAINTES

En supposant que les poussées sont des fonctions créneaux, c'est-à-dire que les poussées de chaque propulseur sont modélisées de telle sorte à avoir un profil tout ou rien, il est possible de paramétrer chaque poussée par l'instant de milieu de poussée et par la demi-largeur de cette poussée. Ainsi la $k^{\text{ème}}$ poussée du propulseur i , $i = 1, \dots, 4$, est paramétrée par :

- l'instant de milieu de poussée t_k^i ,
- la demi-largeur de la poussée Δt_k^i .

Cette modélisation des poussées par leur instant de milieu de poussée et leur demi-largeur permet de réécrire le profil de contrôle sous la forme :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, 4, F_i(t) &= F_i \left(t, \{t_j^i, \Delta t_j^i\}_{j=1, \dots, P_i} \right), \\ &= \sum_{j=1}^{P_i} \mathbb{1}_{[t_j^i - \Delta t_j^i, t_j^i + \Delta t_j^i]}(t), \end{aligned} \quad (1.81)$$

où P_i est le nombre de poussées du propulseur i , et le vecteur de contrôle s'écrit :

$$\begin{aligned} F(t) &= F \left(t, \{t_j^i, \Delta t_j^i\}_{\substack{i=1, \dots, 4 \\ j=1, \dots, P_i}} \right), \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{P_1} \mathbb{1}_{[t_j^1 - \Delta t_j^1, t_j^1 + \Delta t_j^1]}(t) \\ \sum_{j=1}^{P_2} \mathbb{1}_{[t_j^2 - \Delta t_j^2, t_j^2 + \Delta t_j^2]}(t) \\ \sum_{j=1}^{P_3} \mathbb{1}_{[t_j^3 - \Delta t_j^3, t_j^3 + \Delta t_j^3]}(t) \\ \sum_{j=1}^{P_4} \mathbb{1}_{[t_j^4 - \Delta t_j^4, t_j^4 + \Delta t_j^4]}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Avec cette modélisation, la contrainte (iii) se réécrit :

$$2\Delta t_k^j \geq T_l, \quad (1.83)$$

pour la $k^{\text{ème}}$ poussée du propulseur j .

Considérons un profil de poussées mettant en œuvre la poussée k du moteur i et la poussée l du moteur j . Les contraintes (iv) et (v) se réécrivent :

- si $t_k^i < t_l^j$, alors :

$$(t_l^j - \Delta t_l^j) - (t_k^i + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}, \quad (1.84)$$

- si $t_l^j < t_k^i$, alors :

$$(t_k^i - \Delta t_k^i) - (t_l^j - \Delta t_l^j) \geq I^{ij}, \quad (1.85)$$

avec I^{ij} défini par :

$$I^{ij} = \begin{cases} T_s & \text{si } i = j, \\ T_d & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.86)$$

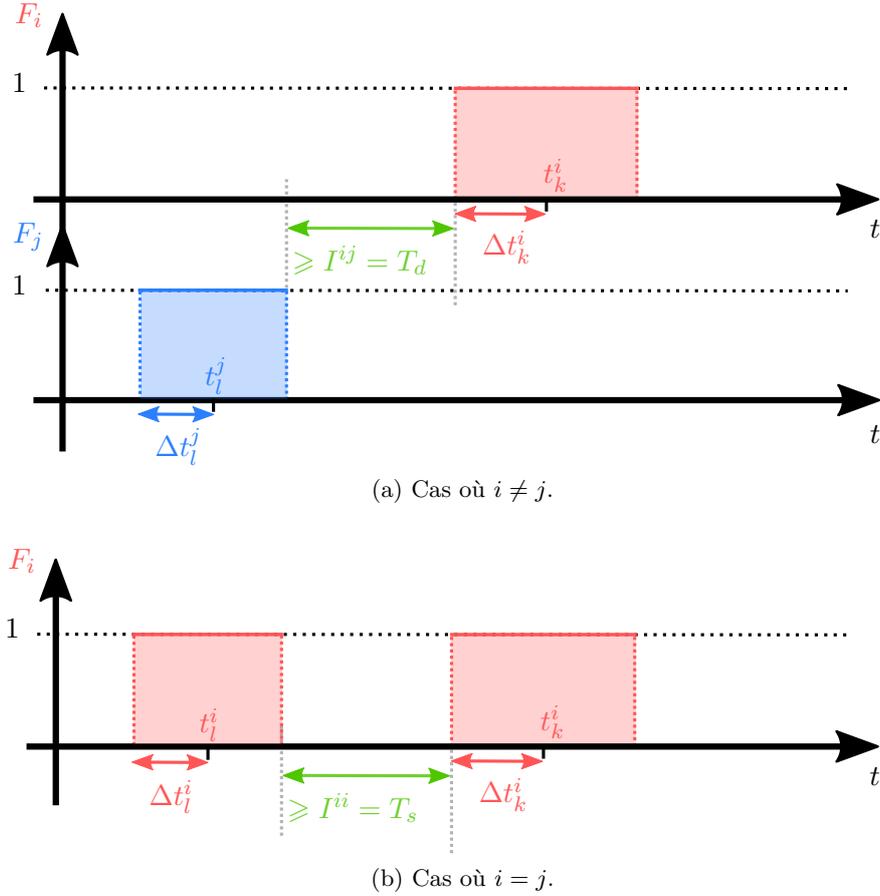


FIGURE 1.11 – Contraintes (iv) et (v).

En écrivant les contraintes de cette façon, la contrainte de disjonction des poussées (ii) est automatiquement satisfaite.

Les contraintes (1.84) et (1.85) peuvent être réécrites ensemble sous la forme :

$$\begin{aligned} \max(t_l^j - t_k^i, 0) \left[(t_l^j - \Delta t_l^j) - (t_k^i + \Delta t_k^i) - I^{ij} \right] \\ - \min(t_l^j - t_k^i, 0) \left[(t_k^i - \Delta t_k^i) - (t_l^j - \Delta t_l^j) - I^{ij} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (1.87)$$

L'équation précédente est développée selon :

$$\begin{aligned} & \left[\max(t_l^j - t_k^i, 0) + \min(t_l^j - t_k^i, 0) \right] t_l^j \\ & - \left[\max(t_l^j + t_k^i, 0) + \min(t_l^j - t_k^i, 0) \right] t_k^i \\ & + \left[-\max(t_l^j + t_k^i, 0) + \min(t_l^j - t_k^i, 0) \right] \left[\Delta t_l^j + \Delta t_k^i + I^{ij} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (1.88)$$

En utilisant les relations : $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\max(a, 0) + \min(a, 0) = a, \quad (1.89)$$

$$\max(a, 0) - \min(a, 0) = |a|, \quad (1.90)$$

les contraintes (iv) et (v) se réécrivent comme :

$$\left(t_l^j - t_k^i\right)^2 - \left|t_l^j - t_k^i\right| \left(\Delta t_l^j + \Delta t_k^i + K_{kl}^{ij}\right) \geq 0. \quad (1.91)$$

Puisque la satisfaction des contraintes (iv) et (v) implique celle de disjonction, alors les instants de milieu de poussée de deux poussées consécutives ne peuvent pas être égaux, et par conséquent : $|t_l^j - t_k^i| \neq 0$. On peut alors simplifier l'équation (1.91) par $|t_l^j - t_k^i|$, ce qui permet d'obtenir :

$$\left|t_l^j - t_k^i\right| - \left(\Delta t_l^j + \Delta t_k^i + I^{ij}\right) \geq 0, \quad (1.92)$$

ou encore :

$$\left|t_l^j - t_k^i\right| - \left(\Delta t_l^j + \Delta t_k^i\right) \geq I^{ij}. \quad (1.93)$$

Pour résumer, l'ensemble des contraintes que les instants de milieu de poussée et leur demi-largeurs doivent respecter sont :

$$2\Delta t_k^j \geq T_l, \quad (1.94a)$$

$$\left|t_l^j - t_k^i\right| - \left(\Delta t_l^j + \Delta t_k^i\right) \geq I^{ij}, \quad (1.94b)$$

avec :

$$I^{ij} = \begin{cases} T_s & \text{si } i = j, \\ T_d & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (1.95)$$

1.4.3 PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE OPTIMAL À CONSOMMATION MINIMALE

1.4.3.1 FONCTIONNELLE DE COÛT À MINIMISER

Le problème à résoudre est un problème de maintien à poste à consommation minimale. La fonctionnelle à minimiser s'écrit alors en notant $[t_0, t_f]$ l'intervalle temporel sur lequel le problème de maintien à poste doit être résolu :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \|\vec{u}(t)\|_1 dt. \quad (1.96)$$

On peut transformer cette expression de la façon suivante en notant P le nombre total de poussées, P_i le nombre de poussées du propulseur i (tels que $P = \sum_{i=1}^4 P_i$) et l'indice tot la poussée totale sur chacun des trois axes du repère orbital local :

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_f} \|\vec{u}_{tot}(t)\|_1 dt, \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left(|u_{R,tot}(t)| + |u_{T,tot}(t)| + |u_{N,tot}(t)| \right) dt, \\ &= \sum_{i=1}^P \int_{t_0}^{t_f} \left(|u_{R,i}(t)| + |u_{T,i}(t)| + |u_{N,i}(t)| \right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{P_i} \int_{t_0}^{t_f} \left(|u_{R,ij}(t)| + |u_{T,ij}(t)| + |u_{N,ij}(t)| \right) dt, \\
&= F_{\max} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{P_i} \int_{t_0}^{t_f} \left(|\Gamma_{i,R}| + |\Gamma_{i,T}| + |\Gamma_{i,N}| \right) |F_{i,j}| dt, \\
&= F_{\max} \sum_{i=1}^4 \|\vec{\Gamma}_i\|_1 \sum_{j=1}^{P_i} \int_{t_0}^{t_f} |F_{i,j}(t)| dt
\end{aligned} \tag{1.97}$$

en reprenant les notations de l'équation (1.74).

En utilisant la modélisation des créneaux de poussées par des fonctions porte paramétrées par l'instant de milieu de poussée et la demi largeur du créneau, la fonction objectif peut se réécrire :

$$J = 2F_{\max} \sum_{i=1}^4 \|\vec{\Gamma}_i\|_1 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_j^i. \tag{1.98}$$

Comme F_{\max} et $\|\vec{\Gamma}_i\|_1$ sont des constantes, il est possible de les retirer de la fonction objectif sans changer la valeur des Δt_j^i pour lequel le minimum de la fonctionnelle J sera atteint :

$$\tilde{J} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_j^i. \tag{1.99}$$

1.4.3.2 PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE OPTIMAL À CONSOMMATION MINIMALE

L'horizon d'optimisation est fixé à t_f . Une contrainte doit alors être ajoutée pour imposer aux poussées de commencer après le temps initial et de se terminer avant le temps final. Ces contraintes s'écrivent sous la forme :

$$\forall i = 1, \dots, 4, \forall k = 1, \dots, P_i, \begin{cases} t_k^i - \Delta t_k^i \geq t_0, \\ t_k^i + \Delta t_k^i \leq t_f \end{cases} \tag{1.100}$$

Avec la fonction objectif à minimiser (1.99), les contraintes de maintien à poste (1.52), les contraintes opérationnelles dues aux propulseurs (i) à (v), la contrainte liée à l'horizon d'optimisation et la dynamique du système linéarisé (1.41) (pour laquelle le symbole Δ a été omis pour davantage de lisibilité), le problème de maintien à poste à consommation minimale s'écrit :

Problème 1.1. Calculer les instants de milieu de poussée t_k^i , les demi-largeurs de poussées Δt_k^i et le nombre de poussées par propulseur P_i , $i = 1, \dots, 4$, solutions du problème de minimisation :

$$\min_{P_i, t_k^i, \Delta t_k^i} \tilde{J} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{P_i} \Delta t_k^i$$

$$\text{t. q. : } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F \left(t, \{t_k^i, \Delta t_k^i\}_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,P_i}} \right), \\ x(t_0) = x_0, \\ \forall i = 1, \dots, 4, P_i \in \mathbb{N}, \\ \forall i = 1, \dots, 4, \forall k = 1, \dots, P_i, t_k^i - \Delta t_k^i \geq t_0, \\ \forall i = 1, \dots, 4, \forall k = 1, \dots, P_i, t_k^i + \Delta t_k^i \leq t_f, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ \forall i = 1, \dots, 4, \forall k = 1, \dots, P_i, 2\Delta t_k^j \geq T_l, \\ \forall i = 1, \dots, 4, \forall k = 1, \dots, P_i, |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}. \end{array} \right. \quad (1.101)$$

○

Le problème 1.1 est un problème de contrôle optimal à temps final fixé avec contraintes sur l'état et le contrôle. Les paramètres à optimiser sont les instants de milieu de poussée, les demi-largeurs, ainsi que le nombre de poussées par propulseur. Les contraintes de maintien à poste, qui sont des contraintes sur l'état, rendent le problème difficile à résoudre par des méthodes indirectes (voir par exemple la référence [Maurer, 1977]). Par ailleurs, les contraintes opérationnelles sur les instants de milieu de poussées et leurs demi-largeurs définissent un espace admissible non connexe, ce qui rend le problème d'optimisation d'autant plus délicat à résoudre. Enfin, le nombre de poussées par propulseur est une variable entière à optimiser, si bien que le problème 1.1 est un problème d'optimisation non linéaire en nombres entiers.

1.5 CONTRÔLE OPTIMAL AVEC CONTRAINTES SUR L'ÉTAT

Cette section présente les méthodes existantes pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état divisées en deux grandes familles, d'une part les méthodes directes et d'autres part les méthodes indirectes.

1.5.1 PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL DE BOLZA

Considérons un système décrit par l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1.102)$$

où :

- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système,
- $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle du système,
- t est la variable indépendante (temporelle dans la plupart des cas).

L'instant initial t_0 et la valeur initiale du vecteur d'état x_0 étant fixés, l'objectif est de déterminer les vecteurs d'état et de contrôle minimisant la fonction objectif :

$$J = \psi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x, u, t) dt, \quad (1.103)$$

où \mathcal{L} est appelé Lagrangien du système. La fonction objectif dépend également du temps final qui peut être fixé ou non, et dans ce dernier cas, le temps final est également une inconnue du problème. Par ailleurs, le vecteur d'état à l'instant final $x(t_f)$ peut être libre ou fixé. Un problème de contrôle optimal s'écrit sous forme de Bolza se présente sous la forme :

Problème 1.2. Trouver le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée vérifiant :

$$\begin{aligned} \min_u &= \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x, u, t) dt \\ \text{t. q. :} & \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ donné}, \\ t_f \text{ libre ou fixé}, \\ x(t_f) \text{ libre ou fixé}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.104)$$

o

Trois problèmes de contrôle optimal canoniques sont distingués dans la littérature :

- pour les problèmes de contrôle à temps minimal, la fonction objectif prend la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0, \quad (1.105)$$

et dans ce cas le temps final n'est pas fixé,

- pour les problèmes de contrôle à consommation minimale, la fonction objectif prend la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m |u_i(t)| dt = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_1 dt. \quad (1.106)$$

Si, pour un problème à consommation minimale, l'horizon temporel est fixé, le temps final doit nécessairement être supérieur au temps final optimal solution du problème en temps minimal (voir [Athans and Falb, 1966]).

- pour les problèmes de contrôle à énergie minimale, la fonction objectif prend la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m u_i^2(t) dt. \quad (1.107)$$

Puisque le problème à résoudre est un problème de maintien à poste à consommation minimale, la fonction objectif considérée sera celle écrite sous la forme donnée par l'équation (1.106).

Dans le cas de systèmes physiques, et en particulier les propulseurs électrique du satellite dont le maintien à poste doit être effectué, le contrôle ne peut en général pas prendre n'importe quelle valeur. En particulier, dans le cas où le contrôle d'un satellite est réalisé

à l'aide de propulseurs à poussée faible, la valeur de la poussée utilisable est bornée par la valeur maximale de la poussée autorisée par les propulseurs. Cette contrainte s'écrit de façon générale :

$$\forall t \in [t_0, t_f], u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad (1.108)$$

et dans le cas simplifié où l'espace \mathcal{U} est un parallélépipède de \mathbb{R}^m , les contraintes sur le vecteur de contrôle peuvent se réécrire :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall j \in \{1, m\}, u_{\min} \leq u_j(t) \leq u_{\max}. \quad (1.109)$$

Le maintien à poste consiste à borner la trajectoire dans une zone définie de l'espace. Les contraintes de maintien contraignent donc le vecteur d'état dans un sous espace de l'espace d'état. Cette contrainte s'écrit de façon générale :

$$\forall t \in [t_0, t_f], x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.110)$$

et dans le cas simplifié où l'espace \mathcal{X} est un parallélépipède de \mathbb{R}^n , les contraintes sur le vecteur d'état peuvent se réécrire :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in \{1, n\}, x_{\min} \leq x_i(t) \leq x_{\max}. \quad (1.111)$$

En prenant en compte toutes ces contraintes sur la position finale, le contrôle et l'état du système, le problème de contrôle optimal contraint devient :

Problème 1.3. Trouver le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée vérifiant :

$$\begin{aligned} \min_{u,x} &= \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x, u, t) dt \\ \text{t. q. :} & \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ donné}, \\ x(t_f) = x_f \text{ libre ou fixé}, \\ t_f \text{ libre ou fixé}, \\ \forall t \in [t_0, t_f], \forall j \in \{1, m\}, u_{\min} \leq u_j(t) \leq u_{\max}, \\ \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in \{1, n\}, x_{\min} \leq x_i(t) \leq x_{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.112)$$

◦

Les problèmes de contrôle optimal sont donc des problèmes d'optimisation sous contraintes avec une contrainte différentielle. Les inconnues étant des fonctions, il s'agit d'un problème d'optimisation en dimension infinie.

1.5.1.1 MÉTHODES DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

Par rapport aux problème d'optimisation de paramètres, les problèmes de contrôle optimal présentent une contrainte différentielle à laquelle s'ajoutent des conditions initiales et/ou finales. L'objectif est de trouver le profil de commande en fonction du temps qui amène le système de son point initial à son point final. Les inconnues sont donc des fonctions.

Les premiers essais de résolution des problèmes de contrôle optimal ont été entrepris au moyen du calcul des variations, généralement attribués à Newton. Plus récemment, le besoin accru de calculer la performance optimale de systèmes dynamiques a conduit à de nombreux développements pour la résolution des problèmes de contrôle optimal. Depuis les quarante dernières années, deux grandes familles de méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont émergé : d'une part les méthodes dites indirectes et d'autre part les méthodes dites directes.

Dans le cas des méthodes indirectes, le chemin pour lequel la fonction objectif est minimale est supposé être connu, ce qui permet la dérivation des conditions nécessaires d'optimalité que les inconnues doivent vérifier pour que le chemin considéré minimise la fonction objectif. Ceci nécessite donc le calcul explicite d'équations adjointes et de conditions de transversalité. Ces conditions conduisent à un problème aux deux bouts, pour lequel il est nécessaire de connaître une bonne initialisation, et le problème de contrôle optimal est résolu indirectement. Par ailleurs, la résolution d'un problème de contrôle optimal par des méthodes indirectes nécessite une connaissance *a priori* de la structure de la trajectoire. Dans le cas de l'existence de contraintes sur l'état, il est également nécessaire de connaître au préalable le nombre d'intervalles temporels pour lesquels la contrainte sur l'état devient active.

L'objectif des méthodes directes est de construire une suite de points faisant décroître la valeur de la fonction objectif jusqu'à sa valeur minimale. Ceci implique l'utilisation d'une approximation discrète du problème initial. Les variables d'état et de contrôle sont discrétisées sur une grille temporelle découpant l'intervalle de résolution en intervalles plus petits. Le problème de contrôle optimal est alors transcrit en un problème d'optimisation non linéaire de dimension finie. Il s'agit d'un problème d'optimisation de trajectoire. Il est nécessaire de s'assurer que la suite de points solution du problème en dimension finie est une discrétisation de la solution du problème de contrôle optimal initial.

Une comparaison entre ces deux familles de méthodes peut être trouvée par exemple dans les références [von Stryk and Bulirsch, 1992], [Betts, 1998] et [Betts, 2010]. Comme le suggère la référence [Rao, 2009], ces deux types de résolution des problèmes de contrôle optimal présentent de fortes connections entre elles et peuvent être combinées pour former les méthodes dites hybrides (voir la référence [von Stryk and Bulirsch, 1992] par exemple).

La section suivante passe en revue les techniques pour prendre en compte les contraintes de maintien à poste, qui sont des contraintes sur l'état, que ce soit dans le cadre des méthodes directes ou dans le cadre des méthodes indirectes.

1.5.2 MÉTHODES DIRECTES ET CONTRAINTES SUR L'ÉTAT

Les méthodes directes ont été étudiées depuis les années 1980. On peut trouver des descriptions de ces méthodes par [von Stryk, 1993], [Betts and Huffman, 1998] [Kameswaran and Biegler, 2008] et une présentation dans un cadre unifié par [Hull, 1997], [Hull, 2003] et [Betts, 2010]. [Hargraves and Paris, 1987], [Enright and Conway, 1991], [Enright and Conway, 1992], [Scheel and Conway, 1994], [Tang and Conway, 1995] et [Betts, 2000] utilisent des méthodes de collocation pour des applications spatiales. Des méthodes de collocation spectrales ont été étudiées par [Elnagar et al., 1995] et [Pietz, 2003]. Le survey [Rao, 2009] définit les différentes classes de méthodes directes et les différentes

méthodes d'intégrations de la dynamique du système.

L'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ est discrétisé en N sous-intervalles définis par les N points $t_1, \dots, t_N = t_f$ tels que :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f. \quad (1.113)$$

Ces points sont appelés nœuds de la discrétisation.

Si l'instant final est variable, il est possible de se ramener à un problème de contrôle optimal à instant final fixe par un changement de variable. L'instant final devient alors un paramètre du problème à optimiser.

Le vecteur d'état et le vecteur de contrôle sont remplacés par leur évaluation aux nœuds du maillage :

$$x(t_j) = x_j \text{ et } u(t_j) = u_j. \quad (1.114)$$

Il s'agit d'une forme d'interpolation des fonctions inconnues. Ainsi, les deux fonctions inconnues $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto x(t)$ sont remplacées par $(n+m)N$ scalaires inconnus.

La contrainte différentielle (1.102) (équation différentielle du système) est elle aussi discrétisée. La dérivée du vecteur d'état en chacun des nœuds du maillage est calculée de façon approchée par différences finies, ce qui revient à intégrer l'équation différentielle par des schémas numériques. Les plus utilisés sont les schémas d'intégration de Runge-Kutta. Ces schémas numériques permettent de définir des résidus R_k , $k = 1, \dots, N+1$. Réaliser l'intégration numérique de (1.102) revient à contraindre ces résidus à 0 sur tous les points de la grille temporelle. La référence [Hull, 1997] présente des approximations de la dérivée du vecteur d'état :

- pour la méthode des trapèzes d'ordre 2, le résidu est :

$$R_k = x_{k+1} - x_k - \frac{1}{2} \left[\underbrace{f(x_k, u_k, t_k)}_{\dot{x}_k} + \underbrace{f(x_{k+1}, u_{k+1}, t_{k+1})}_{\dot{x}_{k+1}} \right] (t_{k+1} - t_k), \quad (1.115)$$

- pour la méthode de Simpson d'ordre 4, le résidu est :

$$R_k = x_{k+1} - x_k - \frac{1}{6} \left[f(x_k, u_k, t_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}, t_{k+1}) + 4f_m \right] (t_{k+1} - t_k), \quad (1.116)$$

où f_m est la fonction f évaluée en :

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{t_k + t_{k+1}}{2}, & u_m &= \frac{u_k + u_{k+1}}{2}, \\ x_m &= \frac{x_k + x_{k+1}}{2} - \frac{1}{8} \left[f(x_k, u_k, t_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1}, t_{k+1}) \right] (t_{k+1} - t_k). \end{aligned} \quad (1.117)$$

L'intégrale de la fonction objectif (1.103) est également approximée par une méthode numérique de type quadrature, par exemple par une méthode des trapèzes :

$$J(x, u, t) \approx \tilde{J}(x_j, u_j, t_j). \quad (1.118)$$

Les contraintes sur le vecteur d'état et sur le vecteur de contrôle (1.111) sont elles aussi

discrétisées sur les instants du maillage :

$$\forall k = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, n, x_{\min} \leq x_{j,k} \leq x_{\max}, \quad (1.119)$$

$$\forall k = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, m, u_{\min} \leq u_{j,k} \leq u_{\max}. \quad (1.120)$$

Dans le cas où l'intégration est réalisée avec une méthode utilisant des évaluations des vecteurs d'état et de contrôle entre deux nœuds du maillage temporel, les contraintes sur l'état et le contrôle peuvent également être imposées sur ces évaluations intermédiaires.

Le problème de contrôle optimal en dimension infinie 1.3 est ainsi transformé en un problème d'optimisation non linéaire de dimension finie :

Problème 1.4. Trouver les $x_j, u_j, j = 1, \dots, N$ vérifiant :

$$\begin{aligned} & \min_{x_j, u_j} \tilde{J}(x_j, u_j, t_j) \\ \text{t. q. } & \begin{cases} R_k = 0, \forall k = 1, \dots, N, \\ \forall k = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, n, x_{\min} \leq x_{j,k} \leq x_{\max}, \\ \forall k = 1, \dots, N, \forall j = 1, \dots, m, u_{\min} \leq u_{j,k} \leq u_{\max}, \\ x_0 \text{ donné,} \\ x_N \text{ libre ou } x_N = x_f \text{ donné.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.121)$$

◦

La dimension de l'espace des solutions est $(n + m)N$. Il est possible de réduire la dimension de l'espace des solutions en intégrant explicitement l'équation différentielle (1.102) comme le suggère [Hull, 1997] afin d'enlever les évaluations du vecteur d'état de l'ensemble des variables d'optimisation. Ceci n'est pas toujours réalisable en pratique. Dans le cas où il existe une transformation qui permet d'utiliser l'inclusion différentielle, seul le vecteur de contrôle reste inconnu. [Conway and Prussing, 1993], [Petit et al., 2001], [Neckel et al., 2003] et [Louembet et al., 2009] ont étudié les méthodes de collocation utilisables avec l'inclusion différentielle.

Une des principales difficultés de l'utilisation des méthodes de collocation pour résoudre un problème de contrôle optimal réside dans la nécessité de choisir judicieusement la discrétisation de l'intervalle temporel. En effet, il est nécessaire de bien connaître l'équation différentielle afin de capturer correctement des différences de dynamiques sur l'horizon temporel de résolution du problème de contrôle optimal. Un choix judicieux de la discrétisation intervient également pour la prise en compte des contraintes sur l'état car respecter la contrainte sur l'état sur les nœuds de la discrétisation n'implique pas que la contrainte est respectée sur les intervalles entre les nœuds. Il faut donc choisir une discrétisation suffisamment fine pour éviter que la trajectoire ne sorte de la zone allouée entre deux points, tout en gardant à l'esprit qu'une discrétisation plus fine induit une augmentation de la dimension de l'espace des solutions, et donc une augmentation des ressources de calcul nécessaires.

1.5.3 MÉTHODES INDIRECTES ET CONTRAINTES SUR L'ÉTAT

1.5.3.1 LES MÉTHODES INDIRECTES

Les méthodes indirectes sont souvent abordées comme une extension du calcul des variations aux problèmes de contrôle optimal – voir par exemple les références [Naidu, 2002], [Kirk, 2004], [Vinter, 2010], [Athans and Falb, 1966]. Elles sont essentiellement fondées sur l'application du Principe du Maximum de Pontryagin (PMP, [Pontryagin et al., 1962]) qui permet d'écrire les conditions nécessaires d'optimalité du problème de commande optimale, que ce soit dans le cas où le vecteur de contrôle n'est pas contraint (PMP faible) ou pour celui où il est contraint (PMP fort, [Trélat, 2012]). Les solutions (en u et x) de ces conditions nécessaires d'optimalité, appelées extrémales, forment l'ensemble des candidats à l'optimalité. Les extrémales sont obtenues à travers la résolution d'un problème aux deux bouts (*Two Point Boundary Value Problem* (TPBVP)) par des méthodes de tir (voir par exemple la référence [Bonnard et al., 2005]). Nous détaillons dans cette section les différents éléments de cette méthodologie.

Considérons le problème de contrôle optimal suivant pour lequel le contrôle est contraint mais l'état ne l'est pas :

Problème 1.5. Trouver le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée vérifiant :

$$\begin{aligned} \min_{u,x} &= \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x, u, t) dt \\ \text{t. q. :} & \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ donné}, \\ x(t_f) = x_f \text{ libre ou fixé}, \\ t_f \text{ libre ou fixé}, \\ \forall t \in [t_0, t_f], \forall j \in \{1, m\}, u_{\min} \leq u_j(t) \leq u_{\max}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.122)$$

◦

En introduit le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, appelé vecteur adjoint, $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}^n$, le Hamiltonien est défini par :

$$\mathcal{H}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = \mathcal{L}(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T f(x(t), u(t), t). \quad (1.123)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité à l'ordre 1 sont données par le théorème suivant (voir par exemple les références [Bonnard et al., 2005] et [Liberzon, 2012]) :

Théorème 1.1. *Soit le système de contrôle défini par l'équation différentielle (1.102), où f est de classe \mathcal{C}^1 , et le coût à minimiser défini par l'équation (1.103), où ψ et \mathcal{L} sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Si u^* est le contrôle optimal pour le problème (1.5) et x^* la trajectoire optimale associée, alors il existe un vecteur d'état adjoint optimal λ^* absolument continu tel que les conditions nécessaires suivantes sont vérifiées :*

- équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{x}^* = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)^T (x^*, \lambda^*, u^*, t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad (1.124a)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T (x^*, \lambda^*, u^*, t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)^T (x^*, u^*, t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T (x^*, u^*, t) \lambda^*(t), \quad (1.124b)$$

- condition d'optimalité :

$$u^* = \underset{u \in \mathcal{U}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u, t), \quad (1.125)$$

- conditions de transversalité :

$$\left[\mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(x^*, t) \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}(x^*, t) - \lambda^* \right]_{t_f} \delta x_f = 0, \quad (1.126)$$

- évolution temporelle du Hamiltonien :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(x^*, \lambda^*, u^*, t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(x^*, \lambda^*, u^*, t), \quad (1.127)$$

où dans les équations précédentes, la dépendance temporelle des fonctions x^* , u^* et λ^* a été omise pour des raisons de lisibilité.

Les conditions de transversalité (1.126) sont écrites sous une forme générale et peuvent être détaillées en fonction des différents types de problèmes de contrôle optimal à résoudre. Les trois cas qui seront utilisés dans la suite de cette étude sont les suivants :

- problème à temps final fixe et à état final fixe :

- ◊ $x(t_f) = x_f$ fixé,
- ◊ $\lambda(t_f)$ libre,
- ◊ $\frac{d\mathcal{H}^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}$,

- problème à temps final fixe et à état final libre :

- ◊ $\lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{t_f}$,
- ◊ $\frac{d\mathcal{H}^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}$,

- problème à temps final fixé et à état final contraint : il s'agit d'un problème pour lequel l'état final est contraint dans une variété définie par les k équations $g_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, k$:

- ◊ $\forall i = 1, \dots, k, g_i(x_f) = 0$,
- ◊ $\lambda(t_f)$ est orthogonal à la surface définie par les g_i en t_f :

$$\lambda(t_f)^* = \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial g_i}{\partial x} \Big|_{x^*(t_f)},$$

- ◊ $\frac{d\mathcal{H}^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}$.

La référence [Athans and Falb, 1966, Tableau 5-1 pages 306-307] résume les différents types de problèmes non contraints avec les différents espaces d'arrivée et les conditions nécessaires qui en découlent.

Dans le cas où il est possible d'exprimer le contrôle optimal u^* en fonction de l'état et de l'état adjoint optimaux x^* et λ^* à partir de la condition d'optimalité (1.125), c'est-à-dire d'écrire :

$$u^*(t) = u^*(x^*(t), \lambda^*(t)), \quad (1.128)$$

les équations canoniques de Hamilton (1.124) peuvent se réécrire sous la forme d'un système de deux équations différentielles couplées :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, u(x, \lambda)) = f^x(x(t), \lambda(t), t), \\ \dot{\lambda}(t) &= - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)^T (x, u(x, \lambda), t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^T (x, u(x, \lambda), t) \lambda(t), \\ &= f^\lambda(x(t), \lambda(t), t), \end{aligned} \quad (1.129)$$

avec les conditions aux limites données par les équations de transversalité.

Le système (1.129) avec les conditions de transversalité (1.126) forment un problème aux deux bouts (TPBVP). Ce type de problème peut être résolu par une méthode de tir simple dont le principe est le suivant. L'objectif de la résolution du problème aux deux bouts est de trouver les conditions initiales qui permettent à la trajectoire extrémale d'arriver aux conditions finales spécifiées par les conditions de transversalité. A partir d'une première estimation des conditions initiales, le système (1.129) est intégré de t_0 à t_f par une méthode numérique. L'état final ainsi atteint est comparé aux conditions finales données par les conditions de transversalité. Si l'écart entre l'état final intégré numériquement et les conditions de transversalités est supérieur à une valeur donnée, l'état initial est ajusté et le processus est répété jusqu'à convergence de la méthode. Il est également possible de mettre en œuvre une méthode de tir multiple, pour laquelle l'intervalle $[t_0, t_f]$ est découpé en sous intervalles sur chacun desquels la méthode de tir simple est appliquée.

Les méthodes de tir présentent l'inconvénient d'être très sensibles aux conditions initiales choisies, comme cela est décrit dans la référence [Ross, 2015]. Il est alors possible de combiner une méthode directe et une méthode indirecte pour former une méthode de résolution dite hybride. Le problème de contrôle optimal 1.3 est d'abord résolu par une méthode directe, ce qui permet d'obtenir une première idée de la structure de la trajectoire et du contrôle optimaux. Comme le montrent les références [von Stryk and Bulirsch, 1992] et [Grimm and Markl, 1997], les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes de résidus approchent le vecteur adjoint. Ainsi la valeur en $t = t_0$ donne une première approximation de la valeur initiale du vecteur adjoint optimal qui est utilisée pour initialiser le problème aux deux bouts.

Les contraintes de maintien à poste (1.52) sont des contraintes sur le vecteur d'état du système. L'étude des conditions nécessaires d'optimalité en présence de contraintes sur l'état a fait l'objet de nombreuses études et est encore un domaine de recherche actuel. Ces contraintes sur l'état peuvent être prises en compte de façon approchée par des fonctions de pénalisation, ou de façon exacte en étendant le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP). Ces extensions font en général appel à l'analyse non lisse et sont difficiles à mettre en œuvre sauf dans certains cas simples où le contrôle est scalaire.

1.5.3.2 PRISE EN COMPTE DES CONTRAINTES SUR L'ÉTAT VIA UNE MÉTHODE DE PÉNALISATION

La méthode de pénalisation, exposée par exemple dans [Naidu, 2002], consiste à augmenter le vecteur d'état avec un vecteur d'état complémentaire définie comme une fonction des contraintes. Si les contraintes sur l'état sont notées :

$$\chi(x(t), t) \leq 0, \quad (1.130)$$

avec $\chi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$, une fonction supposée avoir des dérivées premières et secondes par rapport à l'état continues, la dynamique additionnelle de l'état complémentaire est définie par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= f_{n+1}(x(t), t), \\ &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} [\chi_j(x(t), t)]^2 [1 + \text{sign}(\chi_j(x(t), t))], \end{aligned} \quad (1.131)$$

Le nom de méthode de pénalisation vient de la forme de la fonction f_{n+1} . Lorsque l'état se trouve dans la zone admissible, $f_{n+1} = 0$ tandis que si une trajectoire viole la contrainte sur l'état, $f_{n+1} > 0$.

Les conditions initiales et terminales sur l'état additionnel suivantes sont ajoutées :

$$x_{n+1}(t_0) = x_{n+1}(t_f) = 0. \quad (1.132)$$

Il est possible d'utiliser l'approche indirecte pour déterminer les conditions nécessaires d'optimalité en définissant un Hamiltonien augmenté avec l'état complémentaire contenant l'information de la contrainte à respecter :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}(x(t), \lambda(t), u(t), t) &= \mathcal{H}(x(t), \lambda(t), u(t), t) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x(t), t) \\ &= \mathcal{L}(x(t), u(t), t) + \lambda(t)^T f(x(t), u(t), t) + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x(t), t) \end{aligned} \quad (1.133)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent alors :

$$\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \lambda} \right)^T = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad (1.134)$$

$$\dot{x}_{n+1}^*(t) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \lambda_{n+1}} = f_{n+1}(x^*(t), t), \quad (1.135)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x} \right)^T, \quad (1.136)$$

$$\dot{\lambda}_{n+1}^* = - \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial x_{n+1}}, \quad (1.137)$$

$$u^*(t) = \underset{u \in \mathcal{U}}{\text{argmin}} \tilde{\mathcal{H}}(x^*, \lambda^*, u, t), \quad (1.138)$$

$$(1.139)$$

avec les conditions de transversalité associées .

Puisque la fonction f_{n+1} ne dépend pas du contrôle, la condition (1.138) est équivalente

à la condition (1.125). Puisque l'état x_{n+1} n'est présent ni dans la dynamique ni dans la fonction objectif, la condition (1.137) devient :

$$\dot{\lambda}_{n+1}^*(t) = 0, \quad (1.140)$$

et ainsi :

$$\lambda_{n+1}^*(t) = \text{constante} = \mu, \quad (1.141)$$

où μ est une constante à déterminer.

La condition (1.136) se réécrit alors :

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T - \mu \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} [\chi_j(x(t), t)^2] [1 + \text{sign}(\chi_j(x(t), t))]. \quad (1.142)$$

Ainsi, les contraintes sur l'état sont prises en compte au travers de l'équation du vecteur adjoint.

1.5.3.3 EXTENSION DU PMP POUR LES CONTRAINTES SUR L'ÉTAT

Dans cette sous-section, des techniques d'extension du PMP pour prendre en compte les contraintes sur l'état sont présentées pour résoudre le problème de contrôle optimal suivant :

Problème 1.6. Trouver le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée vérifiant :

$$\begin{aligned} \min_{u,x} &= \psi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x, u, t) dt \\ \text{t. q. :} & \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0 \text{ donné}, \\ x(t_f) = x_f \text{ libre ou fixé}, \\ t_f \text{ libre ou fixé}, \\ \forall t \in [t_0, t_f], \forall j \in \{1, m\}, u_{\min} \leq u_j(t) \leq u_{\max}, \\ \forall t \in [t_0, t_f], \forall i \in \{1, s\}, c_i(t, x(t)) \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.143)$$

◦

où s est le nombre de contraintes sur l'état présentes. Les fonctions f , ψ et c_i sont supposées être de classe \mathcal{C}^1 . De plus, le contrôle optimal u est supposé continu par morceaux. Les contraintes sur l'état sont regroupées dans un vecteur c tel que :

$$c(x(t), t) = \begin{bmatrix} c_1(x(t), t) \\ \vdots \\ c_s(x(t), t) \end{bmatrix}, \quad (1.144)$$

et la condition $c(x(t), t) \leq 0$ signifie : $\forall i \in \{1, s\}, c_i(x(t), t) \leq 0$.

DÉFINITIONS

Afin d'établir une extension du PMP, il est nécessaire de définir les arcs frontières, les contrôles frontières, les points d'entrées et de sortie de cet arc frontière et l'ordre d'une

contrainte sur l'état.

Definition 1.2. Un arc frontière est un arc γ_b tel que $c(\gamma_b(t)) = 0$. Le contrôle frontière associé est noté u_b .

Definition 1.3. Une contrainte $c_i(t, x(t)) \leq 0$, $i \in \{1, \dots, s\}$ est dite active sur un intervalle $[t_1, t_2]$ si :

$$\forall t \in [t_1, t_2], c_i(t, x(t)) = 0. \quad (1.145)$$

L'intervalle $[t_1, t_2]$ est alors appelé intervalle frontière. t_1 est le point d'entrée et t_2 le point de sortie de cet arc frontière. Dans le cas où $t_1 = t_2$, l'arc frontière est réduit à un point et le point t_1 est appelé point de contact. L'ensemble des points d'entrée, de sortie et de contact sont appelés points de jonction.

Definition 1.4. L'ordre p_i de la contrainte sur l'état c_i est tel que pour $k = 1, \dots, p_i - 1$, $c^{(k)}(x(t), t)$ ne dépend pas explicitement de u , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^k c}{\partial u^k}(x(t), t) = 0, k = 1, \dots, p_i - 1 \text{ et } \frac{\partial^{p_i} c}{\partial u^{p_i}}(x(t), t) \neq 0. \quad (1.146)$$

Si s' contraintes sont actives sur la frontière $[\tau_1, \tau_2]$ d'ordre $p_1, \dots, p_{s'}$ respectivement, nous supposons que les dérivées partielles des contraintes par rapport au contrôle sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{p_1} h_1}{\partial u^{p_1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^{p_{s'}} h_{p_{s'}}}{\partial u^{p_{s'}}} \end{bmatrix} = s'. \quad (1.147)$$

Parmi les contraintes sur l'état, il est possible de distinguer des contraintes dites mixtes pour lesquels la fonction de contrainte est une fonction de l'état et du contrôle par opposition aux contraintes pures pour lesquelles le contrôle est absent. Par la suite, nous n'aborderons que des contraintes pures sur l'état.

CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ

Comme cela est développé dans les références [Bryson et al., 1963] et [Hartl et al., 1995] par exemple, si la contrainte sur l'état c_i est d'ordre 1, alors $\dot{c}_i(x(t), u(t), t) = 0$ est une contrainte égalité permettant de déterminer le contrôle frontière. Un Hamiltonien et un Lagrangien sont définis sous la forme :

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 \mathcal{L}(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t), \quad (1.148a)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, u, \lambda_0, \lambda, \nu, t) = \mathcal{H}(x, u, \lambda_0, \lambda, t) + \nu^T c^{(p)}(x, u, t) \quad (1.148b)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité sont énoncées sous la forme du théorème suivant :

Théorème 1.5. Soit $x^*(t)$ et $u^*(t)$ une trajectoire et un contrôle optimaux, tels que :

- x^* a un nombre fini d'instant de jonction,

- les conditions suivantes sont vérifiées pour les contraintes sur l'état :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{c}}{\partial u}(x^*, u^*, t) & 0 & \text{diag}(c(x^*, u^*, t)) \end{bmatrix} = s \quad (1.149)$$

Alors il existe :

- une constante $\lambda_0^* \geq 0$,
- un état adjoint absolument continu par morceaux λ^* optimal,
- s multiplicateurs continus par morceaux ν_i^* optimaux,
- un vecteur $\mu(\tau_i)$ pour chaque τ_i date de discontinuité de λ^* ,

qui ne sont pas tous nuls, tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$u^*(t) = \underset{u \in \mathcal{U}}{\text{argmax}} \tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), u, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t), \quad (1.150)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \nu^*, t) = 0, \quad (1.151)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda_0, \lambda, \mu, \nu, t), \quad (1.152)$$

$$\nu^*(t) \text{ non croissante sur les intervalles frontières des } c_i, \quad (1.153)$$

$$\nu^*(t) \geq 0, \quad (1.154)$$

$$\dot{\nu}^*(t) \leq 0, \quad (1.155)$$

$$\dot{\nu}^*(t)^T c(x^*(t), t) = 0, \quad (1.156)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(x^*(t), u^*, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) = \frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dt}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \nu^*, t) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t}(x^*, u^*, \lambda_0, \lambda, \nu^*, t). \quad (1.157)$$

Pour τ dans un intervalle frontière et pour tout point de contact τ , le vecteur adjoint λ peut avoir des discontinuités données par les conditions de saut suivantes :

$$\lambda^*(\tau^-) = \lambda^*(\tau^+) + \mu(\tau) \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(\tau), \tau), \quad (1.158)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*(\tau^-), u^*(\tau^-), \lambda_0^*, \lambda^*(\tau^-), \tau^-) &= \mathcal{H}(x^*(\tau^+), u^*(\tau^+), \lambda_0^*, \lambda^*(\tau^+), \tau^+) \\ &\quad - \mu(\tau) \frac{\partial c}{\partial t}(x^*(\tau), \tau), \end{aligned} \quad (1.159)$$

et pour des temps d'entrées τ_1 sur des arcs frontières :

$$\mu(\tau_1) \geq \nu(\tau_1^+). \quad (1.160)$$

Au temps terminal t_f , les conditions de transversalités sont également vérifiées et pour τ dans un intervalle frontière et pour tout point de contact τ , le vecteur adjoint λ peut avoir des discontinuités données par les conditions de saut suivantes :

$$\lambda^*(\tau^-) = \lambda^*(\tau^+) + \eta(\tau) \frac{\partial h}{\partial x}(x^*(\tau), \tau), \quad (1.161)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*(\tau^-), u^*(\tau^-), \lambda_0, \lambda(\tau^-), \tau^-) &= \mathcal{H}(x^*(\tau^+), u^*(\tau^+), \lambda_0, \lambda(\tau^+), \tau^+) \\ &\quad - \eta(\tau) \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(\tau), \tau) \end{aligned} \quad (1.162)$$

et pour des temps entrées τ_1 :

$$\eta(\tau_1) \geq \nu(\tau_1^+). \quad (1.163)$$

La référence [Hannemann and Marquardt, 2010] applique le théorème précédent dans le cas d'une contrainte pure sur l'état d'ordre 1 avec un contrôle de dimension supérieure à 1 dans le cas du contrôle optimal d'un réacteur dit de William-Otto. La référence [Bonnans and Hermant, 2009] étend ces résultats dans le cas où la contrainte sur l'état est d'ordre supérieur à 1.

EXTENSIONS PARTICULIÈRES DANS LE CAS OÙ LE CONTRÔLE EST SCALAIRE

Dans le cas où le contrôle est scalaire ($m = 1$), les références [Bryson et al., 1963], [Maurer, 1977] étendent les résultats du paragraphe précédent lorsque la contrainte sur l'état est scalaire ($s = 1$) et d'ordre supérieur à 1 ($p \geq 1$). Le théorème suivant donne les conditions nécessaires d'optimalité :

Théorème 1.6. *Soit $x^*(t)$ et $u^*(t)$ une trajectoire et un contrôle optimaux tels que x^* a un nombre fini d'instant de jonction. Alors il existe :*

- un état adjoint absolument continu par morceaux λ^* optimal,
- un multiplicateur continu par morceaux ν_i^* optimaux,
- $q - 1$ multiplicateurs $\mu_k(\tau_i)$ pour chaque τ_i date de discontinuité de λ^* ,

qui ne sont pas tous nuls, tels que les conditions suivantes sont vérifiées :

$$u^*(t) = \operatorname{argmax}_{u \in \mathcal{U}} \tilde{\mathcal{H}}(x^*(t), u, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t), \quad (1.164)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \nu^*, t) = 0, \quad (1.165)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial x}(x^*, u^*, \lambda_0, \lambda, \mu, \nu, t), \quad (1.166)$$

$$\nu^*(t) \text{ non croissante sur les intervalles frontières de } c, \quad (1.167)$$

$$\nu^*(t) \geq 0, \quad (1.168)$$

$$\nu^*(t)c(x^*(t), t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (1.169)$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(x^*(t), u^*, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) = \frac{d\tilde{\mathcal{H}}}{dt}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \nu^*, t) = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial t}(x^*, u^*, \lambda_0, \lambda, \nu^*, t). \quad (1.170)$$

Pour τ sur un intervalle frontière, le contrôle frontière est déterminé par :
 $c^{(p)}(x(t), u(t), t) = 0$.

Pour τ_1 une date d'entrée sur un intervalle frontière, les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$\forall k = 0, \dots, p-1, \quad c^{(k)}(x(\tau_1), \tau_1) = 0, \quad (1.171)$$

et les conditions de saut suivantes sur le vecteur adjoint et sur le Hamiltonien doivent être respectées :

$$\lambda^*(\tau_1^-) = \lambda^*(\tau^+) + \sum_{k=0}^{p-1} \mu_k \frac{\partial^k c}{\partial x^k}(x^*(\tau_1), \tau_1), \quad (1.172)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x^*(\tau^-), u^*(\tau^-), \lambda^*(\tau^-), \tau^-) &= \mathcal{H}(x^*(\tau^+), u^*(\tau^+), \lambda_0^*, \lambda^*(\tau^+), \tau^+) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{p-1} \mu_k \frac{\partial^k c}{\partial t^k}(x^*(\tau_1), \tau_1). \end{aligned} \quad (1.173)$$

Cette version du principe du maximum est utilisée par [Conway, 2010] pour établir de façon analytique la solution optimale d'un transfert à poussée faible entre deux orbites avec des contraintes sur l'altitude. Dans le cas particulier d'un problème de Mayer pour lequel la dynamique est affine en le contrôle, les références [Bonnard et al., 2005] et [Schättler, 2014] ont utilisé une approche géométrique pour écrire les conditions de jonctions lors de l'entrée de la sortie d'un arc frontière. Cette approche a été appliquée dans le cas de la réentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère (voir la référence [Bonnard et al., 2003]).

1.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les stratégies de maintien à poste existantes basées sur une analyse physique des perturbations orbitales ont été analysées dans le cadre de propulseurs à poussées forte et à poussées faibles. Cette analyse permettra d'étayer les résultats numériques des stratégies de maintien à poste qui seront établies dans les chapitres suivants.

Par ailleurs, il a été possible de présenter le système propulsif à poussée électrique qui sera utilisé dans la suite de l'étude, ainsi que les contraintes technologiques associées. Une traduction mathématiques de ces contraintes a conduit à l'écriture du problème de maintien à poste à consommation minimale sous la forme d'un problème de contrôle optimal avec contraintes sur le contrôle et sur l'état.

Parmi les techniques classique de résolution des problèmes de contrôle optimal, il est possible de distinguer deux grandes familles, les méthodes directes et les méthodes indirectes. L'analyse de ces méthode montre que la prise en compte des contraintes sur l'état n'est pas aisée. De plus, les contraintes que les instants de milieu de poussées ainsi que leurs demi-largeurs doivent vérifier définissent un espace admissible non connexe. Par ailleurs, le nombre de poussées par propulseur n'est pas fixé *a priori*, et résoudre un problème non linéaire en nombres entiers est alors nécessaire pour le déterminer. C'est pourquoi, les techniques classiques présentées ne permettent pas de résoudre le problème de maintien à poste à consommation minimale. Les chapitres suivant sont donc dédiés à l'élaboration de méthodes originales pour la résolution du problème posé.

Chapitre 2

Solutions optimales analytiques pour le maintien à poste hors-plan à poussée faible

Dans le mécanisme de l'univers, les rouages de l'inévitabilité s'engrenèrent avec un déclic...

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Sommaire

2.1	Introduction	58
2.2	Description du problème	58
2.2.1	Équations d'évolution et trajectoire	58
2.2.2	Problèmes à résoudre	60
2.3	Solutions analytiques du problème de résonance hors-plan	62
2.3.1	Conditions nécessaires d'optimalité	62
2.3.2	Trajectoire optimale	65
2.3.3	Conditions de transversalité	67
2.3.4	Étude des différents cas possibles	69
2.3.4.1	Calcul des angles α et ϕ	70
2.3.4.2	Valeurs initiales du vecteur adjoint	81
2.3.5	Conclusion	82
2.4	Solution analytique du problème de maintien à poste hors-plan	83
2.4.1	Description du problème	83
2.4.2	Trajectoire avant le point de contact	85
2.4.2.1	Trajectoire $A - B - D$	86
2.4.2.2	Trajectoire $A - C - D$	90
2.4.2.3	Comparaison des trajectoires $A - B - D$ et $A - C - D$	92
2.4.3	Étude du point de contact et du vecteur adjoint	93
2.4.3.1	Condition de saut	93
2.4.3.2	Valeur initiale du vecteur adjoint	94
2.4.3.3	Saut au point de contact	96
2.4.3.4	Conclusion	98
2.5	Conclusion	98

2.1 INTRODUCTION

Le mouvement hors-plan d'un satellite en orbite képlérienne relativement à un point se déplaçant sur une orbite circulaire est le mouvement d'un oscillateur harmonique. Le problème du rendez-vous dans ce contexte a été étudié depuis les années 1960 avec par exemple la référence [Athans and Falb, 1966] dans le cadre du contrôle temps minimal ou la référence [Athans et al., 1963] dans le cadre du contrôle à temps, consommation et énergie minimale. Dans les années 1980, la référence [Carter, 1987] étudie le problème de rendez-vous dans le cas d'une orbite de référence elliptique, mais n'en donne pas de solutions explicites. La référence [e Souza, 1987] compare les conditions nécessaires d'optimalité issues du Principe du Maximum de Pontryagin pour le problème de consommation minimale. Dans le cadre de la poussée forte, des travaux récents ont apporté une solution analytique (voir la référence [Serra et al., 2014]).

Cependant, le problème de maintien à poste hors-plan n'a pas encore été étudié à notre connaissance. La référence [Scaramozzino et al., 2015] définit et résout un problème de résonance en temps minimal pour un oscillateur harmonique, dont le but est d'amener un point matériel à osciller à une amplitude donnée. Or, résoudre un problème de maintien à poste hors-plan revient à imposer une amplitude des oscillations au plus égale à la taille de la fenêtre de maintien à poste. C'est pourquoi, une première analyse des conditions nécessaires d'optimalité pour ce problème de maintien à poste passe par la résolution d'un problème de résonance.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le problème de maintien à poste à consommation minimale, et de donner les différentes solutions possibles pour ce problème. Pour ce faire, les différentes solutions analytiques du problème de résonance à consommation minimale sont dérivées. Ce dernier problème est une version simplifiée mais plus forte du problème de maintien à poste puisque si le satellite arrive à osciller à une amplitude plus petite que la taille de la fenêtre, le maintien à poste est assuré. Le problème de contrôle optimal est ensuite résolu avec les contraintes sur l'état modélisant le problème de maintien à poste hors-plan en utilisant le Principe du Maximum étendu.

2.2 DESCRIPTION DU PROBLÈME

2.2.1 ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ET TRAJECTOIRE

Le mouvement hors-plan relativement à un point se déplaçant sur une orbite circulaire est représenté au moyen de la position et de la vitesse cartésiennes notées :

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Le satellite est équipé d'un système propulsif idéal constitué de deux propulseurs poussant dans la direction perpendiculaire au plan de l'équateur, chacun dans un sens opposé et produisant une accélération comprise entre 0 et U_{\max} . Les fonctions de contrôle pour les

propulseurs hors-plan peuvent être notées :

$$\begin{cases} u_{+N} \in [0, U_{\max}] & \text{pour le propulseur dans la direction } +\vec{u}_N, \\ u_{-N} \in [0, U_{\max}] & \text{pour le propulseur dans la direction } -\vec{u}_N, \end{cases} \quad (2.2)$$

ou encore :

$$u_N \in [-U_{\max}, +U_{\max}] \text{ avec} \quad \begin{cases} u_N \geq 0 & \text{pour une poussée dans la direction } +\vec{u}_N, \\ u_N \leq 0 & \text{pour une poussée dans la direction } -\vec{u}_N. \end{cases} \quad (2.3)$$

En utilisant la partie hors-plan des équations de Hill-Clohessy-Wiltshire, la dynamique du satellite s'écrit :

$$\dot{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A_z} Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_z} u_N, \quad (2.4)$$

avec n la pulsation moyenne de référence. Puisque ce point est sur une orbite géostationnaire, le mouvement moyen est égal à la vitesse de rotation de la Terre, soit : $n = \omega_{\oplus}$ la vitesse de rotation de la Terre.

L'équation précédente peut être intégrée dans les trois cas suivants :

- en supposant que le contrôle est nul sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, l'équation (2.4) s'intègre en : $\forall t \in [t_0, t_1]$,

$$Z(t) = e^{A_z(t-t_0)} Z(t_0) = \begin{bmatrix} \cos(n(t-t_0)) & \frac{\sin(n(t-t_0))}{n} \\ -n \sin(n(t-t_0)) & \cos(n(t-t_0)) \end{bmatrix} Z(t_0), \quad (2.5)$$

c'est-à-dire :

$$z_1(t) = z_1^0 \cos(n(t-t_0)) + \frac{z_2^0}{n} \sin(n(t-t_0)), \quad (2.6a)$$

$$z_2(t) = -n \left(z_1^0 \sin(n(t-t_0)) + \frac{z_2^0}{n} \cos(n(t-t_0)) \right), \quad (2.6b)$$

ou encore, avec les transformations de l'annexe G :

$$z_1(t) = \sqrt{z_1^0{}^2 + \frac{z_2^0{}^2}{n^2}} \sin \left(n(t-t_0) + \arctan \left(\frac{nz_1^0}{z_2^0} \right) \right), \quad (2.7a)$$

$$z_2(t) = n \sqrt{z_1^0{}^2 + \frac{z_2^0{}^2}{n^2}} \cos \left(n(t-t_0) + \arctan \left(\frac{nz_1^0}{z_2^0} \right) \right), \quad (2.7b)$$

si $z_2^0 \neq 0$. Combiner les deux équations précédentes permet d'obtenir :

$$z_1^2(t) + \frac{z_2^2(t)}{n^2} = z_1^0{}^2(t) + \frac{z_2^0{}^2(t)}{n^2} = A_0^2. \quad (2.8)$$

Ainsi la trajectoire dans le plan $(z_1, \frac{z_2}{n})$ est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon A_0 (voir figure 2.1).

Si $z_2^0 = 0$, l'équation (2.8) reste valide.

- en supposant que le contrôle est constant et égal à $\pm U_{\max}$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, il est possible d'intégrer l'équation (2.4) en :

$$\forall t \in [t_0, t_1], Z(t) = e^{Az(t-t_0)} Z(t_0) \pm \int_{t_0}^t e^{Az(t-s)} B_z u_N ds. \quad (2.9)$$

En développant :

$$\int_a^b e^{Az(t-s)} B_z ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{n^2} (\cos(n(t-b)) - \cos(n(t-a))) \\ \frac{1}{n} (-\sin(n(t-b)) + \sin(n(t-a))) \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

il est possible d'écrire :

$$z_1(t) = \left(z_1^0 \mp \frac{U_{\max}}{n^2} \right) \cos(n(t-t_0)) + \frac{z_2^0}{n} \sin(n(t-t_0)), \quad (2.11a)$$

$$z_2(t) = -n \left(z_1^0 \mp \frac{U_{\max}}{n^2} \right) \sin(n(t-t_0)) + z_2^0 \cos(n(t-t_0)). \quad (2.11b)$$

En appliquant de la même façon que précédemment les transformations trigonométriques de l'annexe G, la trajectoire est :

$$\left(z_1(t) \mp \frac{U_{\max}}{n^2} \right)^2 + \frac{z_2^2(t)}{n^2} = \left(z_1^0 \mp \frac{U_{\max}}{n^2} \right)^2 + \frac{z_2^0{}^2}{n^2} = A_{\pm}^2, \quad (2.12)$$

c'est à dire un cercle de centre $(\pm \frac{U_{\max}}{n^2}, 0)$ et de rayon A_{\pm} dans le plan $(z_1, \frac{z_2}{n})$ (voir figure 2.1).

2.2.2 PROBLÈMES À RÉSOUDRE

Dans cette étude, deux types de problèmes de maintien à poste hors-plan sont résolus. Si la contrainte de maintien à poste est écrite :

$$\forall t, |z_1(t)| \leq \delta, \quad (2.13)$$

l'analyse des trajectoires réalisée dans la sous-section précédente permet de montrer que s'il existe un instant t_1 tel que :

$$\forall t \geq t_1, z_1^2(t) + \frac{z_2^2(t)}{n^2} \leq \delta, \quad (2.14)$$

alors le maintien à poste est assuré pour $t \geq t_1$. En effet, d'après l'analyse du paragraphe précédent, un point situé l'intérieur du disque \mathcal{D}_{δ}^0 de centre $(0,0)$ et de rayon δ dans le plan de phase a une trajectoire qui reste confinée dans ce disque.

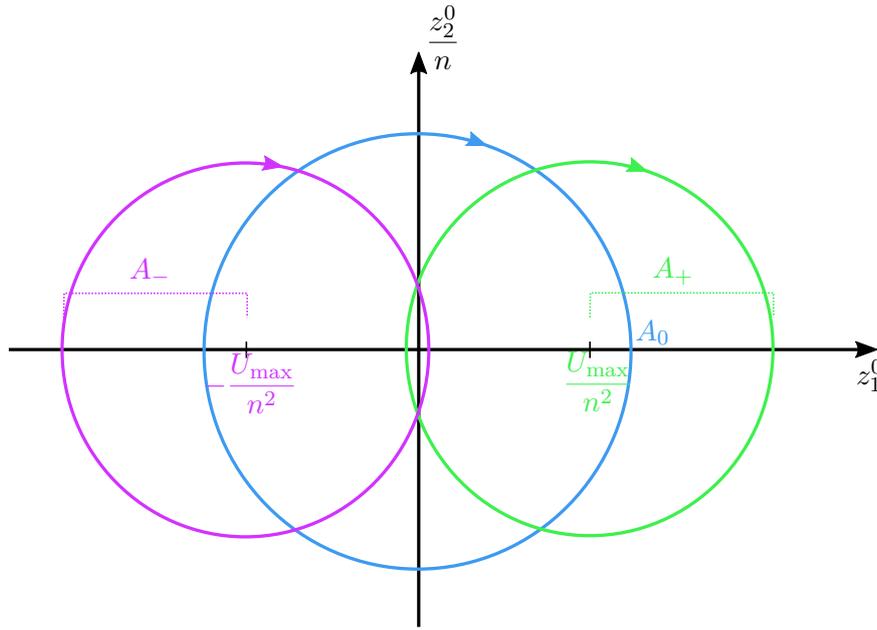


FIGURE 2.1 – Trajectoires dans le plan $(z_1, \frac{z_2}{n})$:

- bleu : trajectoire libre, cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon A_0 (voir équation (2.8)),
- vert : trajectoire pour laquelle le contrôle vaut $+U_{\max}$, cercle de centre $(\frac{U_{\max}}{n^2}, 0)$ (voir équation (2.12)),
- violet : trajectoire pour laquelle le contrôle vaut $-U_{\max}$, cercle de centre $(-\frac{U_{\max}}{n^2}, 0)$ (voir équation (2.12)).

C'est pourquoi, le premier problème considéré dans ce chapitre consiste à imposer au satellite de terminer sa trajectoire sur la frontière de \mathcal{D}_δ^0 , notée \mathcal{C}_δ^0 . Ce problème constitue un problème de résonance étudié par la référence [Scaramozzino et al., 2015] dans le cas temps minimal. Le deuxième problème prend en compte les contraintes de maintien à poste (2.13) dans le cadre du Principe du Maximum étendu présenté dans la section 1.5.3.3. Il s'agit donc d'un problème de maintien à poste à proprement parler car la position finale n'est pas contrainte.

Soit \mathcal{Z} l'espace admissible pour la trajectoire optimale. Pour le problème de résonance, les contraintes de maintien à poste sont retirées du problème, ce qui permet d'écrire : $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^2$. Pour le problème de maintien à poste, l'espace admissible est défini par la contrainte donnée par l'équation (2.13) et s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{Z} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : |z_1(t)| \leq \delta \right\}. \quad (2.15)$$

Le problème à résoudre est de trouver un profil de contrôle à consommation minimale permettant d'amener la trajectoire du point $Z(t_0)$ donné vers un point $Z_f \in \mathcal{Z}_f$ où \mathcal{Z}_f désigne l'espace admissible pour la position et la vitesse finale. Pour chacun des problèmes considérés dans cette étude, \mathcal{Z}_f est défini de façon différente :

- pour le problème de résonance tel qu'il a été défini par la référence [Scaramozzino et al., 2015], l'ensemble \mathcal{Z}_f est défini par :

$$\mathcal{Z}_f = \mathcal{C}_\delta^0 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1^2 + \frac{z_2^2}{n^2} = \delta \right\}, \quad (2.16)$$

- pour le problème de maintien à poste, la position finale n'est pas contrainte et $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}$.

Le problème à résoudre s'écrit alors :

Problème 2.1. Trouver la fonction $t \mapsto u_N(t)$ solution du problème de minimisation :

$$\text{t. q. : } \begin{cases} \min_{u_N} \int_{t_0}^{t_f} |u_N(t)| dt, \\ \dot{Z}(t) = A_z Z(t) + B_z u_N(t), \\ Z(t_0) = Z_0 \text{ donné}, \\ Z(t_f) \in \mathcal{Z}_f, \\ \forall t \in [t_0, t_f], Z(t) \in \mathcal{Z}, \\ u_N \in [-U_{\max}, +U_{\max}], \\ t_f \text{ fixé.} \end{cases} \quad (2.17)$$

◦

2.3 SOLUTIONS ANALYTIQUES DU PROBLÈME DE RÉSONANCE HORS-PLAN

2.3.1 CONDITIONS NÉCESSAIRES D'OPTIMALITÉ

Soit $\Lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$ le vecteur adjoint du système et le hamiltonien défini par :

$$\mathcal{H}(Z, \Lambda, u_N) = |u_N(t)| + \Lambda^T(t) (A_z Z(t) + B_z u_N(t)). \quad (2.18)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre permettent d'écrire que si (u_N^*, Z^*, Λ^*) est un triplet optimal alors :

$$u_N^*(t) = \underset{u_N \in [-U_{\max}, +U_{\max}]}{\operatorname{argmin}} \mathcal{H}(Z^*, \Lambda^*, u_N), \quad (2.19a)$$

$$\dot{Z}^*(t) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Lambda^*} \right)^T, \quad (2.19b)$$

$$\dot{\Lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z^*} \right)^T, \quad (2.19c)$$

$$Z(t_0) = Z_0, \quad (2.19d)$$

$$Z(t_f) \in \mathcal{Z}_f, \quad (2.19e)$$

$$\Lambda(t_0) \text{ libre}, \quad (2.19f)$$

$$(2.19g)$$

et $\Lambda^*(t_f)$ est donné par les équations de transversalité au temps final, qui s'écrivent de la façon suivante. Comme le point final doit se trouver sur la courbe d'équation :

$$g(Z) = z_1^2 + \frac{z_2^2}{n^2} - \delta = 0, \quad (2.20)$$

le vecteur adjoint doit être perpendiculaire à courbe $g(Z) = 0$.

La condition nécessaire (2.19a) peut se réécrire :

$$u_N^*(t) = \underset{u_N \in [-U_{\max}, +U_{\max}]}{\operatorname{argmin}} \left(|u_N| + \lambda_2 u_N \right), \quad (2.21)$$

ce qui permet de déduire la loi de commutation et la commande optimale suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda_2 < -1 & : u_N^* = +U_{\max}, \\ \text{si } -1 < \lambda_2 < 1 & : u_N^* = 0, \\ \text{si } 1 < \lambda_2 & : u_N^* = -U_{\max}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Cette loi de commutation est représentée graphiquement sur le schéma de la figure 2.2.

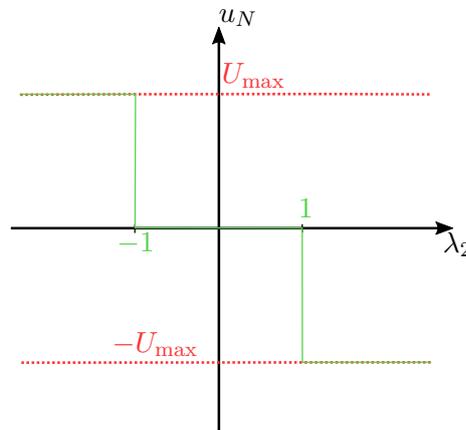


FIGURE 2.2 – Loi de commutation pour le problème hors-plan.

Par ailleurs, les conditions nécessaires (2.19c) peuvent être exprimées sous la forme du système :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = n^2 \lambda_2(t), \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), \end{cases} \quad (2.23)$$

dont la solution est donnée par :

$$\lambda_1(t) = \lambda_1^0 \cos(n(t - t_0)) + n\lambda_2^0 \sin(n(t - t_0)), \quad (2.24a)$$

$$\lambda_2(t) = \lambda_2^0 \sin(n(t - t_0)) - \frac{\lambda_1^0}{n} \cos(n(t - t_0)). \quad (2.24b)$$

En utilisant les transformations trigonométriques de l'annexe G, on obtient :

$$\lambda_1(t) = n \sqrt{\frac{\lambda_1^0{}^2}{n^2} + \lambda_2^0{}^2} \sin \left(n(t - t_0) + \arctan \left(\frac{\lambda_1^0}{n\lambda_2^0} \right) \right), \quad (2.25a)$$

$$\lambda_2(t) = \sqrt{\frac{\lambda_1^0{}^2}{n^2} + \lambda_2^0{}^2} \cos \left(n(t - t_0) + \arctan \left(\frac{\lambda_1^0}{n\lambda_2^0} \right) \right), \quad (2.25b)$$

en supposant $\lambda_2^0 \neq 0$. En combinant les deux équations précédentes, la trajectoire du vecteur

adjoint s'écrit :

$$\frac{\lambda_1^2(t)}{n^2} + \lambda_2^2(t) = \frac{\lambda_1^0{}^2}{n^2} + \lambda_2^0{}^2 = A_\lambda^2. \quad (2.26)$$

Il est possible de retrouver également cette équation avec $\lambda_2^0 = 0$. Ainsi, la trajectoire du vecteur adjoint dans le plan $\left(\frac{\lambda_1}{n}, \lambda_2\right)$ est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon A_λ (voir le schéma de la figure 2.3). Le vecteur adjoint parcourt ce cercle à la vitesse angulaire n . La direction donnée par le vecteur $\left(\frac{\lambda_1(t)}{n}, \lambda_2(t)\right)$ forme avec la direction du vecteur $\left(\frac{\lambda_1(t_0)}{n}, \lambda_2(t_0)\right)$ un angle $n(t - t_0)$ (voir le schéma de la figure 2.4). Dans la suite, on appelle cycle une révolution complète du vecteur adjoint sur sa trajectoire, c'est-à-dire la trajectoire suivie par le vecteur adjoint entre deux instants $[t_1, t_2]$ tels que $n(t_2 - t_1) = 2\pi$.

Les conditions finales pour le vecteur adjoint dépendent des conditions finales sur la position et la vitesse, La loi de commutation (2.22) peut s'interpréter graphiquement à l'aide de la figure 2.3, et une condition nécessaire et suffisante pour la présence de poussées est :

$$A_\lambda > 1. \quad (2.27)$$

La condition $A_\lambda = 1$ donne une poussée de durée nulle, et n'est ainsi pas considérée par la suite. Si $A_\lambda > 1$, un cycle est composé de quatre intervalles :

- un intervalle de poussée dite positive selon la direction $+\vec{u}_N$,
- un intervalle sans poussée suivant un intervalle de poussée positive et précédent un intervalle de poussée négative,
- un intervalle de poussée dite négative selon la direction $-\vec{u}_N$,
- un intervalle sans poussée suivant un intervalle de poussée négative et précédent un intervalle de poussée positive.

Il est également possible de définir l'angle α de la figure 2.3 par :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{A_\lambda}\right). \quad (2.28)$$

Soit $t_p^{\pm\uparrow}$ et $t_p^{\pm\downarrow}$ les instants de début (respectivement fin) des arcs de poussées positives et négatives. L'intervalle $[t_p^{-\uparrow}, t_p^{-\downarrow}]$ de la $p^{\text{ème}}$ poussée négative se produit pour un arc de trajectoire du vecteur adjoint compris entre les angles α et $\pi - \alpha$ définissant ainsi un secteur angulaire d'angle $\pi - 2\alpha$ (voir figure 2.5a). L'égalité :

$$n(t_p^{-\downarrow} - t_p^{-\uparrow}) = \pi - 2\alpha, \quad (2.29)$$

permet de définir la durée d'une poussée négative :

$$t_p^{-\downarrow} - t_p^{-\uparrow} = \frac{\pi - 2\alpha}{n}. \quad (2.30)$$

Il est possible de remarquer qu'à partir de la définition de α (donnée par l'équation 2.28), on a $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, et la durée de la poussée ainsi définie est bien positive. La longueur de

l'intervalle $[t_p^{+\uparrow}, t_p^{+\downarrow}]$ se calcule de la même façon.

L'intervalle $[t_p^{+\downarrow}, t_p^{-\uparrow}]$ sans poussée suivant un intervalle de poussée positive et précédent un intervalle de poussée négative se produit pour un arc de trajectoire du vecteur adjoint compris entre les angles $\pi + \alpha$ et $\pi - \alpha$, définissant ainsi un secteur angulaire d'angle 2α (voir figure 2.5c). L'égalité :

$$n(t_p^{-\uparrow} - t_p^{+\downarrow}) = 2\alpha, \quad (2.31)$$

permet de définir la durée de cet intervalle sans poussée :

$$t_p^{-\uparrow} - t_p^{+\downarrow} = \frac{2\alpha}{n}. \quad (2.32)$$

La longueur de l'intervalle $[t_p^{-\downarrow}, t_p^{+\uparrow}]$ se calcule de la même façon.

Il est aisé de remarquer que la somme des durées des 4 intervalles de chaque cycle est égale à $\frac{2\pi}{n}$.

2.3.2 TRAJECTOIRE OPTIMALE

Avec le calcul de la durée des poussées, le problème consistant à trouver le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée revient à déterminer le nombre de cycles sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ ainsi que la nature des premiers et des derniers intervalles qui forment un cycle incomplet. Or, les instants de poussée sont déterminés par les valeurs de λ_1^0 et λ_2^0 . Résoudre le problème de rendez-vous à consommation minimale revient donc à trouver les valeurs de λ_1^0 et λ_2^0 minimisant la consommation.

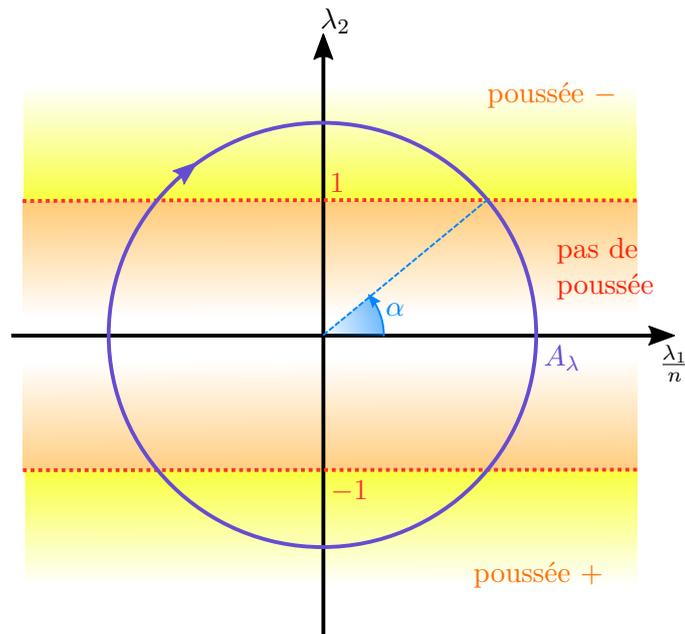


FIGURE 2.3 – Trajectoire du vecteur adjoint dans le plan $(\frac{\lambda_1}{n}, \lambda_2)$.

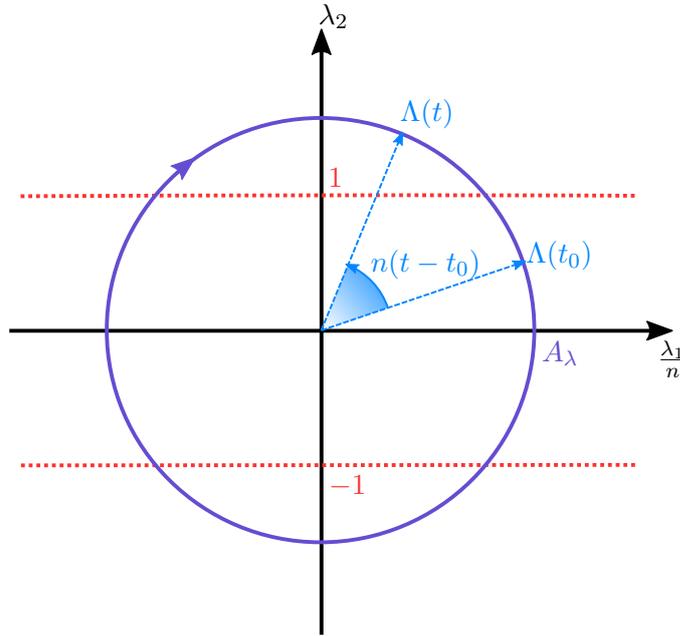


FIGURE 2.4 – Illustration de l’angle entre la direction donnée par le vecteur $\left(\frac{\lambda_1(t)}{n}, \lambda_2(t)\right)$ et la direction du vecteur $\left(\frac{\lambda_1(t_0)}{n}, \lambda_2(t_0)\right)$.

La durée d’un cycle complet étant de $\frac{2\pi}{n}$, le nombre de cycle Q est donné par :

$$Q = \left\lfloor \frac{t_f - t_0}{\frac{2\pi}{n}} \right\rfloor, \quad (2.33)$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . L’horizon temporel peut alors être décomposé sous la forme :

$$t_f - t_0 = \frac{\gamma}{n} + Q \frac{2\pi}{n} + \frac{\beta}{n}, \quad (2.34)$$

où :

- $Q \frac{2\pi}{n}$ correspond à la durée de Q cycles entiers,
- $\frac{\gamma}{n}$ correspond à la durée d’un cycle incomplet placé au début,
- $\frac{\beta}{n}$ correspond à la durée d’un cycle incomplet placé à la fin.

A la manière de [Athans and Falb, 1966] qui étudie la trajectoire en temps minimal de l’oscillateur harmonique vers $(0, 0)$ en partant de la position finale, la trajectoire optimale pour le problème de résonance hors-plan à consommation minimale peut être étudié à partir de la position finale.

L’arc de trajectoire correspondant au cycle incomplet final peut être un des quatre arcs décrits dans le paragraphe précédent, à savoir :

- un arc libre après une poussée positive,
- un arc libre après une poussée négative,

- un arc de poussée positive,
- un arc de poussée négative,

et $\frac{\beta}{n}$ est plus petit que le temps maximal de l'arc en question car l'intervalle peut être incomplet (car le cycle est incomplet).

De la même façon, l'arc de trajectoire correspondant au cycle incomplet initial peut être un des quatre arcs présentés, et est de durée inférieure à la durée maximale de l'arc en question. Dans le cas où plusieurs couples d'arcs initiaux et finaux restent admissibles à la fin de l'analyse des conditions nécessaires, celui conduisant à la consommation la plus petite est le couple solution du problème de contrôle optimal. Or, la poussée étant constante, la consommation minimale est obtenues pour des arcs de poussée les plus courts possibles. Ainsi, si plusieurs valeurs de α sont admissibles, la plus grande conduira aux poussées les plus courtes, et ainsi à la consommation la plus faible.

Il est possible de remarquer grâce à la figure 2.3 que $\alpha = 0$ n'est pas possible, car ceci conduit à une absence d'arcs libres, et l'alternance de poussées positives et négatives correspond à la solution d'un problème de rendez-vous hors-plan en temps minimal tel qu'il a été résolu par [Athans and Falb, 1966]. Par ailleurs, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ conduit à des poussées de durée nulle, ce qui est exclu. Les hypothèses précédentes conduisent alors aux conditions nécessaires :

$$0 < \cos \alpha < 1 \text{ et } \sin \alpha \neq 0. \quad (2.35)$$

Nous supposons par ailleurs qu'il existe au moins un cycle complet.

2.3.3 CONDITIONS DE TRANSVERSALITÉ

Le vecteur adjoint à l'instant final doit être perpendiculaire à la courbe sur laquelle la position finale doit se trouver. Dans le cas traité ici, il s'agit du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon δ . La référence [Scaramozzino et al., 2015] résout un problème de contrôle optimal en temps minimal d'un oscillateur harmonique pour lequel la condition finale est identique à celle présentée ici. Même si le problème résolu ici est un problème à consommation minimale, les conditions de transversalités sont identiques à celles de la référence [Scaramozzino et al., 2015]. Le calcul de ces conditions de transversalité est repris ici.

L'équation de \mathcal{C}_δ^0 se réécrit sous la forme :

$$g(z_1, z_{2n}) = z_1^2 + z_{2n}^2 - \delta^2 = 0, \quad (2.36)$$

un vecteur tangent à la courbe en $t = t_f$ peut être donné par :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix}_{(z_1, z_{2n})}. \quad (2.37)$$

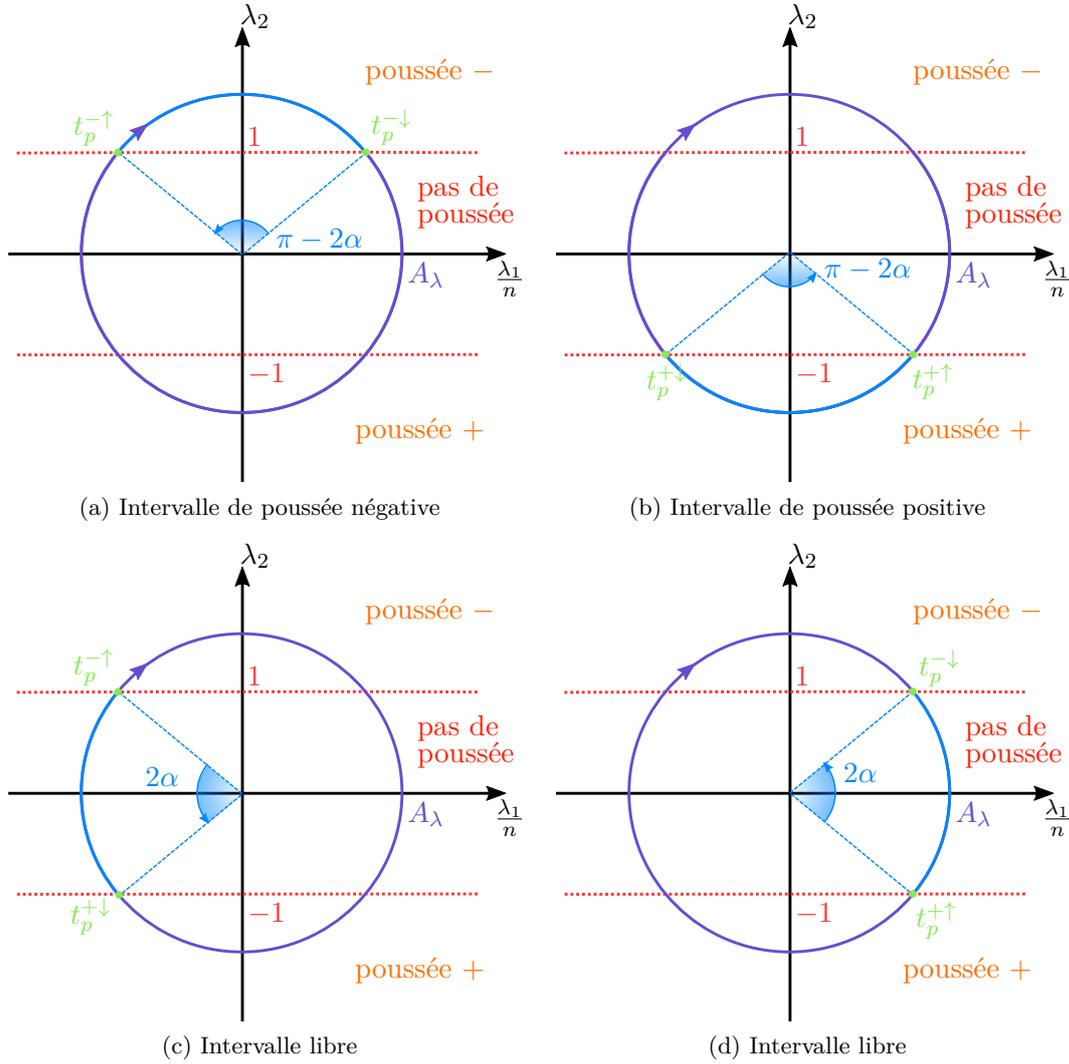


FIGURE 2.5 – Illustration des différents arcs dans le plan $(\frac{\lambda_1}{n}, \lambda_2)$.

Si la trajectoire arrive en $t = t_f$ sur \mathcal{C}_δ^0 , la position finale peut être paramétrée par un angle ϕ défini dans le plan (z_1, z_{2n}) , en notant $z_{2n} = \frac{z_2}{n}$, comme l'angle entre l'axe des abscisses et le vecteur $[z_{1f} \ z_{2nf}]^T$ (voir la figure 2.6) pour donner :

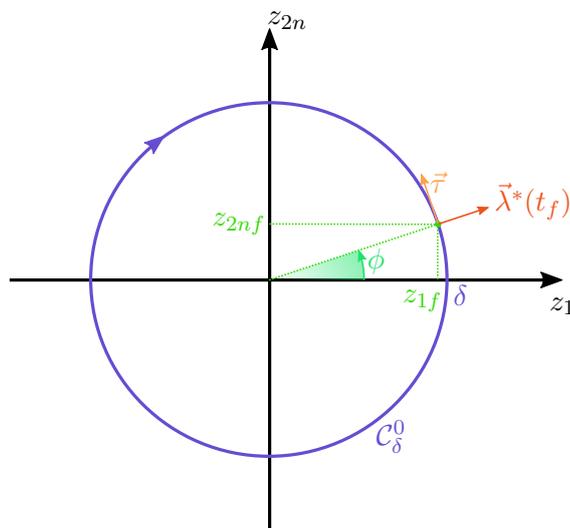
$$\begin{cases} z_1(t_f) = z_{1f} = \delta \cos \phi, \\ z_{2n}(t_f) = z_{2nf} = \delta \sin \phi. \end{cases} \quad (2.38)$$

La condition de perpendicularité entre le vecteur adjoint en $t = t_f$ et le vecteur tangent à \mathcal{C}_δ^0 s'écrit alors :

$$-\lambda_{1n}^*(t_f) \sin \phi + \lambda_2^*(t_f) \cos \phi = 0. \quad (2.39)$$

Or, en écrivant $\lambda_{1n}(t_f)$ et $\lambda_2(t_f)$ en fonction de λ_{1n}^0 et λ_2^0 avec l'équation (2.25), il vient :

$$\lambda_{1n}^0 \sin(n(t_f - t_0) + \phi) = \lambda_2^0 \cos(n(t_f - t_0) + \phi). \quad (2.40)$$

FIGURE 2.6 – Paramétrage de la position finale sur C_δ^0 par l'angle ϕ .

La longueur des arcs est paramétrée par l'inconnue α telle que :

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1n}^0{}^2 + \lambda_2^0{}^2}} = \frac{1}{A_\lambda}. \quad (2.41)$$

Des cycles incomplets peuvent exister au début et à la fin de la trajectoire. Comme les conditions finales ne permettent pas de savoir sur quel arc la trajectoire se termine (arc de poussée positive, arc de poussée négative, arc libre avant une poussée positive ou arc libre avant une poussée négative), il est nécessaire de développer les conditions nécessaires dans chacun de ces quatre cas. Par ailleurs, l'arc initial est lui aussi inconnu, et l'analyse des quatre arcs possibles de départ est également indispensable.

L'équation (2.34) a défini le paramétrage de l'arc final incomplet par un angle β . Or, les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint ont été exprimées avec un angle ϕ . Le tableau 2.1 donne les relations entre ces deux angles en fonction de la nature de l'arc incomplet final et la figure 2.7 les illustre.

Nature de l'arc final	Relation entre β et ϕ	Figure
Arc libre après une poussée positive	$\beta = \pi + \alpha - \phi$	2.7a
Arc libre après une poussée négative	$\beta = \alpha - \phi$	2.7b
Arc de poussée positive	$\beta = 2\pi - \alpha - \phi$	2.7c
Arc de poussée négative	$\beta = \pi - \alpha - \phi$	2.7d

TABLE 2.1 – Relations entre β et ϕ en fonction de la nature de l'arc incomplet final.

2.3.4 ÉTUDE DES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Puisque les conditions nécessaires d'optimalité ne permettent pas de choisir la nature des arcs incomplets initiaux et finaux, une analyse des 16 cas possibles – 4 arcs initiaux et 4

arcs finaux – est indispensable. Dans toute la suite, les notations suivantes seront adoptées :

$$U_n = \frac{U_{\max}}{n^2}, \quad \delta_U = \frac{\delta}{U_n}, \quad \lambda_{1n}(t) = \frac{\lambda_1(t)}{n},$$

$$C_{f0} = \cos(n(t_f - t_0)), \quad S_{f0} = \sin(n(t_f - t_0)),$$

avec $C_{f0}^2 + S_{f0}^2 = 1$, en rappelant que nous avons déjà défini plus haut :

$$z_{2n}(t) = \frac{z_2(t)}{n} \text{ et } z_{2n}^0 = \frac{z_2(t_0)}{n}. \quad (2.42)$$

Pour chaque cas, les hypothèses d'arc initiaux et finaux incomplets permettent de déduire les instants de début et de fin de chaque poussée. Ces cas sont définis dans les tableaux 2.3 à 2.8 et les instants de début et de fin des poussées positives et négatives du cycle p sont données par le tableau 2.2. Ces différents cas conduisent à différentes valeurs des inconnues du problème. Dans la suite de cette section, nous présentons le calcul des angles α et ϕ d'une part et de la valeur initiale du vecteur adjoint d'autre part.

2.3.4.1 CALCUL DES ANGLES α ET ϕ

Les conditions terminales données par l'équation (2.38) se développent en intégrant la dynamique depuis t_0 jusqu'à t_f avec les instants de début et de fin de poussées du tableau 2.2 pour donner un système d'équation sous la forme :

$$\begin{cases} z_1(\alpha, \phi) = \Upsilon_1 = z_1^c C_{f0} + z_2^c S_{f0}, \\ z_{2n}(\alpha, \phi) = \Upsilon_2 = -z_1^c S_{f0} + z_2^c C_{f0}, \end{cases} \quad (2.43)$$

où les valeurs de $z_1(\alpha, \phi)$, $z_{2n}(\alpha, \phi)$, z_1^c et z_2^c diffèrent en fonction des cas (voir les colonnes 2, 3 et 4 des tableaux 2.3 à 2.8). Ces conditions terminales semblent se découper en deux grandes familles : une première regroupant les cas 1 à 4 et 9 à 12, et une deuxième regroupant les cas 5 à 8 et 13 à 14. Les calculs pour les deux familles sont présentés ci-après.

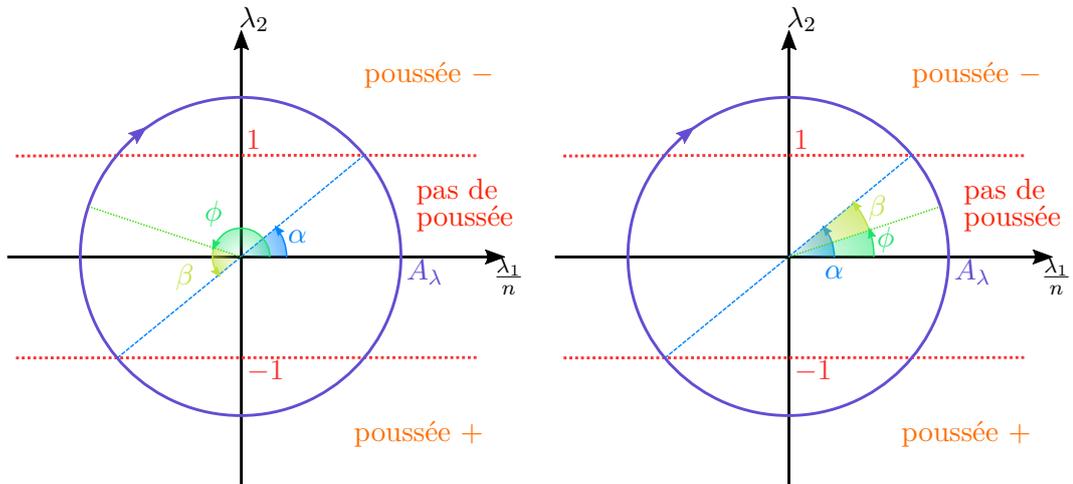
CAS 1 À 4 ET 9 À 12

Les conditions $z_1(t_f) = \delta \cos \phi$ et $z_{2n}(t_f) = \delta \sin \phi$ permettent d'écrire :

$$\begin{cases} \left[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U \right] \cos \phi \pm \sin \alpha \sin \phi = \frac{1}{U_n} \left[z_1^c C_{f0} + z_2^c S_{f0} \right] = \Upsilon_1, \\ \left[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U \right] \sin \phi \mp \sin \alpha \cos \phi = \frac{1}{U_n} \left[-z_1^c S_{f0} + z_2^c C_{f0} \right] = \Upsilon_2. \end{cases} \quad (2.44)$$

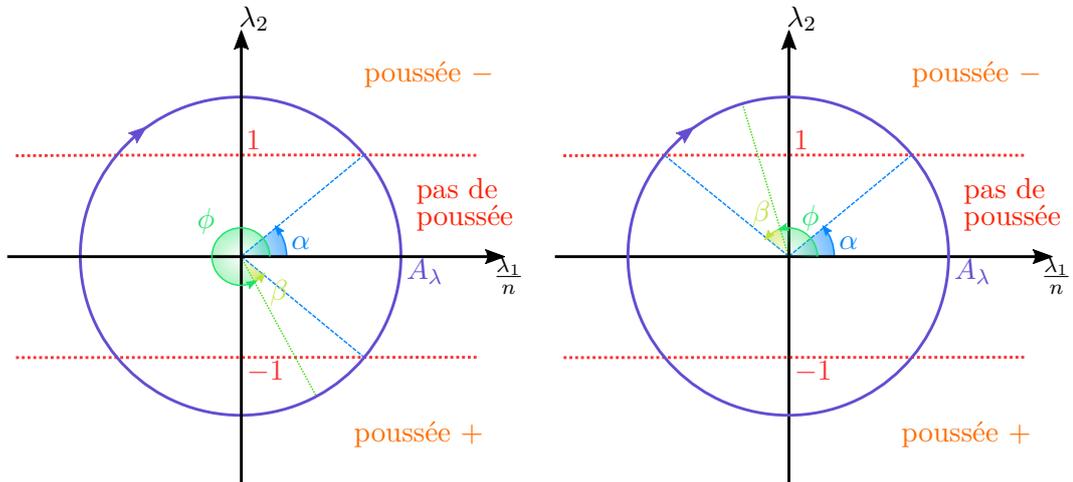
Les inconnues du système d'équations (2.44) sont $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \phi$ et $\sin \phi$, qui vérifient également les équations :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1. \quad (2.45)$$



(a) Cas où la trajectoire optimale est supposée se terminer par un arc de poussée positive puis un arc libre.

(b) Cas où la trajectoire optimale est supposée se terminer par un arc de poussée négative puis un arc libre.



(c) Cas où la trajectoire optimale est supposée se terminer par un arc libre précédé par un arc de poussée positive.

(d) Cas où la trajectoire optimale est supposée se terminer par un arc libre précédé par un arc de poussée négative.

FIGURE 2.7 – Transformations entre les angles α , β et ϕ en fonction des trajectoires finales supposées.

En supposant dans un premier temps que $[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha \neq 0$ pour obtenir une solution unique pour le système (2.44), il est possible d'exprimer $\cos \phi$ et $\sin \phi$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$:

$$\cos \phi = \frac{\Upsilon_1 [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U] \mp \Upsilon_2 \sin \alpha}{[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha}, \quad (2.46a)$$

$$\sin \phi = \frac{\Upsilon_2 [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U] \pm \Upsilon_1 \sin \alpha}{[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha}. \quad (2.46b)$$

Cas	1 · 4 · 5 · 6	2 · 3 · 7 · 8
$t_p^{+\uparrow}$	$t_f + \frac{\alpha + \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f + \frac{\alpha + \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{+\downarrow}$	$t_f - \frac{\pi + \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f - \frac{\pi + \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{-\uparrow}$	$t_f - \frac{\pi - \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f - \frac{\pi - \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{-\downarrow}$	$t_f - \frac{\alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{n}$	$t_f - \frac{\alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{n}$

Cas	9 · 10 · 13 · 14	11 · 12 · 15 · 16
$t_p^{+\uparrow}$	$t_f + \frac{\alpha + \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f + \frac{\alpha + \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{+\downarrow}$	$t_f - \frac{\pi + \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f - \frac{\pi + \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{-\uparrow}$	$t_f - \frac{\pi - \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{2\pi(p - Q)}$	$t_f - \frac{\pi - \alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q - 1)}{2\pi(p - Q)}$
$t_p^{-\downarrow}$	$t_f - \frac{\alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{n}$	$t_f - \frac{\alpha - \phi}{n} - \frac{2\pi(p - Q + 1)}{n}$

TABLE 2.2 – Instants de début et de fin de poussées pour les différents cas.

L'équation $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ permet d'obtenir :

$$\left(\Upsilon_1 [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U] \mp \Upsilon_2 \sin \alpha \right)^2 + \left(\Upsilon_2 [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U] \pm \Upsilon_1 \sin \alpha \right)^2 - \left([\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha \right)^2 = 0, \quad (2.47)$$

puis :

$$\left(\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2 - [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 - \sin^2 \alpha \right) \left([\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha \right) = 0. \quad (2.48)$$

Avec l'hypothèse $[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 + \sin^2 \alpha \neq 0$, il vient :

$$\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2 - [\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U]^2 - \sin^2 \alpha = 0, \quad (2.49)$$

puis en développant et en réarrangeant les termes :

$$\cos^2 \alpha (\tilde{Q}^2 - 1) + 2\tilde{Q}\delta_U \cos \alpha + \delta_U^2 + 1 - \Upsilon_1^2 - \Upsilon_2^2 = 0, \quad (2.50)$$

ou encore, en remarquant que $\Upsilon_1^2 + \Upsilon_2^2 = \frac{z_1^{c^2} + z_2^{c^2}}{U_n^2}$,

$$U_n^2 (\tilde{Q}^2 - 1) \cos^2 \alpha + 2\tilde{Q}U_n \delta \cos \alpha + \delta^2 + U_n^2 - z_1^{c^2} - z_2^{c^2} = 0. \quad (2.51)$$

Ce trinôme du second degré en $\cos \alpha$ a pour discriminant :

$$\Delta = 4U_n^2 \tilde{Q}^2 \delta^2 - 4U_n^2 (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c^2} - z_2^{c^2}). \quad (2.52)$$

Cas	$z_1(\alpha, \phi)$ $z_{2n}(\alpha, \phi)$	\tilde{Q}	z_1^c z_2^c	Espace admissible	Condition sur le signe de $\Lambda(t_0)$
1	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi + \sin \alpha \sin \varphi]$	$4Q + 1$	$z_1^0 - U_n$ z_{2n}^0		$\lambda_2^0 \leq 0$
	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi - \sin \alpha \cos \varphi]$				
2	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi + \sin \alpha \sin \varphi]$	$4Q + 3$	$z_1^0 - U_n$ z_{2n}^0		$\lambda_2^0 \leq 0$
	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi - \sin \alpha \cos \varphi]$				
3	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi + \sin \alpha \sin \varphi]$	$4Q + 1$	$z_1^0 + U_n$ z_{2n}^0		$\lambda_2^0 \geq 0$
	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi - \sin \alpha \cos \varphi]$				

TABLE 2.3 – Conditions nécessaires pour les 16 cas (1)

Cas	$z_1(\alpha, \phi)$ $z_{2n}(\alpha, \phi)$	\tilde{Q}	z_1^c z_2^c	Espace admissible	Condition sur le signe de $\Lambda(t_0)$
7	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta U] \sin \phi$	$4Q + 2$	z_1^0 z_2^0		$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$ $\lambda_{1n}^0 \leq 0$
8	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta U] \sin \phi$	$4Q + 4$	z_1^0 z_2^0		$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$ $\lambda_{1n}^0 \geq 0$
9	$U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta U) \cos \phi - \sin \alpha \sin \varphi]$ $U_n [(\tilde{Q} \cos \alpha + \delta U) \sin \phi + \sin \alpha \cos \varphi]$	$4Q + 1$	$z_1^0 + C_{f0}U_n$ $z_2^0 + U_n S_{f0}$		$\delta^2 + U_n^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}U_n + \delta)^2$ $\lambda_{1n}^0 \geq 0$

TABLE 2.5 – Conditions nécessaires pour les 16 cas (3)

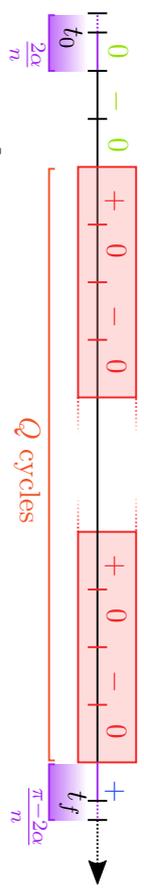
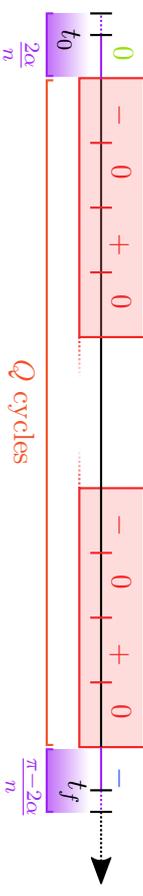
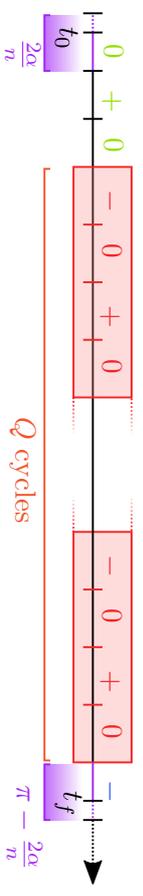
Cas	$z_1(\alpha, \phi)$ $z_{2n}(\alpha, \phi)$	\tilde{Q}	z_1^c z_2^c	Espace admissible	Condition sur le signe de $\Lambda(t_0)$
10	$U_n \left[\begin{array}{l} (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi - \sin \alpha \sin \varphi \\ (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi + \sin \alpha \cos \varphi \end{array} \right]$		$z_1^0 + C_{f0} U_n$ $z_{2n}^0 + U_n S_{f0}$	$\delta^2 + U_n^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q} U_n + \delta)^2$	$\lambda_{1n}^0 \leq 0$
11	$U_n \left[\begin{array}{l} (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi - \sin \alpha \sin \varphi \\ (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi + \sin \alpha \cos \varphi \end{array} \right]$		$z_1^0 - C_{f0} U_n$ $z_{2n}^0 - U_n S_{f0}$	$\delta^2 + U_n^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q} U_n + \delta)^2$	$\lambda_{1n}^0 \leq 0$
12	$U_n \left[\begin{array}{l} (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \cos \phi - \sin \alpha \sin \varphi \\ (\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U) \sin \phi + \sin \alpha \cos \varphi \end{array} \right]$		$z_1^0 - C_{f0} U_n$ $z_{2n}^0 - U_n S_{f0}$	$\delta^2 + U_n^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q} U_n + \delta)^2$	$\lambda_{1n}^0 \geq 0$

TABLE 2.6 – Conditions nécessaires pour les 16 cas (4)

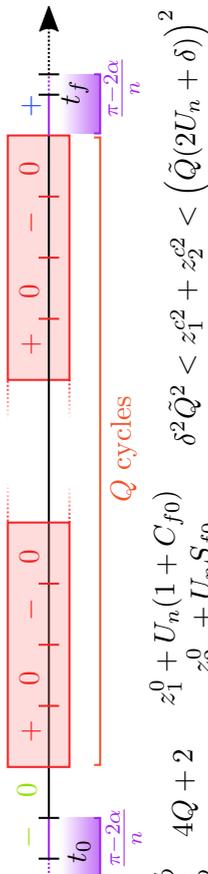
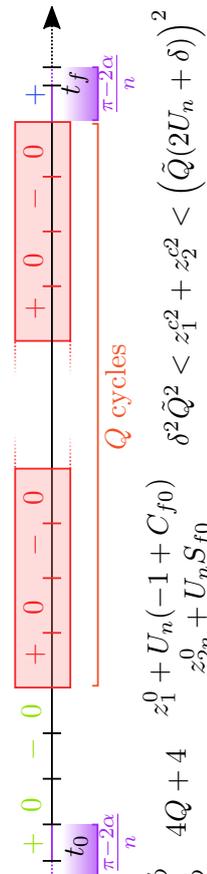
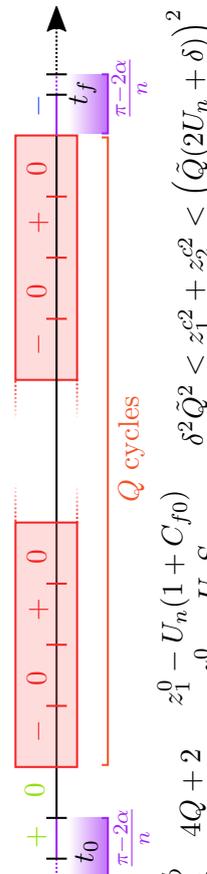
Cas	$z_1(\alpha, \phi)$ $z_{2n}(\alpha, \phi)$	\tilde{Q}	z_1^c z_2^c	Espace admissible	Condition sur le signe de $\Lambda(t_0)$
13	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \sin \phi$	$4Q + 2$ 	$z_1^0 + U_n(1 + C_{f0})$ $z_{2n}^0 + U_n S_{f0}$	$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$	$\lambda_2^0 \geq 0$
14	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \sin \phi$	$4Q + 4$ 	$z_1^0 + U_n(-1 + C_{f0})$ $z_{2n}^0 + U_n S_{f0}$	$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$	$\lambda_2^0 \leq 0$
15	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \sin \phi$	$4Q + 2$ 	$z_1^0 - U_n(1 + C_{f0})$ $z_{2n}^0 - U_n S_{f0}$	$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$	$\lambda_2^0 \leq 0$

TABLE 2.7 – Conditions nécessaires pour les 16 cas (5)

Cas	$z_1(\alpha, \phi)$ $z_{2n}(\alpha, \phi)$	\tilde{Q}	z_1^c z_2^c	Espace admissible	Condition sur le signe de $\Lambda(t_0)$	
16	$\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \cos \phi$ $\tilde{Q}U_n [2 \cos \alpha + \delta_U] \sin \phi$			$z_1^0 + U_n(1 - C_{f_0})$ $z_{2n}^0 - U_n S_{f_0}$	$\delta^2 \tilde{Q}^2 < z_1^{c^2} + z_2^{c^2} < (\tilde{Q}(2U_n + \delta))^2$	$\lambda_2^0 \geq 0$

TABLE 2.8 – Conditions nécessaires pour les 16 cas (6)

Au moins une solution existe si et seulement si $\Delta \geq 0$, si et seulement si :

$$\tilde{Q}^2 \delta^2 \geq (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2}), \quad (2.53)$$

ou encore si et seulement si :

$$z_1^{c2} + z_2^{c2} \geq \delta^2 + U_n^2 - \frac{\tilde{Q}^2 \delta^2}{\tilde{Q}^2 - 1} = \frac{(\tilde{Q}^2 - 1)U_n^2 - \delta^2}{\tilde{Q}^2 - 1}, \quad (2.54)$$

ce qui sera supposé vérifié par la suite. Les solutions de l'équation (2.51) s'écrivent alors :

$$\cos \alpha^{(1)} = \frac{-\tilde{Q}\delta \pm \sqrt{\tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2})}}{U_n(\tilde{Q}^2 - 1)}. \quad (2.55)$$

Or, comme $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \alpha$ doit être positif. Une seule des deux solutions précédentes restent donc admissible :

$$\cos \alpha = \frac{-\tilde{Q}\delta + \sqrt{\tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2})}}{U_n(\tilde{Q}^2 - 1)}. \quad (2.56)$$

Comme $\tilde{Q}^2 - 1 \geq 0$, il est alors possible de montrer que :

$$\begin{aligned} \cos \alpha \leq 0 &\Rightarrow \sqrt{\tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2})} \leq \tilde{Q}\delta, \\ &\Rightarrow \tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1) (\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2}) \leq \tilde{Q}^2 \delta^2, \\ &\Rightarrow z_1^{c2} + z_2^{c2} \leq \delta^2 + U_n^2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ainsi, $z_1^{c2} + z_2^{c2} > \delta^2 + U_n^2$ suffit à garantir $\cos^2 \alpha > 0$. Cependant, pour garantir l'existence d'au moins une solution pour l'équation (2.51), l'hypothèse suivante a été faite :

$$z_1^{c2} + z_2^{c2} \geq \frac{(\tilde{Q}^2 - 1)U_n^2 - \delta^2}{\tilde{Q}^2 - 1}. \quad (2.58)$$

Puisque :

$$\delta^2 + U_n^2 \geq \frac{(\tilde{Q}^2 - 1)U_n^2 - \delta^2}{\tilde{Q}^2 - 1} \iff \tilde{Q}^2 \delta^2 \geq 0, \quad (2.59)$$

ce qui est toujours vrai, supposer (2.58) permet de garantir à la fois l'existence d'une solution de l'équation (2.51) ainsi que son caractère positif.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\cos \alpha \geq 1 &\Rightarrow \sqrt{\tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1)(\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2})} \geq U_n(\tilde{Q}^2 - 1) + \tilde{Q}\delta, \\
&\Rightarrow \tilde{Q}^2 \delta^2 - (\tilde{Q}^2 - 1)(\delta^2 + U_n^2 - z_1^{c2} - z_2^{c2}) \geq (U_n(\tilde{Q}^2 - 1) + \tilde{Q}\delta)^2, \\
&\Rightarrow (\tilde{Q}^2 - 1)(z_1^{c2} + z_2^{c2}) \geq U_n^2(\tilde{Q}^2 - 1)^2 + \tilde{Q}^2 \delta^2 + 2U_n(\tilde{Q}^2 - 1)\tilde{Q}\delta \\
&\quad - \tilde{Q}^2 \delta^2 + (\tilde{Q}^2 - 1)(\delta^2 + U_n^2), \\
&\Rightarrow (\tilde{Q}^2 - 1)(z_1^{c2} + z_2^{c2}) \geq U_n^2(\tilde{Q}^2 - 1)^2 + 2U_n\tilde{Q}^2 - 1)\tilde{Q}\delta + (\tilde{Q}^2 - 1)(\delta^2 + U_n^2), \\
&\stackrel{\tilde{Q}^2 - 1 \neq 0}{\Rightarrow} z_1^{c2} + z_2^{c2} \geq U_n^2 \tilde{Q}_1^2 + 2U_n \tilde{Q} \delta + \delta^2, \\
&\Rightarrow z_1^{c2} + z_2^{c2} \geq (\tilde{Q}U_n + \delta)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, imposer :

$$z_1^{c2} + z_2^{c2} < (\tilde{Q}U_n + \delta)^2, \quad (2.60)$$

est suffisant pour assurer $\cos \alpha < 1$. En résumé, la position initiale dans le plan (z_1, z_{2n}) doit vérifier les conditions :

$$\delta^2 + U_n^2 < (z_1^0 - U_n)^2 + z_{2n}^{0\ 2} < (\tilde{Q}U_n + \delta)^2. \quad (2.61)$$

La position initiale doit donc être à l'extérieur du disque de centre $(U_n, 0)$ de rayon $\sqrt{\delta^2 + U_n^2}$ et à l'intérieur du disque de centre $(U_n, 0)$ et de rayon $\tilde{Q}U_n + \delta$.

Puisque $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin \alpha$ se calcule sous la forme :

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \quad (2.62)$$

Par ailleurs,

$$\left[\tilde{Q} \cos \alpha + \delta_U \right]^2 + \sin^2 \alpha = 0 \implies z_1^{c2} + z_2^{c2} = 0 \implies (z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^{0\ 2} = 0, \quad (2.63)$$

ce qui est contraire aux conditions (2.61).

CAS 5 À 8 ET 13 À 16

Les conditions $z_1(t_f) = \delta \cos \phi$ et $z_{2n}(t_f) = \delta \sin \phi$ permettent d'écrire :

$$\left[2 \cos \alpha + \delta_U \right] \cos \phi = \frac{1}{\tilde{Q}U_n} \left[z_1^0 C_{f0} + z_{2n}^0 S_{f0} \right] = \Upsilon_1, \quad (2.64a)$$

$$\left[2 \cos \alpha + \delta_U \right] \sin \phi = \frac{1}{\tilde{Q}U_n} \left[-z_1^0 S_{f0} + z_{2n}^0 C_{f0} \right] = \Upsilon_2. \quad (2.64b)$$

En élevant au carré les deux équations du système (2.64) et en sommant les deux équations, il vient :

$$\left[2 \cos \alpha + \delta_U \right]^2 = \frac{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}{\tilde{Q}^2 U_n^2}, \quad (2.65)$$

puis, puisque $\cos \alpha$ et δ_U sont positifs :

$$2 \cos \alpha + \delta_U = \frac{\sqrt{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}}{\tilde{Q}U_n}. \quad (2.66)$$

Ceci permet d'exprimer $\cos \alpha$ selon :

$$\cos \alpha = \frac{1}{2U_n} \left(\frac{\sqrt{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}}{\tilde{Q}} - \delta \right). \quad (2.67)$$

La conditions $\cos \alpha > 0$ se traduit par :

$$z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} > \tilde{Q}^2 \delta^2 \geq 0, \quad (2.68)$$

et la condition $\cos \alpha < 1$ se traduit par :

$$z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} < \left(\tilde{Q}(2U_n + \delta) \right)^2. \quad (2.69)$$

En résumé, le point initial doit vérifier les conditions :

$$0 \leq \tilde{Q}^2 \delta^2 < z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} < \left(\tilde{Q}(2U_n + \delta) \right)^2, \quad (2.70)$$

et doit donc se trouver à l'extérieur du disque de centre $(0, 0)$ de rayon $\tilde{Q}\delta$ et à l'intérieur du disque de centre $(0, 0)$ de rayon $\tilde{Q}(2U_n + \delta)$. Puisque $\cos \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

Par ailleurs :

$$2 \cos \alpha + \delta_U = 0 \Rightarrow z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1^0 = 0, \\ z_{2n}^0 = 0, \end{cases} \quad (2.71)$$

ce qui n'est pas possible en vertu de la condition (2.70). $\cos \phi$ et $\sin \phi$ s'expriment alors sous la forme :

$$\cos \phi = \frac{\Upsilon_1}{2 \cos \alpha + \delta_U} = \frac{z_1^0 C_{f0} + z_{2n}^0 S_{f0}}{\sqrt{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}}, \quad (2.72a)$$

$$\sin \phi = \frac{\Upsilon_2}{2 \cos \alpha + \delta_U} = \frac{-z_1^0 S_{f0} + z_{2n}^0 C_{f0}}{\sqrt{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}} \quad (2.72b)$$

2.3.4.2 VALEURS INITIALES DU VECTEUR ADJOINT

Les valeurs initiales du vecteur adjoint vérifient :

$$\lambda_{1n}^{0\ 2} + \lambda_{2n}^{0\ 2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (2.73)$$

et l'équation de transversalité (2.40).

En supposant dans un premier temps que $\cos(n(t_f - t_0) + \phi) \neq 0$, on a :

$$\lambda_2^0 = \lambda_{1n}^0 \frac{\sin(n(t_f - t_0) + \phi)}{\cos(n(t_f - t_0) + \phi)}, \quad (2.74)$$

puis :

$$\lambda_{1n}^{0\ 2} = \frac{\cos^2(n(t_f - t_0) + \phi)}{\sin^2 \alpha}, \quad (2.75a)$$

$$\lambda_2^{0\ 2} = \frac{\sin^2(n(t_f - t_0) + \phi)}{\sin^2 \alpha}, \quad (2.75b)$$

Les différentes hypothèses sur la structure initiale du profil de contrôle conduisent à différentes conditions sur les valeurs initiales du vecteurs adjoint (voir la dernière colonne des tableaux 2.3 à 2.8). Ces conditions permettent de déterminer soit la valeur initiale de λ_{1n} ou de λ_2 .

Pour le cas 1 par exemple, puisque l'arc initial incomplet est supposé être un arc de poussée positive, λ_2^0 doit être négatif :

$$\lambda_2^0 = - \frac{|\sin(n(t_f - t_0) + \phi)|}{\sin \alpha} \quad (2.76)$$

D'après l'équation de transversalité (2.40), λ_{1n}^0 et λ_2^0 sont de même signe si et seulement si $\tan(n(t_f - t_0) + \phi)$ est positif. La valeur initiale de λ_{1n} se calcule alors de la façon suivante :

$$\lambda_{1n}^0 = - \frac{\tan(n(t_f - t_0) + \phi) |\sin(n(t_f - t_0) + \phi)|}{|\tan(n(t_f - t_0) + \phi)| \sin \alpha}. \quad (2.77)$$

Si $\cos(n(t_f - t_0) + \phi) = 0$, alors $\sin(n(t_f - t_0) + \phi) \neq 0$, et l'équation de transversalité (2.40) permet d'obtenir $\lambda_{1n}^0 = 0$, puis :

$$\lambda_2^0 = - \frac{1}{\sin \alpha} = -A_\lambda. \quad (2.78)$$

2.3.5 CONCLUSION

En tant que problème de maintien à poste approché, le problème de résonance permet de garantir le respect des contraintes de maintien à poste à partir d'un certain instant par le truchement d'une contrainte finale d'oscillation d'amplitude égale à la taille de la fenêtre. Le Principe du Maximum de Pontryagin permet de dériver des conditions nécessaires pour le profil de contrôle optimal dont les inconnues sont la durée des poussées, la position finale sur le cercle de résonance et la valeur initiale du vecteur adjoint. Cependant, aucune condition n'existe pour les arcs incomplets initiaux et finaux. C'est pourquoi, il est nécessaire de résoudre les équations issues des conditions nécessaires pour chacun des 16 cas possibles. Pour déterminer le cas conduisant à la consommation minimale, il est nécessaire d'évaluer

les solutions en utilisant un jeu de valeurs pour la position et la vitesse finale ainsi que pour la taille de la fenêtre et la valeur maximale de la poussée. Il est de plus nécessaire de vérifier *a posteriori* que les conditions nécessaires sont bien respectées.

La section suivante propose la résolution d'un problème de maintien à poste pour lequel les contraintes de maintien à poste sont considérées comme des contraintes sur l'état et sont prises en compte avec le Principe du Maximum étendu pour les contraintes sur l'état.

2.4 SOLUTION ANALYTIQUE DU PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE HORS-PLAN

2.4.1 DESCRIPTION DU PROBLÈME

Le problème de maintien à poste à consommation minimale à résoudre s'écrit :

Problème 2.2. Trouver la fonction $t \mapsto u_N(t)$ solution du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} & \min_{u_N} \int_{t_0}^{t_f} |u_N(t)| dt, \\ \text{t. q. : } & \begin{cases} \dot{Z}(t) = A_z Z(t) + B_z u_N(t), \\ Z(t_0) = Z_0 \text{ donné,} \\ \forall t \in [t_0, t_f], S^+(z_1(t), z_2(t)) = z_1(t) - \delta \leq 0, \\ \forall t \in [t_0, t_f], S^-(z_1(t), z_2(t)) = -z_1(t) - \delta \leq 0, \\ u_N \in [-U_{\max}, +U_{\max}], \end{cases} \end{aligned} \quad (2.79)$$

o

Dans la section précédente, la contrainte de maintien à poste $|z_1(t)| \leq \delta$ a été prise en compte en imposant à la trajectoire finale de trouver sur le cercle \mathcal{C}_δ^0 de centre $(0, 0)$ et de rayon δ dans le plan (z_1, z_2) . Il existe donc un instant $t_c \leq t_f$ tel que la contrainte de maintien à poste est vérifiée pour $t \in [t_c, t_f]$. Cependant, il n'existe pas de garantie de la satisfaction de la contrainte de maintien à poste pour $t \in [t_0, t_c]$. L'objectif de cette section est de résoudre le problème de maintien à poste à consommation minimale sur $[t_0, t_f]$ en prenant en compte la contrainte sur l'état $|z_1(t)| \leq \delta$.

S^+ et S^- sont les deux contraintes sur l'état qui doivent être considérées pour la résolution du problème. Comme ces deux contraintes ne peuvent pas être actives en même temps, elles seront traitées indépendamment l'une de l'autre. Il est possible de déterminer l'ordre de ces contraintes. Il vient en calculant les dérivées temporelles totales des contraintes et en notant $f^{(n)}$ la dérivée totale d'ordre n de la fonction f par rapport au temps :

$$S^{+(0)}(z_1(t), z_2(t)) = z_1(t) - \delta, \quad (2.80a)$$

$$S^{+(1)}(z_1(t), z_2(t)) = z_2(t), \quad (2.80b)$$

$$S^{+(2)}(z_1(t), z_2(t)) = -n^2 z_1(t) + u(t), \quad (2.80c)$$

pour la contrainte S^+ et :

$$S^{-(0)}(z_1(t), z_2(t)) = -z_1(t) - \delta, \quad (2.81a)$$

$$S^{-(1)}(z_1(t), z_2(t)) = -z_2(t), \quad (2.81b)$$

$$S^{-(2)}(z_1(t), z_2(t)) = +n^2 z_1(t) - u(t), \quad (2.81c)$$

pour la contrainte S^- . Les deux contraintes sont donc d'ordre 2.

Pour mémoire, un arc frontière est défini comme la trajectoire $t \mapsto Z(t)$, $t \in [t_a, t_b]$ pour laquelle une contrainte est active. Lorsque $t_a = t_b$, l'arc frontière est réduit à un point de contact. Dans le plan de phase, cet arc de trajectoire peut se représenter par un point.

Sur un arc frontière correspondant à un intervalle de temps $[t_{c1+}, t_{c2+}]$ où la contrainte S^+ est active, les conditions suivantes sont vérifiées : pour $t \in [t_{c1+}, t_{c2+}]$,

$$S^{+(0)}(z_1(t), z_2(t)) = 0, \quad (2.82a)$$

$$S^{+(1)}(z_1(t), z_2(t)) = 0, \quad (2.82b)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\forall t \in [t_{c1+}, t_{c2+}], z_1(t) = \delta \text{ et } z_2(t) = 0. \quad (2.83)$$

Dans le plan de phase, cet arc frontière correspond au point de coordonnées $(\delta, 0)$.

De la même façon, sur un arc frontière correspondant à un intervalle de temps $[t_{c1-}, t_{c2-}]$ où la contrainte S^- est active, les conditions suivantes sont vérifiées : pour $t \in [t_{c1-}, t_{c2-}]$,

$$S^{-(0)}(z_1(t), z_2(t)) = 0, \quad (2.84a)$$

$$S^{-(1)}(z_1(t), z_2(t)) = 0, \quad (2.84b)$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\forall t \in [t_{c1-}, t_{c2-}], z_1(t) = -\delta \text{ et } z_2(t) = 0. \quad (2.85)$$

Dans le plan de phase, cet arc frontière correspond au point de coordonnées $(-\delta, 0)$.

Sur un arc frontière, le contrôle est obtenu en utilisant les relations $S^{+(2)}(z_1, z_2, u) = 0$ et $S^{-(2)}(z_1, z_2, u) = 0$. Il vient alors :

$$\forall t \in [t_{c1+}, t_{c2+}], u^+(t) = n^2 z_1(t) = n^2 \delta, \quad (2.86a)$$

$$\forall t \in [t_{c1-}, t_{c2-}], u^-(t) = n^2 z_1(t) = -n^2 \delta. \quad (2.86b)$$

Ainsi, le contrôle frontière pour la contrainte S^+ est un arc de poussée constante égale à $n^2 \delta$. Or, pour un arc de poussée constante égale à U , d'après l'analyse effectuée dans la section 2.2.1 page 58, la trajectoire dans le plan $(z_1, \frac{z_2}{n})$ est un cercle de centre $(\frac{U}{n^2}, 0) = (\delta, 0)$

et de rayon :

$$\sqrt{\left(z_1^0 - \frac{U}{n^2}\right)^2 + \frac{z_2^0{}^2}{n^2}} = 0, \quad (2.87)$$

sur l'arc frontière. Le contrôle sur la frontière S^+ impose au satellite de rester sur le point $(\delta, 0)$. Le même raisonnement est applicable au contrôle sur la frontière S^- qui impose au satellite de rester sur le point $(-\delta, 0)$.

D'un point de vue opérationnel, si les propulseurs du satellite fournissent une poussée de type tout ou rien et si $U_{\max} \neq n^2\delta$, imposer le contrôle frontière n'est pas faisable. Cependant, si le satellite arrive sur la frontière en $(\delta, 0)$ ou en $(-\delta, 0)$, il se trouve sur le cercle \mathcal{C}_0^δ . Le maintien à poste sera alors assuré. De plus, dans l'optique de trouver un profil de contrôle à consommation minimale, il est plus avantageux en terme de consommation de ne pas avoir d'arcs frontières et de laisser le satellite évoluer sur le cercle \mathcal{C}_0^δ librement. Il est ainsi possible de supposer l'existence de points de contact mais pas d'arcs frontières. Il vient ainsi : $t_{c_{1+}} = t_{c_{2+}} = t_{c+}$ et $t_{c_{1-}} = t_{c_{2-}} = t_{c-}$.

Dans la sous-section suivante, la trajectoire à consommation minimale est calculée depuis le point de départ jusqu'au point de contact. Le point initial est supposé être dans la fenêtre de maintien à poste, c'est-à-dire vérifier les conditions $-\delta \leq z_1(t_0) \leq \delta$, et tel que $z_2(t_0)$ est positif. Dans ce cas, il apparaît évident qu'une poussée positive $+U_{\max}$ conduit le satellite à sortir de la fenêtre de maintien à poste (voir la figure 2.8). Si la trajectoire débute par un arc de poussée négative $-U_{\max}$ et si $z_2(t_0)$ n'est pas trop grand, alors la trajectoire coupe le cercle \mathcal{C}_0^δ – le caractère pas trop grand de $z_2(t_0)$ sera dérivé mathématiquement par la suite. Un arc libre conduit ensuite le satellite au point de contact $(\delta, 0)$. Si la trajectoire initiale commence par un arc libre, un arc de poussée négative est ensuite nécessaire pour amener le satellite au point de contact $(\delta, 0)$. Un raisonnement similaire est applicable avec une poussée positive si $z_2(t_0) \leq 0$.

2.4.2 TRAJECTOIRE AVANT LE POINT DE CONTACT

Les deux cas suivants sont étudiés :

- trajectoire commençant par un arc de poussée négative puis un arc libre jusqu'au point de contact (trajectoire $A - B - D$ de la figure 2.9),
- trajectoire commençant par un arc libre puis un arc de poussée négative jusqu'au point de contact (trajectoire $A - C - D$ de la figure 2.9).

Le point initial se trouve à l'extérieur du disque délimité par le cercle \mathcal{C}_0^δ et vérifie donc en notant $z_1^0 = z_1(t_0)$, $z_{2n} = \frac{z_2}{n}$ et $z_{2n}(t_0) = z_{2n}^0$:

$$z_1^0{}^2 + z_{2n}^0{}^2 > \delta^2. \quad (2.88)$$

En effet, si $z_1^0{}^2 + z_{2n}^0{}^2 = \delta^2$, le point initial se trouve sur le cercle \mathcal{C}_0^δ et il n'est pas nécessaire de pousser. Il vient en particulier $z_{2n}^0 > 0$. Ceci permet d'ajouter la condition :

$$\left(z_0 + U_n\right)^2 + z_{2n}^0{}^2 > 0, \quad (2.89)$$

qui sera utilisée par la suite.

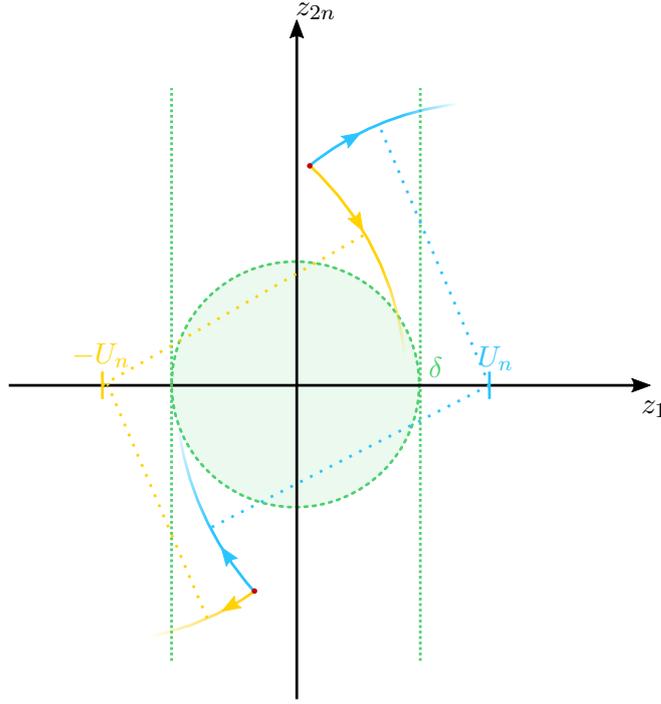


FIGURE 2.8 – Arcs de poussées positives et négatives dans le cas où z_{2n}^0 est positif ou négatif.

Par ailleurs, l'instant final est supposé être plus grand que l'instant du point de contact, c'est-à-dire $t_f > t_{c+}$.

2.4.2.1 TRAJECTOIRE $A - B - D$

Soit t_1 l'instant de commutation de l'arc de poussée négative vers l'arc libre. Dans toute la suite, les notations suivantes seront adoptées :

$$\begin{aligned} \cos(n(t_{c+} - t_0)) &= C_{c0}^+, & \sin(n(t_{c+} - t_0)) &= S_{c0}^+, \\ \cos(n(t_1 - t_0)) &= C_{10}, & \sin(n(t_1 - t_0)) &= S_{10}, \\ \cos(n(t_{c+} - t_1)) &= C_{c1}^+, & \sin(n(t_{c+} - t_1)) &= S_{c1}^+, \end{aligned} \quad (2.90)$$

avec :

$$C_{c0}^{+2} + S_{c0}^{+2} = 1, \quad C_{10}^2 + S_{10}^2 = 1, \quad C_{c1}^{+2} + S_{c1}^{+2} = 1. \quad (2.91)$$

Les conditions finales suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} z_1(t_{c1}^+) = \delta, \\ z_{2n}(t_{c1}^+) = 0. \end{cases} \quad (2.92)$$

Or, avec l'hypothèse d'une trajectoire consistant en un arc de poussée négative et un arc libre, on obtient :

$$\begin{cases} z_1(t_{c1}^+) = (z_1^0 + U_n)C_{c0} + z_{2n}^0 S_{c0} - U_n C_{c1}^+, \\ z_{2n}(t_{c1}^+) = -(z_1^0 + U_n)S_{c0} + z_{2n}^0 C_{c0} + U_n S_{c1}^+, \end{cases} \quad (2.93)$$

ce qui permet d'aboutir au système suivant en notant $z_1^c = z_1^0 + U_n$:

$$z_1^c C_{c0} + z_{2n}^0 S_{c0} = \delta + U_n C_{c1}^+, \quad (2.94a)$$

$$-z_1^c S_{c0} + z_{2n}^0 C_{c0} = -U_n S_{c1}^+. \quad (2.94b)$$

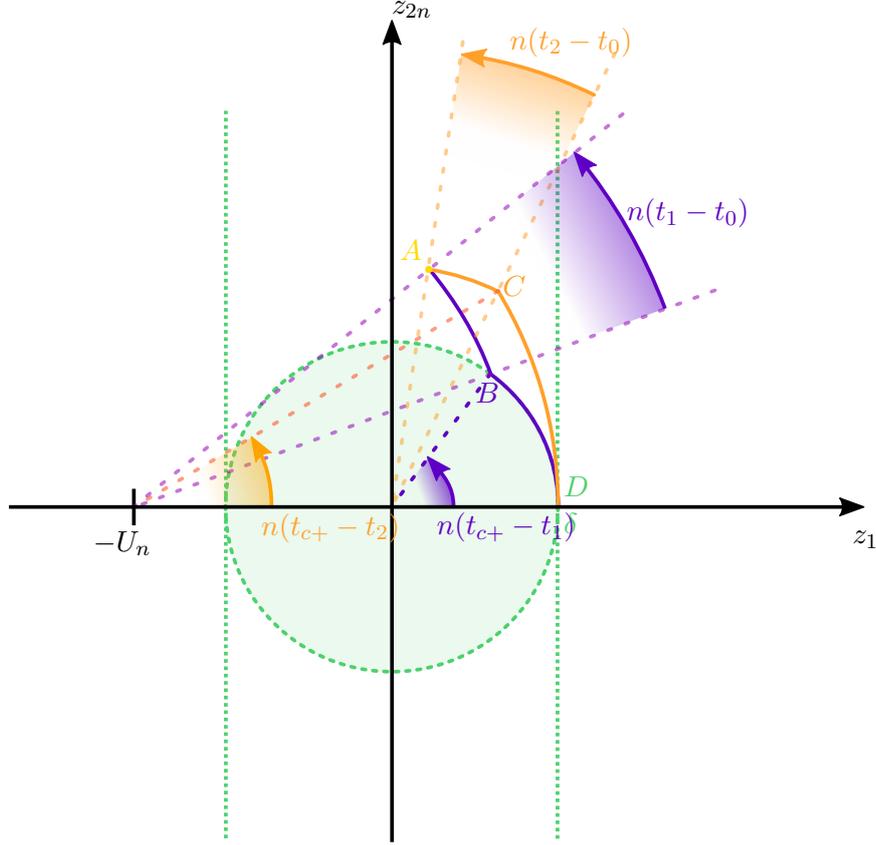


FIGURE 2.9 – Définition des deux trajectoires étudiées avant le point de contact.

En élevant les deux équations précédentes au carré et en les sommant, C_{c1}^+ s'exprime sous la forme :

$$C_{c1}^+ = \frac{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - \delta^2 - U_n^2}{2U_n\delta}. \quad (2.95)$$

La contrainte $C_{c1}^+ \leq 1$ équivaut à :

$$z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 \leq (U_n + \delta)^2, \quad (2.96)$$

et la contrainte $C_{c1}^+ \geq -1$ équivaut à :

$$z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 \leq (U_n - \delta)^2. \quad (2.97)$$

Les conditions que le point initial doit vérifier sont résumées sous la forme :

$$(U_n - \delta)^2 \leq (z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2 \leq (U_n + \delta)^2. \quad (2.98)$$

Le point initial doit donc être à l'intérieur du disque de centre $(-U_n, 0)$ de rayon $U_n + \delta$ et à l'intérieur du disque de centre $(-U_n, 0)$ et de rayon $|U_n - \delta|$. Les hypothèses faites au début de l'étude restent valides, ce qui permet d'obtenir l'espace admissible décrit par la figure 2.10. Comme le cas où $z_{2n}^0 \leq 0$ se traite de façon similaire, l'espace admissible dans ce cas a aussi été présenté sur la figure 2.10.

Puisque $z_{2n}^0 \geq 0$, $S_{c1}^+ \geq 0$, S_{c1}^+ s'exprime sous la forme :

$$S_{c1}^+ = \frac{1}{2U_n\delta} \sqrt{\left[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2 \right] \left[(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2 \right]}. \quad (2.99)$$

Le système d'équations (2.94) est résolu en considérant que les inconnues sont C_{c0} et S_{c0} . Le déterminant de ce système est $(z_0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2 > 0$, ce qui permet de calculer les solutions :

$$\begin{aligned} C_{c0} &= \frac{(\delta + U_n C_{c1}^+) z_1^c - U_n z_{2n}^0 S_{c1}^+}{(z_0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2}, \\ &= \frac{z_1^c (\delta^2 - U_n^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2) - z_{2n}^0 \sqrt{\left[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2 \right] \left[(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2 \right]}}{2\delta (z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2)}, \end{aligned} \quad (2.100a)$$

$$\begin{aligned} S_{c0} &= \frac{U_n z_1^c S_{c1}^+ + z_{2n}^2 (\delta + U_n C_{c1}^+)}{(z_0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2}, \\ &= \frac{z_{2n}^0 (\delta^2 - U_n^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2) + z_1^c \sqrt{\left[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2 \right] \left[(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2 \right]}}{2\delta (z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2)}. \end{aligned} \quad (2.100b)$$

Les expressions de C_{c0} , S_{c0} , C_{c1}^+ et S_{c1}^+ permettent de calculer la position en $t = t_1$. En effet, en décomposant C_{10} et S_{10} à l'aide des formules du cosinus et du sinus d'une somme il vient :

$$\begin{aligned} z_1(t_1) &= z_1^c C_{10} + z_{2n}^0 S_{10} - U_n, \\ &= z_1^c (C_{c0} C_{c1}^+ + S_{c0} S_{c1}^+) + z_{2n}^0 (S_{c0} C_{c1}^+ - C_{c0} S_{c1}^+) - U_n, \end{aligned} \quad (2.101a)$$

$$\begin{aligned} z_{2n}(t_1) &= -z_1^c S_{10} + z_{2n}^0 C_{10}, \\ &= -z_1^c (S_{c0} C_{c1}^+ - C_{c0} S_{c1}^+) + z_{2n}^0 (C_{c0} C_{c1}^+ + S_{c0} S_{c1}^+), \end{aligned} \quad (2.101b)$$

puis :

$$z_1^2(t_1) + z_{2n}^2(t_1) = \delta^2. \quad (2.102)$$

Ainsi, la fin de l'arc de poussée se situe sur le cercle \mathcal{C}_0^δ . En posant alors :

$$\begin{cases} z_1(t_1) = \delta C_{c1}^+, \\ z_{2n}(t_1) = \delta S_{c1}^+, \end{cases} \quad (2.103)$$

il est possible de calculer les valeurs de C_{10} et S_{10} sous la forme :

$$C_{10} = \frac{z_1^c (U_n^2 - \delta^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2) + z_{2n}^0 \sqrt{[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2] [(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2]}}{2U_n (z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2)}, \quad (2.104a)$$

$$S_{10} = \frac{z_{2n}^0 (U_n^2 - \delta^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2) + z_1^c \sqrt{[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2] [(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2]}}{2U_n (z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2)}. \quad (2.104b)$$

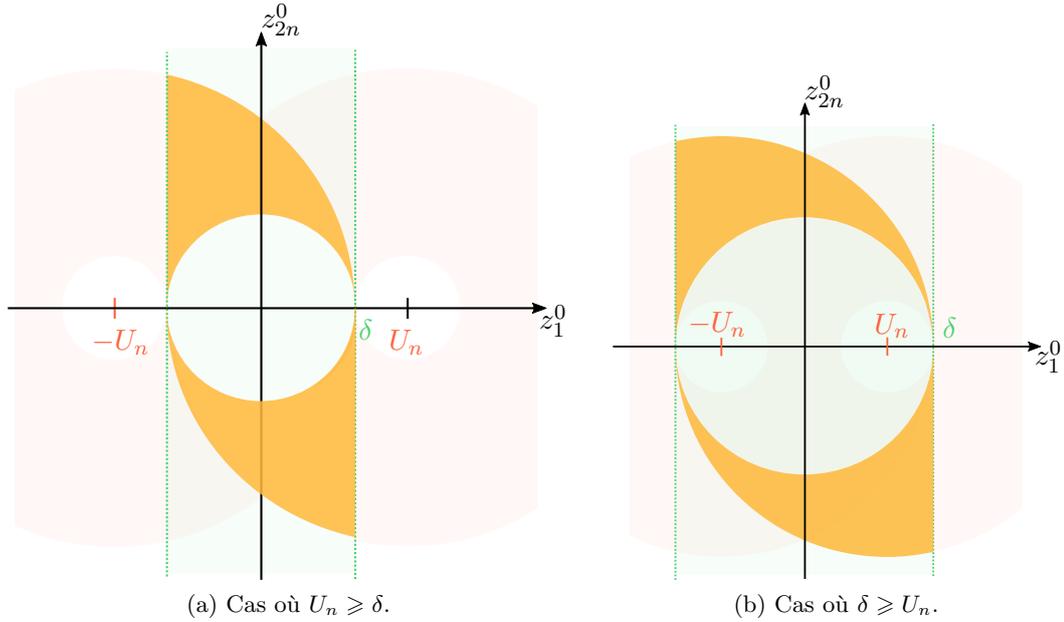


FIGURE 2.10 – Espace de départ admissible.

Remarquons qu'il est possible de déterminer l'intersection entre l'arc de poussée initial – cercle de centre $(-U_n, 0)$ et de rayon $\sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2}$ – et l'arc libre – portion du cercle \mathcal{C}_0^δ de centre $(0, 0)$ et de rayon δ – de façon géométrique. En effet, un point M de coordonnées (x, y) appartient à l'intersection de l'arc de poussée initial et l'arc libre si et seulement si x et y vérifient :

$$\begin{cases} (x + U_n)^2 + y^2 = (z_0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2, \\ x^2 + y^2 = \delta^2. \end{cases} \quad (2.105)$$

La deuxième équation permet d'écrire : $y^2 = \delta^2 - x^2$ puis $y = \sqrt{\delta^2 - x^2}$ en choisissant la racine positive puisque $z_{2n}^0 \geq 0$ de qui devient en remplaçant la valeur de y dans la première

équation :

$$x = \frac{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - \delta^2 - U_n^2}{2U_n} = \delta C_{c1}^+, \quad (2.106)$$

puis :

$$y = \frac{1}{2U_n} \sqrt{\left[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2 \right] \left[(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2 \right]} = \delta S_{c1}^+. \quad (2.107)$$

Les valeurs de C_{c1}^+ et S_{c1}^+ sont donc retrouvées géométriquement.

2.4.2.2 TRAJECTOIRE $A - C - D$

La trajectoire avant le point de contact est supposée être constituée d'un arc libre sur l'intervalle temporel $[t_0, t_2]$ suivi d'un arc de poussée négative sur l'intervalle temporel $[t_2, t_{c+}]$. t_2 est donc l'instant de commutation de l'arc libre vers l'arc de poussée négative. Dans toute la suite, les notations suivantes seront adoptées :

$$\begin{aligned} \cos(n(t_2 - t_0)) &= C_{20}, \\ \sin(n(t_2 - t_0)) &= S_{20}, \\ \cos(n(t_{c1}^+ - t_2)) &= C_{c2}^+, \\ \sin(n(t_{c1}^+ - t_2)) &= S_{c2}^+, \end{aligned} \quad (2.108)$$

avec :

$$\begin{aligned} C_{20}^2 + S_{20}^2 &= 1, \\ C_{c2}^{+2} + S_{c2}^{+2} &= 1. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Les conditions finales suivantes doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} z_1(t_{c1}^+) = \delta, \\ z_{2n}(t_{c1}^+) = 0. \end{cases} \quad (2.110)$$

Or, avec l'hypothèse d'une trajectoire consistant en un arc libre et un arc de de poussée négative, il vient :

$$\begin{cases} z_1(t_{c1}^+) = z_1^0 C_{c0} + z_{2n}^0 S_{c0} - U_n(1 - C_{c2}^+), \\ z_{2n}(t_{c1}^+) = -z_1^0 S_{c0} + z_{2n}^0 C_{c0} - U_n S_{c2}^+, \end{cases} \quad (2.111)$$

ce qui permet d'aboutir au système suivant en notant $z_1^c = z_1^0 + U_n$:

$$z_1^0 C_{c0} + z_{2n}^0 S_{c0} = \delta + U_n(1 - C_{c2}^+), \quad (2.112a)$$

$$-z_1^0 S_{c0} + z_{2n}^0 C_{c0} = -U_n S_{c2}^+. \quad (2.112b)$$

En élevant les deux équations précédentes au carré et en les sommant, il vient :

$$C_{c2}^+ = \frac{(\delta + U_n)^2 + U_n^2 - z_1^0{}^2 - z_{2n}^0{}^2}{2U_n(\delta + U_n)}. \quad (2.113)$$

La contrainte $C_{c2}^+ \leq 1$ équivaut à :

$$z_1^0{}^2 + z_{2n}^0{}^2 \geq \delta^2, \quad (2.114)$$

et la contrainte $C_{c1}^+ \geq -1$ équivaut à :

$$z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} \leq (\delta + 2U_n)^2. \quad (2.115)$$

Les conditions que le point initial doit vérifier sont résumées sous la forme :

$$\delta^2 \leq (z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^{0\ 2} \leq (\delta + 2U_n)^2. \quad (2.116)$$

Le point initial doit donc être à l'extérieur du disque de centre $(0, 0)$ de rayon δ et à l'intérieur du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon $\delta + 2U_n$. Les hypothèses faites au début de l'étude restent valides.

Puisque $z_{2n}^0 \geq 0$, S_{c2}^+ vérifie $S_{c2}^+ \geq 0$ et :

$$S_{c2}^+ = \frac{1}{2U_n(\delta + U_n)} \sqrt{[z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} - \delta^2] [(\delta + 2U_n)^2 - z_1^{0\ 2} - z_{2n}^{0\ 2}]}. \quad (2.117)$$

Le système d'équations (2.112) est résolu en considérant que les inconnues sont C_{c0} et S_{c0} . Le déterminant de ce système est $z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} > 0$, ce qui permet de calculer les solutions :

$$\begin{aligned} C_{c0}^+ &= \frac{(\delta + U_n(1 - C_{c2}^+)) z_1^0 - U_n z_{2n}^0 S_{c2}^+}{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}, \\ &= \frac{z_1^0 ((\delta + U_n)^2 - U_n^2 + z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}) - z_{2n}^0 \sqrt{[z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} - \delta^2] [(\delta + 2U_n)^2 - z_1^{0\ 2} - z_{2n}^{0\ 2}]} }{2(\delta + U_n) (z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2})}, \end{aligned} \quad (2.118a)$$

$$\begin{aligned} S_{c0}^+ &= \frac{U_n z_1^0 S_{c2}^+ + z_{2n}^2 (\delta + U_n(1 - C_{c2}^+))}{z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}}, \\ &= \frac{z_{2n}^0 ((\delta + U_n)^2 - U_n^2 + z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}) + z_1^0 \sqrt{[z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} - \delta^2] [(\delta + 2U_n)^2 - z_1^{0\ 2} - z_{2n}^{0\ 2}]} }{2(\delta + U_n) (z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2})} \end{aligned} \quad (2.118b)$$

Puisque l'arc de trajectoire entre les instants t_2 et t_{c+} est un arc de poussée négative, il est possible d'écrire :

$$z_1(t_{c+}) = z_1(t_2)C_{c12}^+ + z_{2n}(t_2)S_{c12}^+ - U_n(1 - C_{c12}^+) = \delta, \quad (2.119a)$$

$$z_{2n}(t_{c+}) = -z_1(t_2)S_{c12}^+ + z_{2n}(t_2)C_{c12}^+ - U_n S_{c12}^+ = 0, \quad (2.119b)$$

ce qui permet de déterminer la position de la commutation en $t = t_2$ entre l'arc libre et l'arc de poussée négative :

$$z_1(t_2) = (\delta + U_n(1 - C_{c12}^+)) C_{c12}^+ - U_n S_{c12}^+, \quad (2.120a)$$

$$z_{2n}(t_2) = C_{c12}^+ S_{c12}^+ U_n + (\delta + U_n(1 - C_{c12}^+)) S_{c12}^+. \quad (2.120b)$$

Il en outre possible de vérifier que :

$$z_1^2(t_2) + z_{2n}^2(t_2) = z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2}. \quad (2.121)$$

2.4.2.3 COMPARAISON DES TRAJECTOIRES $A - B - D$ ET $A - C - D$

Les deux hypothèses de structure de la trajectoire optimale entre le point initial et l'entrée sur l'arc frontière ont conduit à des instants de commutation et des durées de poussée différentes :

- pour la trajectoire composée d'un arc de poussée négative sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ puis d'un arc libre sur l'intervalle $[t_1, t_{c+}]$ (trajectoire $A - B - D$), la durée de la poussée est donnée par le système d'équations (2.104),
- pour la trajectoire composée d'un arc libre sur l'intervalle $[t_0, t_2]$ puis d'un arc de poussée négative sur l'intervalle $[t_2, t_{c+}]$ (trajectoire $A - C - D$), la durée de la poussée est donnée par les équations (2.113) et (2.117).

Comme les poussées sont de type tout ou rien, la consommation est proportionnelle à la durée de l'arc de poussée. Ainsi la trajectoire pour laquelle la consommation est minimale est celle pour laquelle l'arc de poussée est le plus petit. A partir de l'expression du cosinus des durées des arcs, il est possible de déterminer la structure conduisant à la consommation la plus faible.

Soit $\Delta = C_{10} - C_{c2}^+$. Effectuons l'hypothèse $\Delta \leq 0$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \Delta \leq 0 &\Rightarrow \frac{z_1^c (U_n^2 - \delta^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2}) + z_{2n}^0 \sqrt{[z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} - (U_n - \delta)^2] [(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}]}{2U_n (z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2})} \\ &\quad - \frac{(\delta + U_n)^2 + U_n^2 - z_1^{0\ 2} - z_{2n}^{0\ 2}}{2U_n(\delta + U_n)} \leq 0, \\ &\stackrel{U_n \geq 0}{\Rightarrow} \frac{z_1^c (U_n^2 - \delta^2 + z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2})(\delta + U_n) - [(\delta + U_n)^2 + U_n^2 - z_1^{0\ 2} - z_{2n}^{0\ 2}](z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2})}{(\delta + U_n)(z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2})} \\ &\quad + \frac{z_{2n}^0 \sqrt{[z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} - (U_n - \delta)^2] [(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}]}{z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2}} \leq 0, \\ &\stackrel{z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} \geq 0}{\Rightarrow} - \frac{[(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2}][(\delta + U_n)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}]}{\delta + U_n} \\ &\quad + z_{2n}^0 \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}} \leq 0, \\ &\stackrel{\sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}} \geq 0}{\Rightarrow} z_{2n}^0 \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} - (U_n - \delta)^2}, \\ &\leq \frac{(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2}}{\delta + U_n} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est possible de remarquer que :

$$\begin{aligned}
(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2} &\leq 0 \\
\iff z_{2n}^{0\ 2} + z_1^{0\ 2} + z_1^0(\delta + U_n) + \delta U_n &\leq 0, \\
\iff z_{2n}^{0\ 2} + \left(z_1^0 + \frac{U_n + \delta}{2}\right)^2 &\leq \left(\frac{U_n + \delta}{2}\right)^2 - \delta U_n = \left(\frac{U_n - \delta}{2}\right)^2. \quad (2.123a)
\end{aligned}$$

Ainsi, le terme $(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2}$ est négatif si et seulement si le point initial se trouve à l'intérieur du disque de centre $\frac{U_n + \delta}{2}$ et de rayon $\frac{|U_n - \delta|}{2}$. Il apparaît que cette zone est à l'intérieur des zones exclues par les hypothèses effectuées au début de l'analyse. Ainsi, avec les hypothèses effectuées sur le point initial, le terme $(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2}$ est toujours positif. De plus, puisque $z_{2n} \geq 0$ et $\delta + U_n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta &\leq 0, \\
\Rightarrow z_{2n}^{0\ 2}(\delta + U_n)^2 [z_1^{c2} + z_{2n}^{0\ 2} - (U_n - \delta)^2] & \\
&\leq [(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^{0\ 2}] [(\delta + z_1^0)(U_n + z_1^0) + z_{2n}^{0\ 2}]^2, \\
\Rightarrow [z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} - \delta^2] [(z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^{0\ 2}] [(z_1^0 + \delta)^2 + z_{2n}^{0\ 2} + 2U_n(z_1^0 + \delta)] &\leq 0. \quad (2.124a)
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses effectuées précédemment :

$$z_1^{0\ 2} + z_{2n}^{0\ 2} - \delta^2 > 0, \quad (2.125a)$$

$$(z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^{0\ 2} > 0, \quad (2.125b)$$

$$(z_1^0 + \delta)^2 + z_{2n}^{0\ 2} + 2U_n(z_1^0 + \delta) > 0 \text{ car } z_{2n}^{0\ 2} > 0. \quad (2.125c)$$

Δ vérifie ainsi $\Delta > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $\Delta \leq 0$ effectuée précédemment. Il vient donc $\Delta > 0$, ce qui se traduit par : $C_{10} > C_{c2}^+$, puis : $t_1 - t_0 > t_{c+} - t_2$. Ainsi, la durée de l'arc de poussée pour la trajectoire $A - B - D$ est inférieure à la longueur de l'arc de poussée pour la trajectoire $A - C - D$. Ainsi, une trajectoire avec un arc de poussée puis un arc libre conduit à une consommation strictement plus petite qu'une trajectoire avec un arc libre puis un arc de poussée négative.

2.4.3 ÉTUDE DU POINT DE CONTACT ET DU VECTEUR ADJOINT

2.4.3.1 CONDITION DE SAUT

Au point de jonction $(\delta, 0)$, il peut y avoir une discontinuité du vecteur adjoint. En notant $\Lambda = [\lambda_{1n} \ \lambda_2]^T$, les conditions de saut s'écrivent :

$$\Lambda(t_{c+}^+) = \Lambda(t_{c+}^-) + \mu_1 \frac{\partial S^{+(0)}}{\partial Z} + \mu_2 \frac{\partial S^{+(1)}}{\partial Z}, \quad (2.126a)$$

$$\mathcal{H}(t_{c+}^+) = \mathcal{H}(t_{c+}^-) + \mu_1 \frac{\partial S^{+(0)}}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial S^{+(1)}}{\partial t}, \quad (2.126b)$$

Puisque la contrainte sur l'état S^+ est indépendante du temps, le hamiltonien est continu au point de jonction. Puisque l'arc de trajectoire arrivant sur le point de contact est un

arc libre, l'expression des dérivées totales successives de S^+ par rapport au temps permet d'obtenir :

$$\lambda_1(t_{c+}^+) = \lambda_1(t_{c+}^-) + \mu_1, \quad (2.127a)$$

$$\lambda_2(t_{c+}^+) = \lambda_2(t_{c+}^-) + \mu_2, \quad (2.127b)$$

$$-\delta\lambda_2(t_{c+}^+) = -\delta\lambda_2(t_{c+}^-). \quad (2.127c)$$

On obtient alors $\mu_2 = 0$. Ainsi, λ_2 est également continu au point de contact. Il reste alors à déterminer μ tel que : $\lambda_1(t_{c+}^+) = \lambda_1(t_{c+}^-) + \mu$.

L'horizon temporel est supposé plus grand que l'instant de commutation, c'est-à-dire : $t_f > t_c$. Après le point de contact, le satellite évolue sur le cercle \mathcal{C}_0^δ . La position finale peut alors être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} z_1(t_f) = \delta \cos \phi, \\ z_{2n}(t_f) = \delta \sin \phi. \end{cases} \quad (2.128)$$

Les conditions de transversalité sont donc identiques aux conditions données par l'équation (2.39) réécrite ici :

$$\lambda_{1n}(t_f) \sin \phi - \lambda_2(t_f) \cos \phi = 0. \quad (2.129)$$

La trajectoire finale étant un arc libre sur le cercle \mathcal{C}_0^δ , le hamiltonien à l'instant final est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t_f) &= n^2 (\lambda_{1n}(t_f) z_{2n}(t_f) - \lambda_2(t_f) z_1(t_f)), \\ &= n^2 (\lambda_{1n}(t_f) \delta \sin \phi - \lambda_2(t_f) \delta \cos \phi), \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.130)$$

d'après les conditions de transversalité. Puisque le système est homogène, c'est-à-dire que la fonction de la dynamique ne dépend pas explicitement du temps, et que le hamiltonien est continu au point de contact, le hamiltonien est constant sur l'ensemble de la trajectoire. Ainsi :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \quad \mathcal{H}(t) = 0. \quad (2.131)$$

2.4.3.2 VALEUR INITIALE DU VECTEUR ADJOINT

Au point de jonction $(\delta, 0)$ en $t = t_{c+}$, le hamiltonien s'exprime selon :

$$\mathcal{H}(t_{c+}) = -n^2 \delta \lambda_2(t_{c+}). \quad (2.132)$$

Cela permet d'obtenir : $\lambda_2(t_{c+}) = 0$, ce qui est compatible avec l'arrivée au point de contact par un arc libre puisque $\lambda_2(t_{c+}) \leq 1$. Il est possible de remonter aux valeurs initiales du vecteur adjoint selon :

$$\lambda_2^0 C_{c0}^+ - \lambda_{1n}^0 S^+ c_0 = 0. \quad (2.133)$$

Puisque l'arc de trajectoire initial est un arc de poussée négative, le hamiltonien au temps initial s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{H}(t_0) = n^2 (U_n + \lambda_{1n}^0 z_{2n}^0 - \lambda_2^0 (z_1^0 + U_n)) = 0. \quad (2.134)$$

Le système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda_2^0 C_{c0}^+ - \lambda_{1n}^0 S_{c0}^+ = 0, \\ U_n + \lambda_{1n}^0 z_{2n}^0 - \lambda_2^0 z_1^c = 0, \end{cases} \quad (2.135)$$

permet de calculer la valeur initiale du vecteur adjoint. Le déterminant de ce système est :

$$z_1^c S_{c0}^+ - z_{2n}^0 C_{c0}^+ = \frac{1}{2\delta} \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2} \quad (2.136)$$

Le déterminant s'annule lorsque :

- $z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2 = 0$, c'est à dire que lorsque le point initial se trouve sur le cercle de centre $(-U_n, 0)$ de rayon $|U_n - \delta|$ qui est à l'extérieur de la zone admissible pour le point initial,
- $(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2 = 0$, c'est-à-dire lorsque le point initial se trouve sur le cercle de centre $(-U_n, 0)$ de rayon $U_n + \delta$ qui passe donc par le point de contact. Il est possible de supposer pour la suite que le point initial ne se trouve pas sur ce cercle.

Le déterminant ne s'annulant pas, les solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned} \lambda_{1n}^0 &= \frac{2\delta U_n C_{c0}^+}{\sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}, \\ &= U_n \frac{z_1^c [z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 + \delta^2 - U_n^2] - z_{2n}^0 \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}{[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2] \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}, \end{aligned} \quad (2.137a)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2^0 &= \frac{2\delta U_n S_{c0}^+}{\sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}, \\ &= U_n \frac{z_{2n}^0 [z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 + \delta^2 - U_n^2] + z_1^c \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}{[z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2] \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2}}. \end{aligned} \quad (2.137b)$$

L'instant $t = t_1$ correspond à une commutation entre un arc de poussée négative et un arc libre. Il est donc nécessaire de vérifier $\lambda_2(t_1) = 1$. Or, en utilisant l'expression de λ_{1n}^0 et

λ_2^0 calculée précédemment :

$$\begin{aligned}
\lambda_2(t_1) &= \lambda_2^0 C_{10} - \lambda_{1n} S_{10}, \\
&= \frac{U_n C_{c0}^+ C_{10} - U_n S_{c0}^+ S_{10}}{z_1^c S_{c0}^+ - z_{2n}^0 C_{c0}^+}, \\
&= \frac{U_n S_{c1}^+}{z_1^c S_{c0}^+ - z_{2n}^0 C_{c0}^+}, \\
&\stackrel{(2.94b)}{=} \frac{-z_{2n}^0 C_{c0}^+ + z_1^c S_{c0}^+}{z_1^c S_{c0}^+ - z_{2n}^0 C_{c0}^+}, \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{2.138}$$

t_1 est donc bien un instant de commutation entre un arc de poussée négative et un arc libre.

Le rayon du cercle que parcourt la trajectoire $t \mapsto (\lambda_{1n}(t), \lambda_2(t))$ dans le plan $(\lambda_{1n}, \lambda_2)$ est donné par :

$$A_\lambda = \sqrt{\lambda_{1n}^0{}^2 + \lambda_2^0{}^2} = \frac{U_n^2 (C_{10}^2 + S_{10}^2)}{(z_1^c S_{c0}^+ - z_{2n}^0 C_{c0}^+)^2} = \sqrt{\frac{1}{S_{c1}^{+2}}} = \frac{1}{S_{c1}^+}, \tag{2.139}$$

car $S_{c1}^+ \geq 0$. Ainsi, $A_\lambda \geq 1$, ce qui est compatible avec l'existence d'un arc de poussée. Il y a égalité pour :

$$(z_1^0 + U_n)^2 + z_{2n}^0{}^2 = U_n^2 + \delta^2, \tag{2.140}$$

c'est-à-dire lorsque le point initial se trouve sur le cercle de centre $(-U_n, 0)$ et de rayon $\sqrt{U_n^2 + \delta^2}$, passant par les points $(0, \pm\delta)$.

La courbe d'équation $\lambda_2^0 = 1$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
&U_n z_{2n}^0 [z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 + \delta^2 - U_n^2] \\
&+ (z_1^c - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2) \sqrt{z_1^{c2} + z_{2n}^0{}^2 - (U_n - \delta)^2} \sqrt{(U_n + \delta)^2 - z_1^{c2} - z_{2n}^0{}^2} = 0,
\end{aligned} \tag{2.141}$$

et est illustrée sur le graphe de la figure 2.11. Dans la zone définie par $\lambda_2^0 \geq 1$, l'hypothèse d'une trajectoire optimale constituée d'un arc de poussée négative puis d'un arc libre est valide, mais dans la zone définie par $\lambda_2^0 \leq 1$, il est nécessaire de considérer une trajectoire commençant par un arc libre. Dans la suite de l'étude, le point initial est choisi de telle sorte que la condition $\lambda_2^0 \geq 1$ est respectée.

2.4.3.3 SAUT AU POINT DE CONTACT

Il est possible de remarquer que $\phi + n(t_f - t_{c+}) = 2\pi$ (voir figure 2.12). Ainsi, la condition de transversalité (2.129) se réécrit :

$$\lambda_{1n}(t_f) \sin(n(t_f - t_{c+})) + \lambda_2(t_f) \cos(n(t_f - t_{c+})) = 0, \tag{2.142}$$

ou encore :

$$\lambda_{1n}(t_f) \cos\left(\frac{\pi}{2} - n(t_f - t_{c+})\right) + \lambda_2(t_f) \sin\left(\frac{\pi}{2} - n(t_f - t_{c+})\right) = 0. \tag{2.143}$$

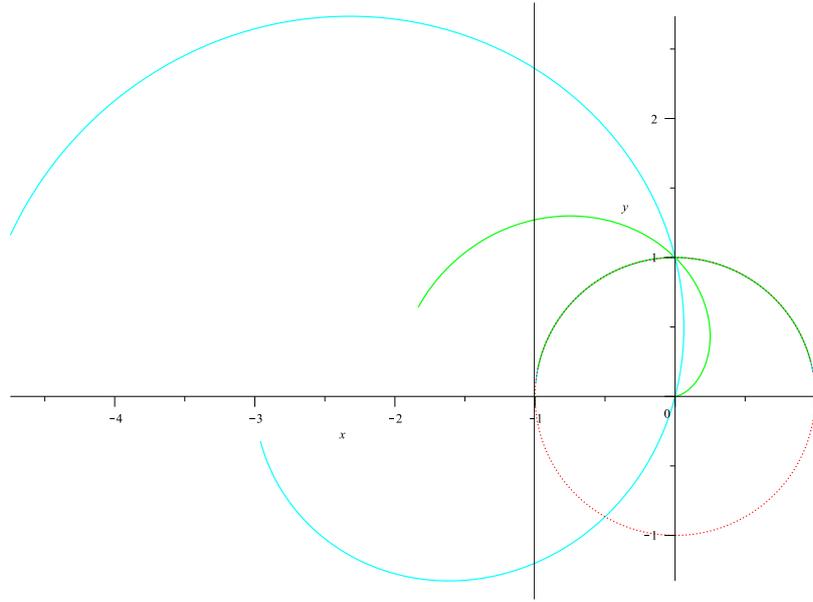


FIGURE 2.11 – — : cercle d'équation $z_1^0{}^2 + z_{2n}^0{}^2 = \delta^2$ avec $\delta = 1$,
— : courbe d'équation $\lambda_2^0 = 1$ pour $U_n = 0.5$ ($U_n \leq \delta$),
— : courbe d'équation $\lambda_2^0 = 1$ pour $U_n = 2$ ($U_n \geq \delta$).

En réécrivant : $\frac{\pi}{2} - n(t_f - t_{c+}) = n(\frac{\pi}{2n} + t_{c+} - t_f)$, l'équation de transversalité s'interprète comme :

$$\lambda_{1n} \left(\frac{\pi}{2n} + t_{c+} \right) = 0. \quad (2.144)$$

Il est possible de calculer $\lambda_2(\frac{\pi}{2n} + t_{c+})$ en remontant la trajectoire jusqu'à l'instant de contact

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left(\frac{\pi}{2n} + t_{c+} \right) &= -\lambda_{1n}(t_{c+}^+) \sin \left(\frac{\pi}{2} - n(t_{c+} - t_{c+}) \right) + \lambda_2(t_{c+}^+) \cos \left(\frac{\pi}{2} - n(t_{c+} - t_{c+}) \right), \\ &= -\lambda_{1n}(t_{c+}^+), \\ &= -\lambda_{1n}(t_{c+}^-) - \mu_1 \end{aligned} \quad (2.145)$$

Or, si l'arc de trajectoire pour $t \in [t_{c+}, t_f]$ est libre, λ_2 doit vérifier : $\lambda_2(t) \geq -1$, et en particulier, $\lambda_2(\frac{\pi}{2n} + t_{c+}) \geq -1$.

Puisque $\lambda_2(t_{c+}) = 0$, il vient nécessairement $\lambda_{1n}(t_{c+}^-) = A_\lambda$. Il est alors possible d'en déduire :

$$\mu \leq 1 - A_\lambda. \quad (2.146)$$

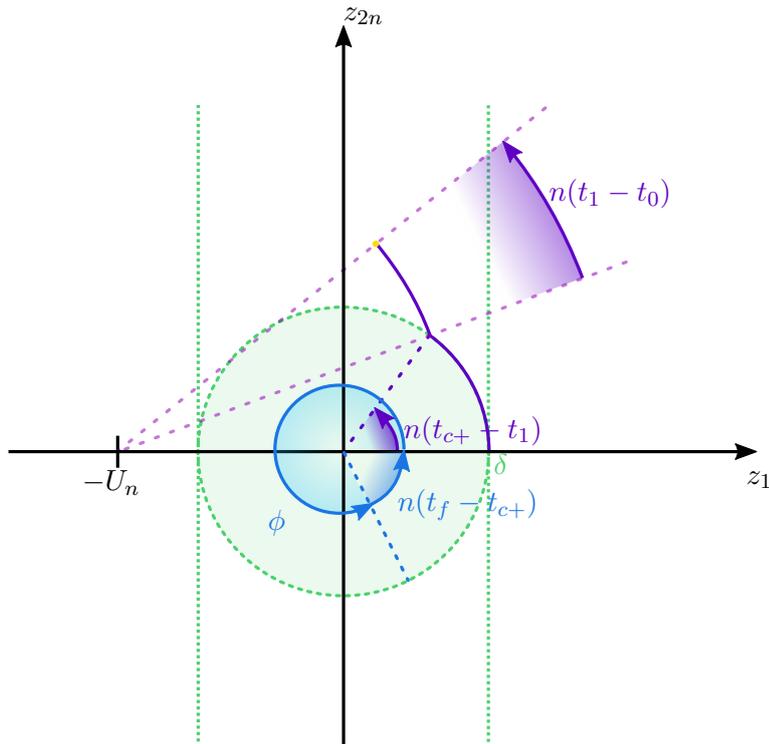


FIGURE 2.12 – Illustration de la relation $\phi + n(t_f - t_{c+}) = 2\pi$.

2.4.3.4 CONCLUSION

En utilisant le formalisme des méthodes indirectes, les conditions nécessaires pour le problème de maintien à poste hors-plan ont pu être établies. D'une part, le point initial doit se trouver dans une zone bornée de l'espace pour que le maintien à poste soit assuré. Si tel n'est pas le cas, la trajectoire sort nécessairement de la zone admissible. L'existence de cette zone admissible provient du caractère borné de la poussée. D'autre part, l'utilisation du principe du maximum avec les contraintes sur l'état met en évidence la nécessité d'une discontinuité du vecteur adjoint au point de contact avec la frontière. Les conditions nécessaires sur le vecteur adjoint conduisent à la mise en valeur d'une zone à l'intérieur de l'espace admissible peut-être divisée en deux zones, une pour laquelle la valeur initiale du vecteur adjoint est plus grande que 1 et l'autre dans le cas contraire. La courbe délimitant ne s'exprime pas géométriquement de façon simple, et la détermination de cette frontière doit se faire numériquement.

2.5 CONCLUSION

Les développements de ce chapitre ont pu mettre en lumière le caractère non unique de la solution optimale du problèmes de résonance. Puisque le Principe du Maximum ne donne que des conditions nécessaires, il est indispensable de tester les 16 cas développés pour déterminer la configuration qui conduit à la consommation la plus faible. Certains cas seront automatiquement éliminés car ils conduisent à une contradiction. Par exemple, si

l'on suppose que la trajectoire optimale commence avec une poussée, il n'est pas possible d'avoir un vecteur adjoint initial non compatible avec cette hypothèse.

Après le problème de rendez-vous, un cas simplifié de maintien à poste a été étudié. En effet, pour un problème de résonance pour lequel l'amplitude des oscillations est plus petite que la taille de la fenêtre, le maintien à poste est assuré dès que cette résonance est atteinte. De plus, lorsque l'amplitude de la résonance tend vers 0, les conditions nécessaires du problème de rendez-vous sont retrouvées aisément. Dans le cas où les contraintes de maintien à poste sont ajoutées au problème, il est nécessaire d'utiliser la version étendue du Principe du Maximum afin d'exprimer les conditions nécessaires en présence des contraintes sur l'état. Ces dernières mettent en lumière l'existence d'une zone de l'espace en dehors de laquelle le maintien à poste est impossible à cause du caractère borné de la poussée produite par les propulseurs considérés.

Le développement analytique des conditions nécessaires sur ces problèmes relativement simples montrent qu'il reste indispensable d'utiliser une évaluation numérique pour déterminer complètement la trajectoire et le profil de contrôle optimaux. Dans le cas du problème de résonance, la valeur de la position et de la vitesse initiale permettent de déterminer quels cas sont possibles et la comparaison des consommations qui en découlent conduit au choix du profil à consommation minimale. Dans le cas du problème de maintien à poste, la condition imposant à la valeur initiale du vecteur adjoint d'être plus grand que 1 se traduit par la présence de deux zones dont les frontières ne peuvent pas s'interpréter simplement de façon géométrique. Les conditions nécessaires développées dans ce chapitre et conduisant à un contrôle en boucle ouverte pourront être retrouvées par l'utilisation de méthodes numériques pour la résolution des problèmes de commande optimale.

Chapitre 3

Solution du problème de maintien à poste sur une semaine avec une méthode de décomposition en trois étapes

Les [uns] ont calculé que les chances d'exister d'un phénomène aussi manifestement absurde sont de une sur un million. Mais les [autres], eux, ont calculé que les chances uniques sur un million se réalisent neuf fois sur dix.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Sommaire

3.1	Introduction	102
3.2	Étape 1 : solution du problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles	103
3.2.1	Reformulation du problème	103
3.2.2	Initialisation du problème aux deux bouts par une méthode directe	105
3.2.3	Résolution du problème simplifié par une méthode indirecte	108
3.2.3.1	Méthode de pénalisation	108
3.2.3.2	Loi de commutation	110
3.2.3.3	Problème aux deux bouts	111
3.3	Étape 2 : Imposer les contraintes opérationnelles	113
3.3.1	Introduction	113
3.3.2	Obtention d'un profil de poussée	114
3.3.3	Schéma d'équivalence en consommation	115
3.3.4	Schéma d'équivalence en effet	115
3.4	Étape 3 : Optimisation des instants de commutation	117
3.4.1	Introduction	117
3.4.2	Description du système à commutations considéré	117
3.4.3	Optimisation des instants de commutation	120
3.4.3.1	Position du problème	120
3.4.3.2	Résolution en tant que problème d'optimisation de paramètres	121
3.4.4	Algorithme de résolution	124

3.5	Analyse des solutions	124
3.5.1	Application de la méthode à trois étapes pour un problème de rendez-vous simplifié	125
3.5.1.1	Étape 1 : problème de rendez-vous simplifié	125
3.5.1.2	Étape 2 : schémas d'équivalence pour les contraintes opérationnelles	128
3.5.1.3	Étape 3 : optimisation des instants de commutation	130
3.5.2	Application de la méthode à trois étapes pour un problème de maintien à poste perturbé	132
3.5.2.1	Étape 1 : problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles	132
3.5.2.2	Étape 2 : schémas d'équivalence pour les contraintes opérationnelles	136
3.5.2.3	Étape 3 : optimisation des instants de commutation	137
3.6	Conclusion	140

3.1 INTRODUCTION

Le problème de maintien à poste 1.1 défini page 41 est un problème de contrôle optimal à consommation minimale avec contraintes sur le contrôle et sur l'état. Bien qu'elles soient en général difficiles à prendre en compte pour la résolution d'un problème de contrôle optimal, les contraintes sur l'état du problème 1.1 peuvent être traitées avec des méthodes présentées dans le chapitre précédent. En revanche, les contraintes opérationnelles sur le contrôle du problème de maintien à poste sont des contraintes implicites, puisqu'elles s'appliquent sur les instants de milieu des poussées et les demi-largeurs de ces dernières, qui sont des paramètres du profil de contrôle. Ces contraintes, appelées par la suite contraintes opérationnelles, ne peuvent pas être facilement traitées par des méthodes indirectes.

Les méthodes directes appliquées sur le problème complet se révèlent elles-aussi infructueuses. En effet, considérer les contraintes opérationnelles nécessite de supposer connu le nombre optimal de poussées par propulseurs. Or ce nombre optimal de poussée n'est pas connu *a priori*, et son calcul requiert la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire et non convexe en nombres entiers, les variables entières étant le nombre de poussées par propulseur, pour lequel il n'existe pas de méthodes générales de résolution. Nous proposons donc une approche nouvelle qui repose sur une résolution du problème de contrôle optimal en trois étapes.

La première étape consiste en la formulation et la résolution par le Principe du Maximum d'un problème de maintien à poste simplifié pour lequel les contraintes opérationnelles ont été enlevées. Cette étape nécessite la résolution d'un problème aux deux bouts par une méthode de tir par exemple et pour lequel l'initialisation peut-être particulièrement sensible et difficile. Pour contourner cette difficulté, une solution approchée est obtenue par une méthode de collocation directe et sert d'initialisation au problème aux deux bouts issu de l'application du Principe du Maximum. Comme les contraintes opérationnelles n'ont pas été considérées pour ce problème, le signal de commande obtenu ne satisfait généralement pas les contraintes opérationnelles. En pratique, dans le cas d'un problème de maintien à poste pour un satellite géostationnaire, le profil de contrôle optimal ne vérifie pas les contraintes opérationnelles puisque les deux propulseurs Nord et les deux propulseurs Sud

ont tendance à pousser ensemble respectivement. Lors de la résolution de cette première étape, le caractère tout ou rien du profil de contrôle est approché par une fonction sigmoïde continue qu'il est nécessaire de transformer en un signal tout ou rien pour obtenir des créneaux de poussée.

Le profil de contrôle issu de la première étape ne respectant pas les contraintes opérationnelles, une deuxième étape est nécessaire. Tout d'abord, le profil de contrôle continu obtenu à la fin de la première étape est transformé en un profil tout ou rien à partir de valeurs seuils choisies. Deux problèmes d'optimisation sont ensuite construits dont le but est d'optimiser sous les contraintes opérationnelles les instants de milieu de poussée et les demi-largeurs de ces dernières afin d'obtenir des profils de contrôles dits équivalents à ceux obtenus à la première étape). Ces deux schémas d'équivalence correspondent respectivement à une équivalence en consommation et à une équivalence en effet, mais ne sont pas nécessairement plus efficaces en termes de consommation.

En effet, les instants de milieu de poussées et leurs demi-largeurs obtenues à la fin de la deuxième étape sont très sensibles à la valeur seuil choisie pour transformer le profil continu de la première étape en un profil tout ou rien. C'est pourquoi, une troisième étape d'optimisation est nécessaire afin d'affiner ce choix et améliorer la consommation. Le profil de contrôle issu de la solution de la deuxième étape définit une succession d'arc libres et d'arcs de poussée pour chacun des propulseurs du satellite. Ainsi, le passage d'un arc au suivant peut être interprété comme une commutation entre deux sous-systèmes du système global. De la même façon, les instants d'allumage et d'extinction des propulseurs peuvent être considérés comme les instants de commutation entre les différents sous-systèmes. Pour la troisième étape, nous proposons alors d'utiliser une technique d'optimisation s'appuyant sur la théorie des systèmes à commutation pour déterminer les instants optimaux de début et de fin de poussée satisfaisant les contraintes opérationnelles.

Les solutions de la méthode de décomposition proposée sont analysées dans deux cadres de travail différents mais relativement proches. Tout d'abord, un problème de rendez-vous avec un point se déplaçant sur une orbite géostationnaire est envisagé avec un modèle képlérien. La méthode de décomposition en trois étapes de ce chapitre est ensuite au problème de maintien à poste complet.

3.2 ÉTAPE 1 : SOLUTION DU PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE SANS LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

La première étape proposée consiste en la résolution du problème de contrôle optimal simplifié associé au problème de maintien à poste pour lequel les contraintes opérationnelles ont été retirées. Ce problème de contrôle optimal est d'abord résolu par une méthode de collocation directe dont le but est d'initialiser le problème aux deux bouts issu de l'application du Principe du Maximum.

3.2.1 REFORMULATION DU PROBLÈME

Pour mémoire, les contraintes opérationnelles sont les suivantes :

- (i) la poussée est idéalement soit nulle soit non nulle et constante (il s'agit d'un profil on-off),
- (ii) deux propulseurs ne peuvent pas être actifs simultanément,
- (iii) une poussée doit avoir une durée minimale de $T_l = 5$ minutes,
- (iv) l'intervalle de temps minimal entre deux poussées d'un même propulseur est de $T_d = 20$ minutes,
- (v) l'intervalle de temps entre deux poussées de deux propulseurs différents est de $T_s = 5$ minutes.

Si les contraintes opérationnelles (i) à (v) liées aux propulseurs sont retirées du problème de maintien à poste 1.1 à résoudre, le contrôle peut être écrit sous la forme de fonctions continues $t \mapsto F(t) \in \mathbb{R}^4$, puisque le paramétrage des profils de poussée présenté en partie 1.4.2.2 a été effectué dans le but d'exprimer les contraintes opérationnelles de façon plus simple et que ces dernières sont retirées du problème d'optimisation pour la première étape.

L'espace admissible au temps final doit également être déterminé. Trois cas de figure ont été choisis :

- la position finale peut être laissée libre,
- le satellite peut être contraint de revenir au centre de la fenêtre de maintien à poste, et la trajectoire doit vérifier : $x(t_f) = 0$,
- le satellite peut être contraint de revenir au point initial et la trajectoire doit vérifier une contrainte d'état final : $x(t_f) = x_0$.

Si la première contrainte finale correspond à proprement parler à un problème de maintien à poste puisque seule la restriction de la fenêtre doit être vérifiée, les deux autres ne sont pas moins intéressantes. En effet, ces contraintes s'apparentent davantage à un problème de rendez-vous, et un problème de maintien à poste peut s'interpréter comme un problème d'opérations de proximité pour un satellite chasseur autour d'une cible fictive – le point de maintien à poste. Ainsi, la deuxième contrainte est interprétable comme un rendez-vous avec le centre de la fenêtre tandis que la troisième est un rendez-vous avec le point initial. En pratique, seules les deux premières contraintes seront considérées par la suite.

Avec ces remarques, deux problèmes peuvent être définis. Le premier est le problème de maintien à poste à position finale libre (problème 3.1) et le deuxième est le problème de maintien à poste à état final forcé à 0 (problème 3.2). Si la position finale doit être forcée à une valeur différente de 0, un changement de variables spatial permet de se ramener au cas où la position finale est forcée à 0.

Problème 3.1. Trouver les fonctions $t \mapsto F_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{F_i(t)} J &= \sum_{i=1}^4 \int_{t_0}^{t_f} |F_i(t)| dt \\ \text{satisfaisant :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) \text{ libre,} \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ 0 \leq F_i(t) \leq 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Problème 3.2. Trouver les fonctions $t \mapsto F_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{F_i(t)} J &= \sum_{i=1}^4 \int_{t_0}^{t_f} |F_i(t)| dt \\ \text{satisfaisant :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) = 0, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\ 0 \leq F_i(t) \leq 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Les problèmes 3.1 et 3.2 sont des problèmes de contrôle optimal avec contraintes sur l'état et le contrôle qui peuvent être résolus par une méthode indirecte basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin ou par une méthode directe (une méthode explicite de collocation par exemple). Dans le premier cas, la présence de contraintes sur l'état et la nature du problème rendent la solution du problème aux deux bouts issu du PMP très sensible à son initialisation, conduisant à des problèmes de convergence des méthodes de tir ou des méthodes de différences finies employées. Dans le second cas, quelle que soit la méthode directe utilisée, les contraintes explicites sur l'état et la commande ne peuvent pas être garanties entre les points de discrétisation et la solution obtenue peut comprendre un nombre non optimal de manœuvres entraînant une surconsommation.

Afin de pallier ces différents problèmes, il est proposé dans la suite une méthode hybride composée d'une première résolution par une méthode directe dont la solution va constituer une bonne condition initiale candidate pour la résolution du problème aux deux bouts. Nous verrons dans la suite que dans cette résolution indirecte, l'introduction d'un paramètre de seuil due à la régularisation des profils de poussée va permettre d'introduire un degré de liberté, utilisé afin d'optimiser le nombre de manœuvres issu de la résolution directe du problème.

3.2.2 INITIALISATION DU PROBLÈME AUX DEUX BOUTS PAR UNE MÉTHODE DIRECTE

Une méthode directe est utilisée pour initialiser la résolution des problèmes 3.1 et 3.2. Pour ce faire, nous procédons à un paramétrage des signaux d'état et de commande. Soit le découpage uniforme de l'intervalle de résolution $[t_0, t_f]$ suivant :

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = t_f, \quad (3.3)$$

définissant N sous intervalles $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 0, \dots, N - 1$, de longueurs identiques $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$. Le vecteur d'état x et le vecteur de contrôle F sont évalués en chacun des points τ_k . Notons :

$$x_j = x(\tau_j) \text{ et } F_j = F(\tau_j), \quad (3.4)$$

de façon à remplacer les fonctions inconnues par les variables inconnues $\{x_j\}_{j=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^{6 \times N}$ et $\{F_j\}_{j=1, \dots, N} \in [0, 1]^{4 \times N}$. Puis la dynamique est satisfaite grâce à un schéma d'intégration implicite. En posant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t) = f(t, x, F), \quad (3.5)$$

la méthode d'intégration de Simpson 1-3 d'ordre 4 proposées par [Hull, 2003] :

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{\Delta\tau} = \frac{1}{6} \left[f(t_j, x_j, F_j) + 4f_{m_j} + f(t_{j+1}, x_{j+1}, F_{j+1}) \right], \quad (3.6)$$

où f_{m_j} est définie par :

$$f_{m_j} = f \left(\frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \frac{x_j + x_{j+1}}{2} - \frac{1}{8} \left[f(t_j, x_j, F_j) - f(t_{j+1}, x_{j+1}, F_{j+1}) \right], \frac{F_j + F_{j+1}}{2} \right). \quad (3.7)$$

La contrainte dynamique $\dot{x} - f(t, x, F)$ est alors remplacée par une contrainte d'annulation des résidus calculés à partir du schéma numérique présenté ci-dessus :

$$R_j = x_{j+1} - x_j - \frac{\Delta\tau}{6} \left[f(\tau_j, x_j, F_j) + 4f_{m_j} + f(\tau_{j+1}, x_{j+1}, F_{j+1}) \right]. \quad (3.8)$$

Dans la suite, les résidus seront calculés avec la méthode de Simpson d'ordre 4. En remplaçant l'expression de f par la dynamique relative du satellite par rapport au point de maintien à poste, il vient : pour $j = 0, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned} R_j = x_{j+1} - x_j - \frac{\Delta\tau}{6} & \left[A(\tau_j)x_j + D(\tau_j) + \tilde{B}(\tau_j)F_j + A(\tau_{j+1})x_{j+1} + D(\tau_{j+1}) + \tilde{B}(\tau_{j+1})F_{j+1} \right. \\ & + A \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right) \left[\frac{x_j + x_{j+1}}{2} - \frac{\Delta\tau}{8} \left(A(\tau_j)x_j + D(\tau_j) + \tilde{B}(\tau_j)F_j - A(\tau_{j+1})x_{j+1} - D(\tau_{j+1}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \tilde{B}(\tau_{j+1})F_{j+1} \right) \right] + D \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right) + \tilde{B} \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right) \frac{F_j + F_{j+1}}{2} \left. \right]. \quad (3.9) \end{aligned}$$

En renommant :

$$\begin{aligned} A_j &= A(\tau_j), & A_{m_j} &= A \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right), \\ D_j &= D(\tau_j), & D_{m_j} &= D \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right), \\ \tilde{B}_j &= \tilde{B}(\tau_j), & \tilde{B}_{m_j} &= \tilde{B} \left(\frac{\tau_j + \tau_{j+1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

les résidus s'écrivent de façon factorisée : pour $j = 0, \dots, N - 1$,

$$\begin{aligned}
 R_j(x_j, x_{j+1}, F_j, F_{j+1}) = & \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(-2A_{m_j} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_{j+1} - A_{j+1} \right) \right] x_{j+1} \\
 & - \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_j + A_j \right) \right] x_j \\
 & + \frac{\Delta\tau}{6} \left[-\tilde{B}_{j+1} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} \tilde{B}_{j+1} - 2\tilde{B}_{m_j} \right] F_{j+1} \\
 & - \frac{\Delta\tau}{6} \left[\bar{B}_j + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} \bar{B}_j + 2\bar{B}_{m_j} \right] F_j \\
 & + \frac{\Delta\tau}{12} \left[8D_{m_j} - \left(\Delta\tau A_{m_j} - 2I_6 \right) D_{j+1} + \left(\Delta\tau A_{m_j} + 2I_6 \right) D_j \right],
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où I_6 désigne la matrice identité de dimension 6.

En notant $F_{k,i}$, $k = 0, \dots, N$, $i = 1, \dots, 4$, l'intégrale de la fonction objectif est elle aussi discrétisée sous la forme :

$$J = \sum_{i=1}^4 \int_{t_0}^{t_f} |F_i(t)| dt \simeq \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^N \frac{F_{k,i} + F_{k+1,i}}{2} \Delta\tau. \tag{3.12}$$

Les contraintes de maintien à poste sont évaluées en chaque point de la discrétisation et sont donc réécrites : pour $j = 0, \dots, N$,

$$\begin{aligned}
 \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_j x_j \right| & \leq \delta, \\
 \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C_j x_j \right| & \leq \delta,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec $C_j = C(\tau_j)$. Comme cela a été mentionné à la section 1.5.2 page 45, ces contraintes ne permettent pas d'assurer que la trajectoire $t \mapsto x(t)$ ne sort pas de l'espace admissible entre deux instants de la grille temporelle.

Ainsi, les problèmes de contrôle optimal de dimension infinie 3.1 et 3.2 sont réécrits sous la forme de problèmes d'optimisation en dimension finie, l'un pour lequel la position finale est libre et l'autre pour lequel la position finale est contrainte :

Problème 3.3. Trouver les $\{x_j\}_{j=1,\dots,N}$ et $\{F_{j,i}\}_{j=1,\dots,N,i=1,\dots,4}$ solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{F_{j,i}(t)} J &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \frac{F_{j,i} + F_{j+1,i}}{2} \Delta\tau \\ \text{t.q. :} & \\ \left\{ \begin{array}{l} R_j(x_j, F_j) = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N-1, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) \text{ libre,} \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_j x_j \right| \leq \delta, \quad \forall j = 0, \dots, N, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C_j x_j \right| \leq \delta, \quad \forall j = 0, \dots, N, \\ 0 \leq F_{i,j} \leq 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Problème 3.4. Trouver les $\{x_j\}_{j=1,\dots,N}$ et $\{F_{j,i}\}_{j=1,\dots,N,i=1,\dots,4}$ solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{F_{j,i}(t)} J &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^N \frac{F_{j,i} + F_{j+1,i}}{2} \Delta\tau \\ \text{t.q. :} & \\ \left\{ \begin{array}{l} R_j(x_j, F_j) = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N-1, \\ x(t_0) = x_0, \\ x(t_f) = 0, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C_j x_j \right| \leq \delta, \quad \forall j = 0, \dots, N, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C_j x_j \right| \leq \delta, \quad \forall j = 0, \dots, N, \\ 0 \leq F_{i,j} \leq 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ces deux problèmes peuvent être résolus par des solveurs linéaires classiques. Le solveur choisi ici est Gurobi (voir la référence [Gu et al., 2010]). La trajectoire $t \mapsto x(t)$ est obtenue à partir des $\{x_j^*\}_{j=1,\dots,N}$ solution des problèmes 3.3 et 3.4 par interpolation. Il est également possible de calculer les paramètres de Lagrange $\{\lambda_j^*\}_{j=0,\dots,N} \in \mathbb{R}^{6 \times (N+1)}$ associés aux contraintes égalité $R_j = 0$. Or, d'après la section 1.5 et les références [von Stryk and Bulirsch, 1992], [Grimm and Markl, 1997] et [Bonnard et al., 2005], ces paramètres de Lagrange peuvent être considérés comme des approximations du vecteur adjoint pour les problèmes de contrôle optimal 3.1 et 3.2. Ainsi, les solutions $\{x_j^*\}_{j=1,\dots,N}$ et $\{\lambda_j^*\}_{j=0,\dots,N}$ servent à initialiser les problèmes résolus par une méthode indirecte.

3.2.3 RÉOLUTION DU PROBLÈME SIMPLIFIÉ PAR UNE MÉTHODE INDIRECTE

3.2.3.1 MÉTHODE DE PÉNALISATION

La méthode de pénalisation pour prendre en compte les contraintes sur l'état au sein du formalisme du Principe du Maximum a été décrite dans la section 1.5 et la référence [Naidu, 2002] par exemple. Les problèmes 3.2 et 3.1 sont résolus avec le Principe du Maximum de Pontryagin en utilisant comme initialisation les solutions des problèmes 3.4 et 3.3 respectivement.

Les contraintes de maintien à poste, qui se transcrivent sous la forme de contraintes sur l'état, sont traitées de manière approchée au moyen de l'utilisation d'un nouvel état x_7 pénalisant la sortie de la fenêtre de maintien à poste (voir Section 1.5.3.2 page 51). Définissant :

$$\psi_1(t, x(t)) = C_2(t)x(t) - \delta, \quad (3.16a)$$

$$\psi_2(t, x(t)) = -C_2(t)x(t) - \delta, \quad (3.16b)$$

$$\psi_3(t, x(t)) = C_3(t)x(t) - \delta, \quad (3.16c)$$

$$\psi_4(t, x(t)) = -C_3(t)x(t) - \delta, \quad (3.16d)$$

où la matrice $C(t)$ est donnée par :

$$C(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ C_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

il est possible de définir une fonction de pénalisation sous la forme :

$$\dot{x}_7 = f_7(x(t), t) = \psi(t, x(t)) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \psi_i^2(t, x(t)) \left[1 + \text{sign}(\psi_i(t, x(t))) \right], \quad (3.18)$$

où la fonction :

$$h : v \mapsto \frac{1}{2} \left[1 + \text{sign}(v) \right], \quad (3.19)$$

vaut 0 lorsque $v < 0$ et 1 lorsque $v > 0$.

Remarque 3.1. La fonction :

$$h_0 : v \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{2} v^2 \left[1 + \text{sign}(v) \right] \quad (3.20)$$

n'est donc pas définie en 0, mais elle peut être prolongée par continuité par 0 en 0, et ce prolongement est de classe \mathcal{C}^1 . Sa dérivée est alors calculée de part et d'autre de 0 pour donner :

$$h_1 : v \in \mathbb{R}^* \mapsto v \left[1 + \text{sign}(v) \right], \quad (3.21)$$

et est prolongée par 0 par continuité en 0.

Si les contraintes de maintien à poste sont exprimées en termes d'éléments orbitaux relatifs, les contraintes sur l'état à respecter sont celles définies par les équations (1.59) et (1.69) et les fonctions de pénalisation à considérer sont :

$$\tilde{\psi}_1(x(t)) = x_4(t)^2 + x_5(t)^2 - \frac{\delta^2}{4}, \quad (3.22a)$$

$$\tilde{\psi}_2(x(t)) = 4[x_2^2(t) + x_3^2(t)] - (\delta + x_6(t))^2, \quad (3.22b)$$

$$\tilde{\psi}_3(x(t)) = 4[x_2^2(t) + x_3^2(t)] - (\delta - x_6(t))^2, \quad (3.22c)$$

en posant $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) & x_5(t) & x_6(t) \end{bmatrix}^T$. Il vient alors :

$$\tilde{\psi}(x(t)) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \tilde{\psi}_i^2(x(t)) \left[1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_i(x(t))) \right]. \quad (3.23)$$

Outre le fait que seules 3 fonctions à pénaliser sont nécessaires au lieu de 4 dans le cas de l'expression des contraintes en éléments orbitaux, il reste à noter que ces dernières ne dépendent pas explicitement du temps.

3.2.3.2 LOI DE COMMUTATION

Soit $t \mapsto \lambda(t) \in \mathbb{R}^6$ le vecteur adjoint. Rajouter une dimension au vecteur d'état pour pénaliser la sortie de la fenêtre implique d'écrire un Hamiltonien augmenté du système sous la forme :

$$\mathcal{H}(t, x(t), F(t), \lambda(t)) = F_{\max} \sum_{i=1}^4 |F_i(t)| + \mu_1 \psi(t, x(t)) + \lambda^T(t) [A(t)x(t) + D(t) + F_{\max} B(t)\Gamma F(t)], \quad (3.24)$$

où μ_1 est une constante.

Le Principe du Maximum s'écrit :

$$F^*(t) = \operatorname{argmin}_{u \in [0,1]^4} \mathcal{H}(t, x^*(t), u(t), \lambda^*(t)), \quad (3.25)$$

et peut être exprimée sous la forme :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall u \in [0, 1]^4, \mathcal{H}(t, x^*(t), F^*(t), \lambda^*(t)) \leq \mathcal{H}(t, x^*(t), u(t), \lambda^*(t)). \quad (3.26)$$

Le Hamiltonien étant une fonction linéaire par rapport aux F_i , il vient :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \forall u \in [0, 1]^4, \sum_{i=1}^4 |F_i^*(t)| + \lambda^{*T}(t) B(t) \Gamma F^*(t) \leq \sum_{i=1}^4 |u_i(t)| + \lambda^{*T}(t) B(t) \Gamma u(t). \quad (3.27)$$

Cette condition nécessaire conduit à :

$$\forall i = 1, \dots, 4, F_i^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 + [\lambda^{*T}(t) B(t) \Gamma]_i < 0, \\ 0 & \text{si } 1 + [\lambda^{*T}(t) B(t) \Gamma]_i > 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

où l'indice i indique la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur $\lambda^{*T}(t) B(t) \Gamma$. Les conditions (3.28) peuvent être réécrites avec la fonction de commutation :

$$f_c : v \in \mathbb{R}^4 \mapsto \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \operatorname{sign} v_1 \\ 1 - \operatorname{sign} v_2 \\ 1 - \operatorname{sign} v_3 \\ 1 - \operatorname{sign} v_4 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

et conduisent au contrôle optimal :

$$F^*(t) = f_c(\mathbf{1} + \Gamma^T B^T(t) \lambda(t)), \quad (3.30)$$

où $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Des arcs singuliers peuvent apparaître lorsque la fonction de commutation est nulle. Dans ce cas, le contrôle F_i peut prendre n'importe quelle valeur à l'intérieur de l'intervalle $[0, F_{\max}]$. Cependant, les contraintes technologiques des propulseurs imposent un contrôle constant soit nul, soit égal à la valeur maximal. C'est pourquoi, nous supposons dans toute la suite de cette étude que des arcs singuliers ne peuvent pas exister. Cette hypothèse

est vérifiée *a posteriori*.

3.2.3.3 PROBLÈME AUX DEUX BOUTS

Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre sur le vecteur d'état et le vecteur adjoint permettent d'écrire les équations canoniques d'Hamilton :

$$\dot{x}^* = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right)^T (x^*, \lambda^*, F^*, t) = A(t)x^*(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F^*(t), \quad (3.31a)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right)^T (x^*, \lambda^*, F^*, t) = -A^T(t)\lambda^*(t) - \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x^*(t)). \quad (3.31b)$$

$$(3.31c)$$

Le contrôle optimal défini par l'équation (3.30) peut être substitué dans l'équation (3.31a). Les équations canoniques s'écrivent alors :

$$\dot{x}^* = A(t)x^*(t) + D(t) + \tilde{B}(t)f_c \left(\mathbf{1} + \Gamma^T B^T(t)\lambda(t) \right), \quad (3.32a)$$

$$\dot{\lambda}^* = -A^T(t)\lambda^*(t) - \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x^*(t)). \quad (3.32b)$$

Le calcul de la dérivée de la fonction de pénalisation par rapport au vecteur d'état permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(\tau)) &= C_2(t) [C_2(t)x(t) - \delta] [\text{sign}(C_2(t)x(t) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_2(t) [C_2(t)x(t) + \delta] [\text{sign}(-C_2(t)x(t) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_3(t) [C_3(t)x(t) - \delta] [\text{sign}(C_3(t)x(t) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_3(t) [C_3(t)x(t) + \delta] [\text{sign}(-C_3(t)x(t) - \delta) + 1], \end{aligned} \quad (3.33)$$

en tenant compte de la Remarque 3.1.

Les conditions de transversalité permettent d'écrire les conditions aux limites pour le vecteur adjoint à partir des conditions aux limites pour le vecteur d'état. Ainsi, pour les deux problèmes 3.1 et 3.2, les conditions aux limites sur λ^* s'écrivent :

$$\text{Problème 3.1 : } \begin{cases} \lambda^*(t_0) \text{ libre,} \\ \lambda^*(t_f) = 0, \end{cases} \quad \text{et Problème 3.2 : } \begin{cases} \lambda^*(t_0) \text{ libre,} \\ \lambda^*(t_f) \text{ libre.} \end{cases} \quad (3.34)$$

Les problèmes aux deux bouts à résoudre sont donc :

Problème 3.5. Trouver les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto \lambda(t)$ solutions de :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) + D(t) \\ &\quad + \tilde{B}(t)f_c\left(\mathbf{1} + \Gamma^T B^T(t)\lambda(t)\right), \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A^T(t)\lambda^*(t) + \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x^*(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x(t_f) &\text{ libre,} \\ \lambda(t_0) &\text{ libre,} \\ \lambda(t_f) &= 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

◦

Problème 3.6. Trouver les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto \lambda(t)$ solutions de :

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= A(t)x^*(t) + D(t) \\ &\quad + \tilde{B}(t)f_c\left(\mathbf{1} + \Gamma^T B^T(t)\lambda(t)\right), \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A^T(t)\lambda^*(t) + \mu_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x^*(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \\ x(t_f) &= 0, \\ \lambda(t_0) &\text{ libre,} \\ \lambda(t_f) &\text{ libre.} \end{aligned} \tag{3.36}$$

◦

La dynamique du vecteur d'état définie par l'équation (3.32a) est discontinue aux instants de saut de la fonction de commutation. Or, la fonction `bvp4c` de Matlab, basée sur des méthodes aux différences finies, utilisée pour résoudre les problèmes 3.5 et 3.6 ne peut pas considérer des fonctions discontinues. Une méthode décrite par [Mazal et al., 2014] permet d'approcher les discontinuités dues aux sauts. La fonction f_c est approchée par :

$$f_c(v) \approx \tilde{f}_c(v) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(Mv + \frac{\pi}{2}\right), \tag{3.37}$$

où M est un paramètre qui contrôle la pente de la fonction arctangente. La figure 3.1 illustre l'effet de M sur la forme de la fonction \tilde{f}_c .

Une autre technique décrite dans [Gao and Baoyin, 2013] ou [Bertrand and Epenoy, 2002] consiste à ajouter un terme quadratique régularisant dans la fonction objectif. Ainsi, la fonctionnelle :

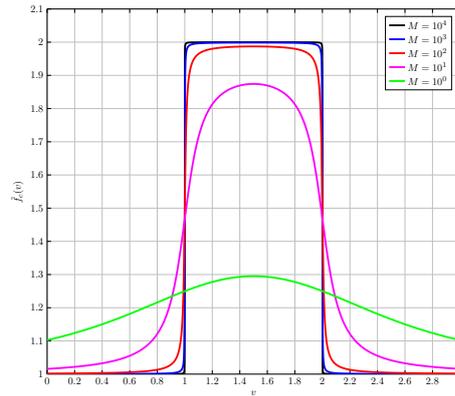
$$\int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\| dt, \tag{3.38}$$

est remplacée par :

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\|u(t)\| - \varepsilon \|u(t)\| \left[1 - \|u(t)\| \right] \right) dt, \tag{3.39}$$

où ε est un paramètre décroissant de 1 à 0. Dans la suite de la résolution, la méthode de l'approximation du saut par une fonction arctangente sera utilisée.

La résolution des problèmes 3.5 ou 3.6 permet de reconstruire une fonction de commande notée F_{BVP} à partir de l'équation (3.30).

FIGURE 3.1 – Effet du paramètre de pente M dans l'approximation de la fonction de saut.

3.3 ÉTAPE 2 : IMPOSER LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

3.3.1 INTRODUCTION

Les profils F_{BVP} solutions des problèmes 3.5 et 3.6 sont des fonctions continues. Il est donc nécessaire de les transformer en créneaux. Ceci est réalisé à l'aide de fonctions seuils. Les créneaux qui en résultent ne vérifient pas nécessairement les contraintes opérationnelles, en particulier la contrainte de disjonction des poussées. Il est donc nécessaire d'ajouter une deuxième étape d'optimisation afin de forcer la satisfaction des contraintes (i) - (v). Cette partie propose deux problèmes d'optimisation des instants de milieu de poussées et de leur demi-largeur, appelés schémas d'équivalence dont le but est d'assurer que le profil de contrôle résultant satisfera les contraintes opérationnelles.

Rappelons ici les contraintes opérationnelles :

- la durée minimale de poussée imposée : la demi-largeur du créneau k du propulseur i doit vérifier :

$$2\Delta t_k^i \geq T_l, \quad (3.40)$$

- un intervalle de temps entre deux poussées doit être respecté : pour le créneau k du propulseur i et le créneau j du propulseur l , l'inégalité suivante doit être satisfaite :

$$\left| t_l^j - t_k^i \right| - \left(\Delta t_l^j + \Delta t_k^i \right) \geq I^{ij}. \quad (3.41)$$

avec :

$$I^{ij} = \begin{cases} T_s & \text{si } i = j, \\ T_d & \text{si } i \neq j. \end{cases}, \quad (3.42)$$

- les poussées ne peuvent pas commencer avant t_0 ni finir après t_f , par exemple dans le cas de la $k^{\text{ème}}$ poussée du propulseur i :

$$t_i^k - \Delta t_i^k \geq t_0 \quad (3.43a)$$

$$t_i^k + \Delta t_i^k \leq t_f. \quad (3.43b)$$

Nous cherchons à obtenir un profil équivalent de commande, dans un sens à définir, à celui obtenu par résolution des problèmes 3.5 ou 3.6 et respectant les contraintes citées plus haut. Deux schémas d'équivalence ont été étudiés :

- le schéma d'équivalence en consommation, dont le but est de calculer un profil de contrôle ayant une consommation proche du profil solution de la première étape,
- le schéma d'équivalence en effet, dont le but est de minimiser la consommation et l'écart à la position terminale de la trajectoire solution de la première étape.

3.3.2 OBTENTION D'UN PROFIL DE POUSSÉE

Une fois les problèmes 3.5 et 3.6 résolus, il est nécessaire d'extraire de la solution continue F_{BVP} les instants de milieu de poussée t_k^i et les demi-largeurs Δt_k^i . Or, ceci n'est possible que si l'on dispose de profils en créneaux. Il faut donc transformer le profil continu $F_{\text{BVP}}(t)$ obtenu lors de la résolution du problème de contrôle optimal à l'étape 1 en un profil discontinu. Un vecteur de paramètres de seuil :

$$\varsigma = [\varsigma_1 \quad \varsigma_2 \quad \varsigma_2 \quad \varsigma_4]^T \in \mathbb{R}^4 \quad (3.44)$$

tel que :

$$\forall t \in [t_0, t_f], F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } F_{\text{BVP},i}(t) < \varsigma_i, \\ 1 & \text{si } F_{\text{BVP},i}(t) \geq \varsigma_i, \end{cases} \quad (3.45)$$

est utilisé à cette fin.

Comme il est possible de le voir de façon agrandie sur le schéma de la figure 3.2, la valeur de la demi-largeur du créneau dépend de la valeur du paramètre de seuil, ce qui influe sur la consommation obtenue. Mais également, dans certains cas, ce paramètre peut avoir un impact sur le nombre de poussées d'un propulseur par l'effet combiné du seuil d'amplitude et du seuil minimal de durée. Dans toute la suite, on notera P_i le nombre de poussées du propulseur i , et P le nombre total de poussées.

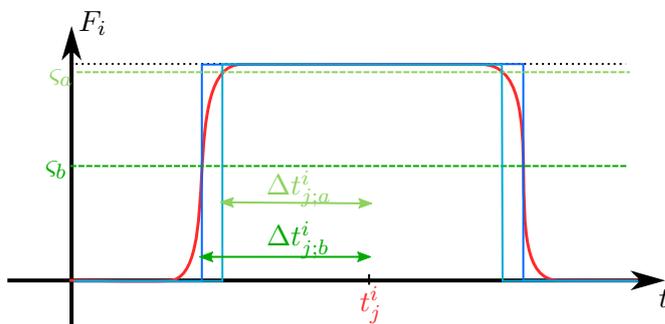


FIGURE 3.2 – Schéma d'influence du paramètre de seuil ς sur la demi-largeur des créneaux obtenus.

Les fonction F obtenues servent d'itéré initial aux problèmes d'équivalence résolus dans la suite en fournissant une structure de profil (nombre de poussées).

3.3.3 SCHÉMA D'ÉQUIVALENCE EN CONSOMMATION

La première notion d'équivalence entre deux lois de contrôle se fonde sur leur consommation de carburant. Le but est de calculer un profil de commande possédant le même nombre de poussées et dont la consommation se rapproche le plus de la consommation du profil issu de la première étape. En d'autres termes, il s'agit de faire en sorte que les aires sous les courbes de chacune des deux commandes soient égales. En notant $[F_{\text{BVP}}]_i$ le contrôle du $i^{\text{ème}}$ propulseur obtenu en résolvant le problème aux deux bouts de la façon expliquée plus haut, la fonction objectif à minimiser s'écrit alors :

$$\tilde{J}(t_i^j, \Delta t_i^j) = \sum_{i=1}^4 \left| \int_{t_0}^{t_f} [F_{\text{BVP}}(t)]_i dt - 2 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_i^j \right|, \quad (3.46)$$

où P_i est le nombre de poussées du propulseur i , déterminé à l'étape 1.

Le problème à résoudre est donc le suivant :

Problème 3.7. Trouver les instants de milieu de poussée t_i^k et leurs demi-largeurs Δt_i^k , pour $i = 1, \dots, 4$ et $k_i = 1, \dots, P_i$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{t_i^j, \Delta t_i^j} \sum_{i=1}^4 \left| \int_{t_0}^{t_f} [F_{\text{BVP}}(t)]_i dt - 2 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_i^j \right|,$$

satisfaisant :

$$\begin{cases} 2\Delta t_k^i \geq T_l, \\ |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}, \\ t_i^k - \Delta t_i^k \geq t_0 \\ t_i^k + \Delta t_i^k \leq t_f. \end{cases} \quad (3.47)$$

◦

Du fait de la présence des contraintes opérationnelles, ce problème est non linéaire. Il est résolu avec la fonction *fmincon* de Matlab en utilisant un algorithme de point intérieur (voir par exemple la référence [Byrd et al., 2006]).

3.3.4 SCHÉMA D'ÉQUIVALENCE EN EFFET

La deuxième équivalence repose sur l'effet de la commande. Si l'équation différentielle du système est :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t), \quad (3.48)$$

la solution de cette équation peut être exprimée sous la forme :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [D(\tau) + \tilde{B}(\tau)F(\tau)] d\tau, \quad (3.49)$$

où $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition d'état au temps t à partir du temps t_0 , définie de façon implicite comme la solution de l'équation différentielle (voir [Antsaklis, 2003]) :

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_6. \quad (3.50)$$

Pour obtenir une forme analytique de la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$ à l'instant t à partir de l'instant t_0 , il faut résoudre l'équation (3.50). Cela n'est cependant pas trivial lorsque $A(t)$ dépend du temps (système temps variant) et il est nécessaire de recourir à des méthodes purement numériques dans la majorité des cas. Afin de calculer numériquement cette matrice, l'intervalle temporel $[t_0, t_f]$ est découpé en intervalles plus petits sur lesquels la matrice A peut être considérée comme constante. Si la grille temporelle est notée :

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = t_f, \quad (3.51)$$

alors pour $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$,

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(\tau_k)(t-\tau_k)} \prod_{i=0}^{k-1} e^{A(\tau_{k-i-1})(\tau_{k-i}-\tau_{k-i-1})}. \quad (3.52)$$

L'état final $x_{\text{BVP}}(t_f)$ obtenu avec le profil de contrôle F_{BVP} solution de l'étape 1 est donné par :

$$x_{\text{BVP}}(t_f) = \Phi(t_f, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau) F_{\text{BVP}}(\tau) d\tau. \quad (3.53)$$

Si l'on cherche à écrire l'état final $x_{\text{cren}}(t_f)$ obtenu à partir de l'ensemble des instants de milieux de poussée t_k^j et de leur demi-largeur Δt_k^j , il est possible de décomposer l'intégrale du second membre de l'équation (3.53) sur les intervalles avec et sans poussée. Le contrôle étant nul sur les intervalles d'évolution libre, il est possible d'écrire :

$$x_{\text{cren}}(t_f) = \Phi(t_f, t_0)x(t_0) + \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{P_k} \int_{t_k^j - \Delta t_k^j}^{t_k^j + \Delta t_k^j} \Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau) d\tau. \quad (3.54)$$

La grandeur à minimiser est l'écart entre les positions finales $x_{\text{BVP}}(t_f)$ et $x_{\text{cren}}(t_f)$, qu'il est possible d'écrire sous la forme :

$$\|x_{\text{BVP}}(t_f) - x_{\text{cren}}(t_f)\|_2^2. \quad (3.55)$$

En développant cette expression, il est possible d'exprimer la fonction objectif du schéma d'équivalence en effet sous la forme :

$$J(t_k^j, \Delta t_k^j) = \sum_{i=1}^6 \left(\int_{t_0}^{t_f} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau) F_{\text{BVP}}(\tau)]_i d\tau - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{P_k} \int_{t_k^j - \Delta t_k^j}^{t_k^j + \Delta t_k^j} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau)]_i d\tau \right)^2. \quad (3.56)$$

Ainsi le problème d'optimisation concernant le schéma d'équivalence en effet s'écrit :

Problème 3.8. Trouver les instants de milieu de poussée t_i^k et leur demies largeurs Δt_i^k , pour $i = 1, \dots, 4$ et $k_i = 1, \dots, P_i$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{t_k^j, \Delta t_k^j} \sum_{i=1}^6 \left[\int_{t_0}^{t_f} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau) F_{\text{BVP}}(\tau)]_i d\tau - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{P_k} \int_{t_k^j - \Delta t_k^j}^{t_k^j + \Delta t_k^j} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau)]_i d\tau \right]^2,$$

satisfaisant :

$$\begin{cases} 2\Delta t_k^i \geq T_l, \\ |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}, \\ t_i^k - \Delta t_i^k \geq t_0 \\ t_i^k + \Delta t_i^k \leq t_f. \end{cases} \quad (3.57)$$

◦

De la même façon que le pour le problème 3.7, le problème 3.8 est non linéaire et est résolu par un algorithme de point intérieur.

La résolution des problèmes 3.7 et 3.8 permet d'obtenir un profil de commande de type on-off qui satisfait les contraintes opérationnelles.

3.4 ÉTAPE 3 : OPTIMISATION DES INSTANTS DE COMMUTATION

3.4.1 INTRODUCTION

Les trajectoires d'état solutions des problèmes 3.7 et 3.8 sont très sensibles au choix du paramètre de seuil ζ présenté dans la section 3.3.2. En effet, deux valeurs différentes de ce paramètre peuvent non seulement conduire à deux nombres de poussées différents, mais de plus, les problèmes 3.7 et 3.8 étant non convexes, deux valeurs initiales des instants de milieu de poussées et de leur demies largeurs peuvent mener à deux minima locaux différents. Pour certaines valeurs de ζ , la trajectoire obtenue ne respecte plus les contraintes de maintien à poste. Néanmoins, le bénéfice de la deuxième étape réside dans la création d'un profil de contrôle respectant les contraintes opérationnelles. Une troisième étape est donc nécessaire pour garantir le respect des contraintes de maintien à poste tout en minimisant la consommation.

La méthode proposée dans cette partie s'appuie sur l'étude des systèmes à commutation. La référence [Xu and Antsaklis, 2004] propose une technique d'optimisation des instants de commutation entre les différents sous-systèmes d'un système tout en minimisant une fonction coût. Or, le profil de contrôle obtenu à la fin de la deuxième étape est composé d'une alternance d'arcs libres et d'arcs contrôlés par un seul des quatre propulseurs du satellite. Les instants d'allumage et d'extinction de chacun des propulseurs peuvent donc être considérés comme étant les instants de commutation entre cinq sous-systèmes, un par moteur actif et un pour l'absence de moteurs actifs. Le prérequis nécessaire à l'application de cette étape est de disposer d'un profil de contrôle respectant les contraintes opérationnelles et qui est obtenu à l'étape 2.

3.4.2 DESCRIPTION DU SYSTÈME À COMMUTATIONS CONSIDÉRÉ

Les poussées des propulseurs sont supposées être de type on-off. Ainsi, pour le propulseur i , l'intervalle temporel $[t_0, t_f]$ peut être découpé en une union d'intervalles \mathcal{T}_i^a pendant lesquels le propulseur est allumé et une union d'intervalles \mathcal{T}_i^e pendant lesquels le propulseur

i est éteint, avec $\mathcal{T}_i^a \cap \mathcal{T}_i^e = \emptyset$. La dynamique du système peut alors être réécrite sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t) \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathcal{T}_1^a} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathcal{T}_2^a} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathcal{T}_3^a} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbb{1}_{\mathcal{T}_4^a} \end{array} \right) \quad (3.58)$$

La figure 3.3 montre dans le cas de deux propulseurs les différents intervalles d'évolution libre ou contrôlée.

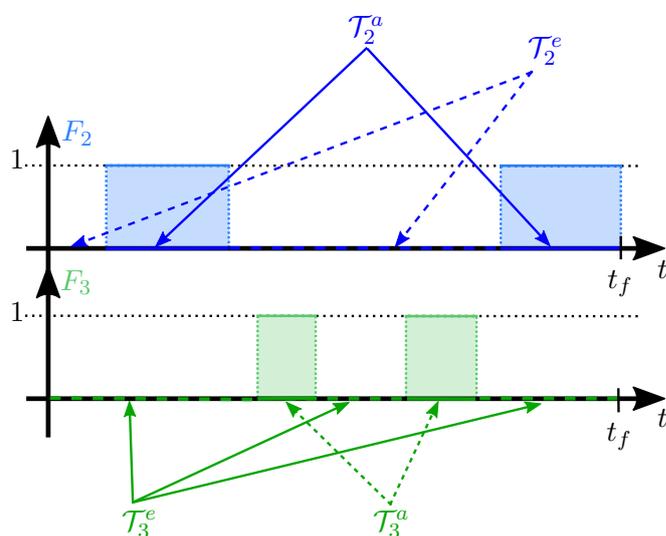


FIGURE 3.3 – Intervalles d'évolution libre et contrôlée pour deux propulseurs.

En considérant les quatre propulseurs, l'intervalle $[t_0, t_f]$ peut être découpé en intervalles deux à deux disjoints $\mathcal{T}_k = [s_k, s_{k+1}]$ sur lesquels le contrôle est constant. Le respect des contraintes opérationnelles étant garanti grâce à la résolution de l'étape 2, il est assuré que, à chaque instant, au plus un seul moteur est actif. Ainsi, l'ensemble des vecteurs de poussées admissibles est donné par :

$$\forall t \in \mathcal{T}_k, F(t) = U_k \in \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V_4} \end{array} \right\}, \quad (3.59)$$

et la dynamique relative de maintien à poste peut être décomposée en la dynamique des cinq sous-systèmes :

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} A(t)x(t) + D(t), & t \in \mathcal{T}_e, \\ A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & t \in \mathcal{T}_1^a, \\ A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & t \in \mathcal{T}_2^a, \\ A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, & t \in \mathcal{T}_3^a, \\ A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, & t \in \mathcal{T}_4^a. \end{cases} \quad (3.60)$$

En notant :

$$f_i(x(t), t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)V_i, \quad i = 0, \dots, 4, \quad (3.61)$$

sur chaque intervalle \mathcal{T}_k , le contrôle est constant et s'écrit :

$$\forall k, \exists i_k \in \{0, \dots, 4\}, \forall t \in \mathcal{T}_k, F(t) = U_k = V_{i_k}. \quad (3.62)$$

Chacune des fonctions de dynamique f_i , $i = 0, \dots, 4$ représente un sous système du système global. Ainsi, la commutation de U_k à U_{k+1} entre les intervalles \mathcal{T}_k et \mathcal{T}_{k+1} en $t = s_{k+1}$ peut être interprétée comme une commutation entre deux des cinq sous-systèmes. Dans le cadre des systèmes à commutations, la dynamique peut s'écrire :

$$\exists i_k \in \{0, \dots, 4\}, \forall t \in \mathcal{T}_k, \dot{x}(t) = f_{i_k}(x(t), t). \quad (3.63)$$

La séquence des poussées est la séquence solution des problèmes 3.7 et 3.8. En rappelant que P est le nombre total de poussées, fixé à l'étape 2, il y a $2P$ commutations et $2P + 1$ intervalles sur lesquels le contrôle est constant. Il est possible d'écrire $t_f = t_{2P+1}$ comme si l'instant final était la dernière commutation.

Puisque le profil solution de l'étape 2 respecte les contraintes opérationnelles, deux arcs de poussée sont séparés par un arc libre. Ainsi, la séquence de contrôle doit avoir une structure dont un exemple est décrit par la figure 3.4. Nous pouvons déduire que :

- les intervalles \mathcal{T}_{2j} , $j = 0, \dots, P$ sont des intervalles libres,
- les intervalles \mathcal{T}_{2j+1} , $j = 0, \dots, P - 1$ sont des intervalles de poussée.

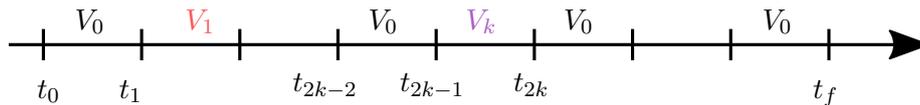


FIGURE 3.4 – Exemple de séquence.

Chacun des vecteurs U_k est connu, autrement dit, pour chaque intervalle k , l'indice i_k de l'équation (3.62) est connu. Les grandeurs à optimiser sont donc les instants de commutation s_k .

3.4.3 OPTIMISATION DES INSTANTS DE COMMUTATION

3.4.3.1 POSITION DU PROBLÈME

En rangeant les instants de milieu de poussées et leur demi-largeur dans l'ordre croissant sous la forme t_1, \dots, t_P et $\Delta t_1, \dots, \Delta t_P$ respectivement, les instants de commutations s_k , correspondant aux instants d'allumage et d'extinction des moteurs, sont donnés par :

$$\begin{cases} s_{2k-1} = t_k - \Delta t_k, \\ s_{2k} = t_k + \Delta t_k, \end{cases}, \quad k = 1, \dots, P. \quad (3.64)$$

La dynamique du système s'écrivant sous la forme de l'équation (3.63), les temps de commutation inconnus sont des paramètres implicites du problème. Afin de rendre ces paramètres explicites, la référence [Xu and Antsaklis, 2004] propose un changement de variables sous la forme :

$$t = s_k + (s_{k+1} - s_k)(s - k) \text{ si } t \in [s_k, s_{k+1}], \quad s \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, P, \quad (3.65)$$

de telle sorte que :

$$t \in [s_k, s_{k+1}] \Leftrightarrow s \in [k, k + 1]. \quad (3.66)$$

Il est alors possible d'écrire la dynamique avec la nouvelle variable temporelle sous la forme :

$$x'(s) = \frac{dx(s)}{ds} = \begin{cases} \left(s_{2k-1} - s_{2k-2} \right) \left[A(t(s))x(s) + D(t(s)) \right] & \text{si } s \in [2k - 2, 2k - 1], \\ \left(s_{2k} - s_{2k-1} \right) \left[A(t(s))x(s) + D(t(s)) + \tilde{B}(t(s))U_k \right] & \text{si } s \in [2k - 1, 2k], \\ \text{pour } k = 1, \dots, P, \\ \left(s_{2P+1} - s_{2P} \right) \left[A(t(s))x(s) + D(t(s)) \right] & \text{si } s \in [2P, 2P + 1] \end{cases} \quad (3.67)$$

A partir de l'expression du problème 1.1 page 41, la fonction objectif est réécrite sous la forme :

$$J(\{s_k\}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_j^i = \sum_{i=1}^P (s_{2i} - s_{2i-1}). \quad (3.68)$$

Avec ce formalisme, les contraintes opérationnelles (i) et (ii) sont automatiquement satisfaites. La contrainte (iii) se réécrit :

$$s_{2k} - s_{2k-1} \geq T_l. \quad (3.69)$$

Les contraintes (iv) et (v) que doivent vérifier les arcs libres sont réécrites :

$$s_{2k+1} - s_{2k} \geq T_g, \quad (3.70)$$

avec $T_g = T_s$ dans le cas d'un arc libre entre les poussées d'un même propulseur et $T_g = T_d$ dans le cas d'un arc libre entre deux poussées produites par deux propulseurs différents.

Le problème de maintien à poste à consommation minimale s'écrit alors de la façon

suivante :

Problème 3.9. Trouver les instants de commutations $\{s_k\}$ solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} & \min_{\{s_k\}} \sum_{i=1}^P (s_{2i} - s_{2i-1}) \\ & \text{satisfaisant :} \\ & \left\{ \begin{array}{ll} x'(s) = \begin{cases} (s_{2k-1} - s_{2k-2}) [A(t(s))x(s) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2k-2, 2k-1], \\ (s_{2k} - s_{2k-1}) [A(t(s))x(s) + D(t(s)) + \tilde{B}(t(s))U_k] & \text{si } s \in [2k-1, 2k], \\ \text{pour } k = 1, \dots, P, \\ (s_{2P+1} - s_{2P}) [A(t(s))x(s) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2P, 2P+1] \end{cases} \\ x(0) = x_0, \\ x(2P+1) \text{ libre ou } x(2P+1) = 0, \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t(s))x(s) \right| \leq \delta, \forall s \in [0, 2P+1], \\ \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t(s))x(s) \right| \leq \delta, \forall s \in [0, 2P+1], \\ s_{2k} - s_{2k-1} \geq T_l, \\ s_{2k+1} - s_{2k} \geq T_g, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.71)$$

avec $T_g = T_s$ dans le cas d'un arc libre entre les poussées d'un même propulseur et $T_g = T_d$ dans le cas d'un arc libre entre deux poussées produites par deux propulseurs différents. ◦

3.4.3.2 RÉOLUTION EN TANT QUE PROBLÈME D'OPTIMISATION DE PARAMÈTRES

Le changement de variable utilisé conduit à étiqueter les instants de commutation afin de faire apparaître les variables explicites d'optimisation. Dans le problèmes 3.9, la séquence de contrôle est connue, mais les instants de commutation $\{s_k\}$ ne le sont pas. Le changement de variable temporelle $s = s(t)$ permet de fixer les commutations en tous les points d'abscisse entière, les $\{s_k\}$ devenant des paramètres du problème. Ainsi, si la séquence des $\{s_k\}$ est donnée, la trajectoire est obtenue à partir de l'intégration de l'équation (3.67). Cette intégration peut être réalisée par un schéma d'intégration numérique classique. La solution $s \mapsto x(s)$ de cette équation différentielle dépend directement des instants de commutation, et peut donc être écrite sous la forme $x = x(s, \{s_k\})$. La fonction de contrôle inconnue a ainsi été remplacée par les paramètres $\{s_k\}$.

En faisant apparaître explicitement la dépendance de la trajectoire par rapport à la séquence des instants de commutation, les problèmes à résoudre s'écrivent :

Problème 3.10. Trouver les instants de commutations $\{s_k\}$ solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned}
& \min_{\{s_k\}} \sum_{i=1}^P (s_{2i} - s_{2i-1}) \\
& \text{satisfaisant :} \\
& \left\{ \begin{array}{l}
s_{2k} - s_{2k-1} \geq T_l, \\
s_{2k+1} - s_{2k} \geq T_g, \\
x'(s, \{s_k\}) = \begin{cases} (s_{2k-1} - s_{2k-2}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2k-2, 2k-1], \\
(s_{2k} - s_{2k-1}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s)) + \tilde{B}(t(s))U_k] & \text{si } s \in [2k-1, 2k], \\
\text{pour } k = 1, \dots, P, \\
(s_{2P+1} - s_{2P}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2P, 2P+1] \end{cases} \\
x(0) = x_0, \\
x(2P+1) \text{ libre ou } x(2P+1) = 0, \\
\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t(s))x(s, \{s_k\}) \right| \leq \delta, \forall s \in [0, 2P+1], \\
\left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t(s))x(s, \{s_k\}) \right| \leq \delta, \forall s \in [0, 2P+1],
\end{array} \right. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

avec $T_g = T_s$ dans le cas d'un arc libre entre les poussées d'un même propulseur et $T_g = T_d$ dans le cas d'un arc libre entre deux poussées produites par deux propulseurs différents. ◦

Ce problème est un problème d'optimisation non linéaire sous les différentes contraintes :

- contraintes inégalités portant explicitement sur les variables à optimiser, correspondant aux contraintes opérationnelles,
- contraintes inégalités ne portant pas explicitement sur les variables à optimiser, correspondant aux contraintes de maintien à poste,
- contrainte égalité portant à la fois explicitement et implicitement sur les variables à optimiser, correspondant à la dynamique du système,
- dans le cas du deuxième problème, contrainte égalité portant implicitement sur les variables à optimiser, correspondant à la contrainte de position finale.

Comme cela est indiqué dans [Culioli, 2012], certaines contraintes inégalités peuvent être approchées au moyen d'une fonction de pénalisation intérieure ou extérieure. Un terme pénalisant la violation des contraintes est alors ajouté à la fonction objectif. La contrainte de maintien à poste est prise en compte par l'ajout à la fonction objectif d'un terme :

$$\int_{t_0}^{t_f} \psi(t, x(t)) dt, \tag{3.73}$$

et de la même façon, la contrainte de position finale peut être prise en compte par l'ajout dans la fonction objectif du terme :

$$x^T(2P+1)Qx(2P+1), \tag{3.74}$$

où Q est une matrice de coefficients à choisir.

Le problème de maintien à poste à position finale libre se réécrit alors en effectuant le changement de variable (3.65) dans l'intégrale de la pénalisation de la contrainte de maintien à poste :

Problème 3.11. Trouver les instants de commutation $\{s_k\}$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{\{s_k\}} \sum_{i=1}^P (s_{2i} - s_{2i-1}) + \mu_3 \sum_{k=1}^{2P+1} (s_k - s_{k-1}) \int_{k-1}^k \psi(t(s), x(s)) ds,$$

satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{2k} - s_{2k-1} \geq T_l, \\ s_{2k+1} - s_{2k} \geq T_g, \\ x'(s, \{s_k\}) = \begin{cases} (s_{2k-1} - s_{2k-2}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2k-2, 2k-1], \\ (s_{2k} - s_{2k-1}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s)) + \tilde{B}(t(s))U_k] & \text{si } s \in [2k-1, 2k], \\ \text{pour } k = 1, \dots, P, \\ (s_{2P+1} - s_{2P}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2P, 2P+1] \end{cases} \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \quad (3.75)$$

avec $T_g = T_s$ dans le cas d'un arc libre entre les poussées d'un même propulseur et $T_g = T_d$ dans le cas d'un arc libre entre deux poussées produites par deux propulseurs différents. ◦

Lorsque la position finale est libre, le problème d'optimisation se réécrit en pénalisant de surcroît l'écart à la position finale :

Problème 3.12. Trouver les instants de commutation $\{s_k\}$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{\{s_k\}} \sum_{i=1}^P (s_{2i} - s_{2i-1}) + \mu_3 \sum_{k=1}^{2P+1} (s_k - s_{k-1}) \int_{k-1}^k \psi(t(s), x(s)) ds + x^T(2P+1)Qx(2P+1),$$

satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{2k} - s_{2k-1} \geq T_l, \\ s_{2k+1} - s_{2k} \geq T_g, \\ x'(s) = \begin{cases} (s_{2k-1} - s_{2k-2}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2k-2, 2k-1], \\ (s_{2k} - s_{2k-1}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s)) + \tilde{B}(t(s))U_k] & \text{si } s \in [2k-1, 2k], \\ \text{pour } k = 1, \dots, P, \\ (s_{2P+1} - s_{2P}) [A(t(s))x(s, \{s_k\}) + D(t(s))] & \text{si } s \in [2P, 2P+1] \end{cases} \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \quad (3.76)$$

avec $T_g = T_s$ dans le cas d'un arc libre entre les poussées d'un même propulseur et $T_g = T_d$ dans le cas d'un arc libre entre deux poussées produites par deux propulseurs différents. ◦

Les problèmes 3.11 et 3.12 peuvent être résolus par des méthodes de point intérieur. A chaque pas de l'algorithme de résolution, la dynamique peut être propagée avec la valeur courante des variables d'optimisation, constituées des instants de commutation, la dérivée

étant approchée par une méthode aux différences finies. Les dérivées de la fonction objectif par rapport aux instants de commutation se calcule en séparant le cas des instants de commutation impairs – instants de début de poussée – des instants de commutation pairs – instants de fin de poussée.

3.4.4 ALGORITHME DE RÉOLUTION

Les trois étapes de la méthode décrite dans cette partie permettent de résoudre le problème de maintien à poste, que l'instant final soit fixe ou libre, selon l'algorithme 1.

Algorithme 1 Résolution du problème de maintien à poste sur $[t_0, t_f]$

Entrées : x_0 la position initiale

Sorties : la trajectoire respecte les contraintes de maintien à poste

{Étape 1 : problème de maintien à poste simplifié}

- 1: Enlever les contraintes opérationnelles (i) - (v) du problème 1.1,
- 2: Résoudre le problème 3.1 ou le problème 3.2,
 $F_i(t)_{i=1,\dots,4,t \in [t_0, t_f]} \leftarrow$ le profil de contrôle optimal pour une trajectoire respectant les contraintes de maintien à poste, mais pas les contraintes opérationnelles, calculé avec une méthode indirecte (problèmes 3.5 ou 3.6) initialisé par une méthode directe (problèmes 3.3 ou 3.4),

{Étape 2 : schémas d'équivalence}

- 3: $\varsigma \leftarrow$ paramètre de seuil permettant de transformer le profil de contrôle continu en un profil de contrôle on-off,
- 4: $\{t_{i,k}, \Delta t_{i,k}\} \leftarrow$ les instants de milieu de poussée $t_{i,k}$ et leur demi-largeur $\Delta t_{i,k}$,
- 5: $\{t_{i,k}^*, \Delta t_{i,k}^*\} \leftarrow$ les instants de milieu de poussée et les demi-largeurs obtenues en résolvant le schéma d'équivalence en consommation (problème 3.7) ou le schéma d'équivalence en effet (problème 3.8),

{Étape 3 : optimisation des instants de commutation}

- 6: $\{s_k\} \leftarrow$ les instants de commutation calculés à partir des $\{t_{i,k}^*, \Delta t_{i,k}^*\}$
 - 7: $\{s_k^{(0)}\} \leftarrow \{s_k\}$
 - 8: $\{s_k^*\} \leftarrow$ solutions des problèmes 3.11 ou 3.12 pour une prise en compte des contraintes au travers de fonctions de pénalisation.
-

3.5 ANALYSE DES SOLUTIONS

La méthode de décomposition en trois étapes présentée dans les sections précédentes est appliquée dans le cadre d'un problème de rendez-vous képlérien simplifié d'une part et au problème de maintien à poste perturbé complet d'autre part. Dans ces deux cas, les contraintes opérationnelles issues de l'utilisation de la propulsion électrique doivent être prises en compte.

3.5.1 APPLICATION DE LA MÉTHODE À TROIS ÉTAPES POUR UN PROBLÈME DE RENDEZ-VOUS SIMPLIFIÉ

Le problème considéré est un problème de rendez-vous d'un satellite chasseur vers un point cible se trouvant sur une orbite géostationnaire. Le mouvement du satellite est décrit en utilisant les positions et vitesses cartésiennes relatives comme cela est décrit dans la section B.1.1.2. Le satellite est supposé être équipé d'un système de propulsion idéal composé d'un propulseur sur chacune de ses faces. Le vecteur de contrôle est alors écrit :

$$U = [u_{+R} \ u_{+T} \ u_{+N} \ u_{-R} \ u_{-T} \ u_{-N}]^T \in [0, U_{\max}]^6, \quad (3.77)$$

avec $U_{\max} = \frac{F_{\max}}{m}$.

Pour une orbite circulaire, la dynamique linéarisée du satellite s'écrit :

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{\text{HCW}}} X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{B_{\text{HCW}}} U(t). \quad (3.78)$$

Le point de départ X_0 considéré est : $X_0 = [5 \ 10 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ (les positions sont exprimées en kilomètres et les vitesses en kilomètres par seconde) et la position cible est $X_f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ pour un intervalle de temps fixé $t_f - t_0 = 1$ jour.

Le problème à résoudre est alors le suivant :

Problème 3.13. Calculer les instants de milieu de poussée t_k^i et leurs demi-largeurs Δt_k^i solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\Delta t_j^i} J &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_j^i \\ &\text{satisfaisant :} \\ &\begin{cases} \dot{X}(t) = A_{\text{HCW}}X(t) + B_{\text{HCW}}U(t), \\ X(t_0) = X_0, \\ X(t_f) = X_f, \\ 2\Delta t_k^j \geq T_l, \\ |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.79)$$

o

3.5.1.1 ÉTAPE 1 : PROBLÈME DE RENDEZ-VOUS SIMPLIFIÉ

Pour la première étape, les contraintes opérationnelles sont retirées du problème 3.13. Nous revenons sur la recherche des profils continus pour chaque propulseur notés : $t \mapsto U_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$. Le problème à résoudre s'écrit alors :

Problème 3.14. Calculer les profils de poussée $t \mapsto U_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$ solutions du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{U_i} J &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{P_i} \int_{t_0}^{t_f} |U_i(t)| dt \\ &\text{satisfaisant :} \\ &\begin{cases} \dot{X}(t) = A_{\text{HCW}} + B_{\text{HCW}}U(t), \\ X(t_0) = X_0, \\ X(t_f) = X_f, \\ U(t) \in [0, U_{\max}]^6 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.80)$$

◊

INITIALISATION DE LA SOLUTION AU MOYEN D'UNE MÉTHODE DIRECTE

Le problème 3.14 est résolu par une méthode indirecte initialisée par une méthode de collocation directe, identique à celle décrite dans la section 3.2.2 page 105 avec la méthode d'intégration de Simpson 1-3 décrite par [Hull, 1997]. Les résidus de la dynamique discrétisée prennent la forme de ceux décrits par l'équation (3.11). Dans le cas du problème de rendez-vous considéré ici, les résidus s'écrivent :

$$\begin{aligned} R_j(X_j, X_{j+1}, U_j, U_{j+1}) &= \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(-3A_{\text{HCW}} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{\text{HCW}}^2 \right) \right] X_{j+1} \\ &\quad - \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(3A_{\text{HCW}} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{\text{HCW}}^2 \right) \right] X_j \\ &\quad + \frac{\Delta\tau}{6} \left[\frac{\Delta\tau}{2} A_{\text{HCW}} x - 3I_6 \right] B_{\text{HCW}} U_{j+1} \\ &\quad - \frac{\Delta\tau}{6} \left[\frac{\Delta\tau}{2} A_{\text{HCW}} + 3I_6 \right] B_{\text{HCW}} U_j, \end{aligned} \quad (3.81)$$

où les vecteurs ont été évalués sur la grille temporelle définie dans la section 3.2.2.

Après avoir discrétisé l'intégrale de la fonction objectif par une méthode de quadrature, il est possible de définir le problème de collocation à résoudre :

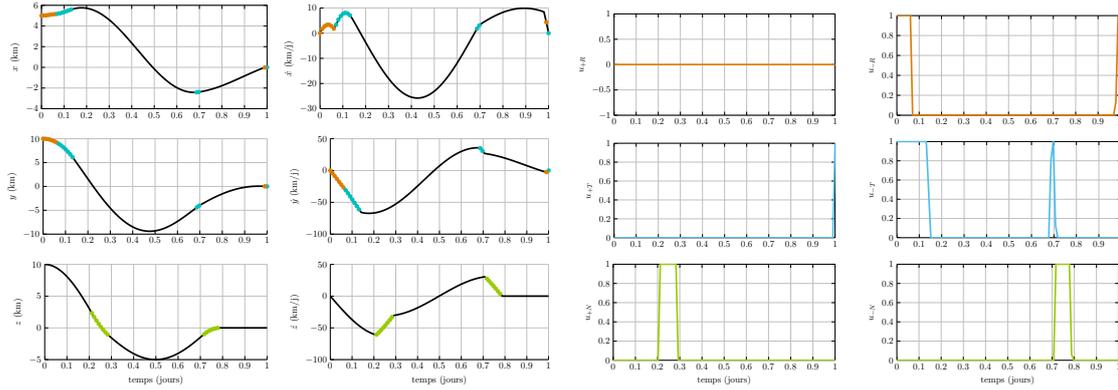
Problème 3.15. Trouver les $\{X_j\}_{j=1, \dots, N}$ et $\{U_{j,i}\}_{j=1, \dots, N, i=1, \dots, 4}$ solutions du problème de minimisation linéaire :

$$\begin{aligned} \min_{U_{j,i}(t)} J &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^N \frac{U_{j,i} + U_{j+1,i}}{2} \Delta\tau \\ &\text{satisfaisant :} \\ &\begin{cases} R_j = 0, \quad \forall j = 0, \dots, N-1, \\ X(t_0) = x_0, \\ X(t_f) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.82)$$

◊

La figure 3.5a montre l'évolution temporelle des positions et vitesses relatives solutions du problème 3.15. Sur les courbes présentées, les positions en lesquelles une poussée a lieu ont été marquées par des étoiles. Comme les poussées hors-plan n'affectent pas le mouvement

dans le plan, ces poussées n'ont été représentées que sur les courbes $z(t)$ et $\dot{z}(t)$. Il est possible de remarquer que ces poussées hors-plan se concentrent au niveau de la traversée de l'équateur. La figure 3.5b présente les profils de contrôle pour chacun des propulseurs. Ce profil conduit à une consommation de 1,954 m/s. Il est possible de remarquer que les contraintes opérationnelles ne sont pas satisfaites puisque les propulseurs U_{-R} et U_{-T} sont activés simultanément en début de rendez-vous et U_{-T} et U_{-N} vers la fin de la mission.



(a) Positions et vitesses relatives par rapport au point de rendez-vous

(b) Profils de contrôle

FIGURE 3.5 – Solutions du problème 3.15 (étape 1). Indication de la position des poussées :
 $*$: poussées des propulseurs selon $\pm\vec{u}_R$, $*$: poussées des propulseurs selon $\pm\vec{u}_T$,
 $*$: poussées des propulseurs selon $\pm\vec{u}_N$.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME SIMPLIFIÉ AVEC LE PRINCIPE DU MAXIMUM

L'application du Principe du Maximum au problème de rendez-vous 3.14 conduit à un contrôle optimal s'exprimant sous la forme :

$$U^*(t) = f_c(\mathbf{1} + B_{\text{HCW}}^T \lambda^*(t)), \quad (3.83)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^6$ est le vecteur adjoint associé au problème de contrôle optimal 3.14. Les conditions nécessaires d'optimalité permettent alors de transformer le problème 3.14 en le problème aux deux bouts suivant :

Problème 3.16. Trouver les fonctions $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto \lambda(t)$ solutions de :

$$\begin{aligned} \dot{X}^*(t) &= A_{\text{HCW}} x^*(t) + B_{\text{HCW}} f_c(\mathbf{1} + B_{\text{HCW}}^T \lambda^*(t)), \quad X(t_0) = X_0, \quad X(t_f) = X_f, \\ \dot{\lambda}^*(t) &= -A_{\text{HCW}}^T \lambda^*(t), \quad \lambda(t_0) \text{ libre}, \quad \lambda(t_f) \text{ libre}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

o

La figure 3.6a montre la trajectoires du vecteur d'état en fonction du temps obtenues par application de la routine *bvp4c* au problème 3.16 avec l'initialisation calculée à l'aide de la solution précédente. Cette trajectoire est similaire à celle obtenue précédemment sur la figure 3.5a. La fonction de commutation présentée sur la figure 3.7 permet d'obtenir le contrôle optimal de la figure 3.6b. Ce profil de contrôle présente lui-aussi des poussées simultanées, qui ne respectent donc pas les contraintes opérationnelles. Il n'est pas de type tout ou rien à

cause de l'approximation de la fonction de commutation par une sigmoïde. C'est pourquoi, la consommation doit être calculée en intégrant le profil de t_0 à t_f , ce qui conduit à une valeur de 1,926 m/s, ce qui est inférieur à la consommation obtenue précédemment.

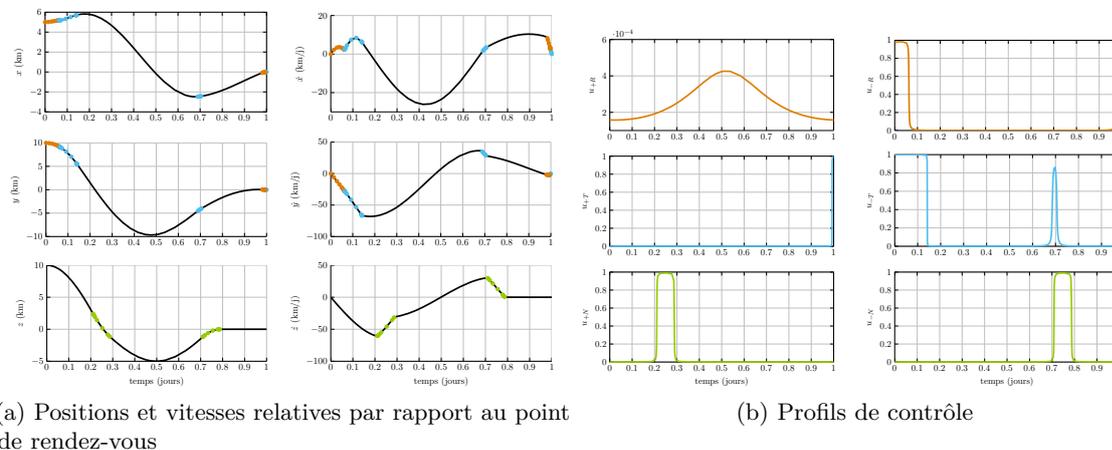


FIGURE 3.6 – Solutions du problème 3.16 (étape 1). Indication de la position des poussées :
 $*$: poussées des propulseurs selon $\pm \vec{u}_R$, $*$: poussées des propulseurs selon $\pm \vec{u}_T$,
 $*$: poussées des propulseurs selon $\pm \vec{u}_N$.

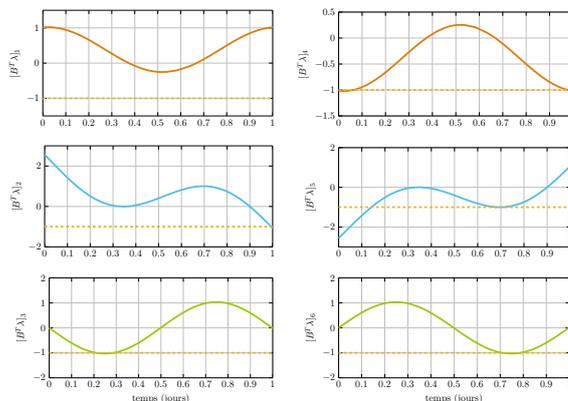


FIGURE 3.7 – Fonctions de commutation issues de la solution du problème 3.16 (étape 1, problème au deux bouts) en fonction du temps.

3.5.1.2 ÉTAPE 2 : SCHÉMAS D'ÉQUIVALENCE POUR LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

Le profil de contrôle optimal résultant de la solution du problème 3.16 ne respecte pas les contraintes opérationnelles. C'est pourquoi, une deuxième étape consistant à forcer la prise en compte de ces contraintes est nécessaire. Les deux schémas d'équivalence en consommation et en effet, présentés dans la section 3.3 page 113 sont appliqués au problème de rendez-vous simplifié considéré.

Pour le schéma d'équivalence en consommation, un profil de contrôle on-off est obtenu à partir du profil continu avec les paramètres de seuil $\varsigma = [0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8]^T$. Dans ce cas-ci, un terme de pénalisation de la distance à la cible au temps final a été ajouté. Le

problème d'équivalence en consommation à résoudre est donc :

Problème 3.17. Trouver les instants de milieu de poussée t_i^k et leurs demi-largeurs Δt_i^k , pour $i = 1, \dots, 4$ et $k_i = 1, \dots, P_i$ solution du problème de minimisation :

$$\min_{t_i^j, \Delta t_i^j} \sum_{i=1}^6 \left| \int_{t_0}^{t_f} [u_{\text{BVP}}(t)]_i dt - 2 \sum_{j=1}^{P_i} \Delta t_i^j \right| + (X(t_f) - X_f)^T Q (X(t_f) - X_f),$$

$$\text{t. q. } \begin{cases} 2\Delta t_k^i \geq T_l, \\ |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}, \\ t_i^k - \Delta t_i^k \geq t_0 \\ t_i^k + \Delta t_i^k \leq t_f, \end{cases} \quad (3.85)$$

où u_{BVP} est le profil de contrôle solution du problème 3.16. ◦

Le profil on-off de contrôle obtenu est présenté sur la figure 3.8. Sur ce profil-ci, les contraintes de disjonction des poussées ont été prises en compte, ce qui conduit à une consommation de 2,320 m/s, ce qui est plus important que la consommation obtenue à la première étape. Notons que pour les courbes de la figure 3.8, les poussées des deux propulseurs radiaux ont été représentés sur le même graphe, de la même façon que les poussées des deux propulseurs tangentiels et normaux. Ceci est possible car les poussées des propulseurs sont disjointes.

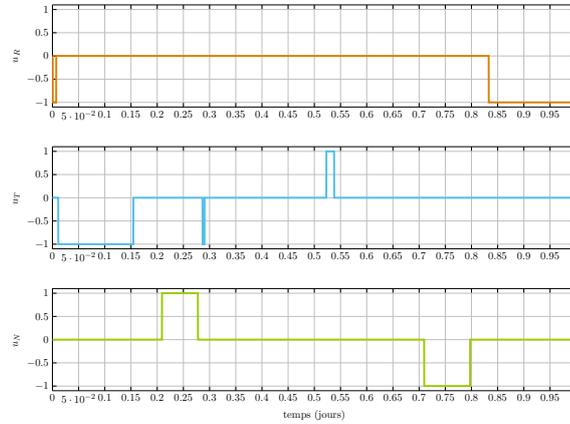


FIGURE 3.8 – Profils de contrôle issus de la solution du problème 3.17 (étape 2, équivalence en consommation) en fonction du temps.

Pour le schéma d'équivalence en effet, un profil de contrôle on-off est obtenu à partir du profil continu avec les paramètres de seuil $\varsigma = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$.

Problème 3.18. Trouver les instants de milieu de poussée t_i^k et leur demi largeur Δt_i^k , pour $i = 1, \dots, 6$ et $k_i = 1, \dots, P_i$ solution du problème de minimisation :

$$\min_{t_k^j, \Delta t_k^j} \mu_2 \sum_{i=1}^6 \left[\int_{t_0}^{t_f} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau) u_{\text{BVP}}(\tau)]_i d\tau - \sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^{P_k} \int_{t_k^j - \Delta t_k^j}^{t_k^j + \Delta t_k^j} [\Phi(t_f, \tau) \tilde{B}(\tau)]_i d\tau \right]^2,$$

$$\text{t. q. } \begin{cases} 2\Delta t_k^i \geq T_l, \\ |t_l^j - t_k^i| - (\Delta t_l^j + \Delta t_k^i) \geq I^{ij}, \\ t_i^k - \Delta t_i^k \geq t_0 \\ t_i^k + \Delta t_i^k \leq t_f. \end{cases} \quad (3.86)$$

○

Le profil on-off de contrôle obtenu est présenté sur la figure 3.9. Les contraintes de disjonction sont dans ce cas-ci aussi respectées, mais la séquence de poussées est différente puisque par rapport au profil de contrôle de l'équivalence en consommation, la cinquième et la sixième poussée sont interverties : dans le cas de l'équivalence en consommation, le propulseur U_{+T} pousse avant le propulseur U_{-N} et dans le cas de l'équivalence en effet, le propulseur U_{-NT} pousse avant le propulseur U_{+T} . Dans ce cas, la consommation est un peu plus élevée et vaut 2,73 m/s.

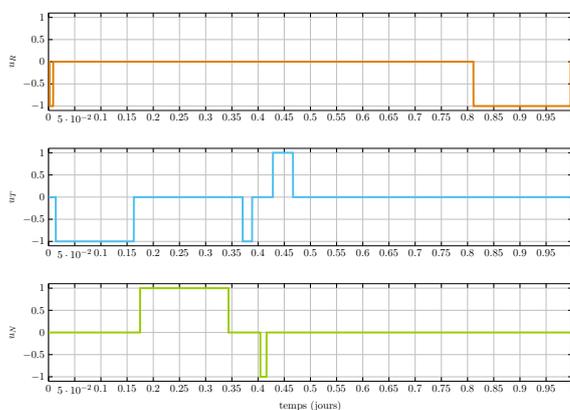


FIGURE 3.9 – Profils de contrôle issus de la solution du problème 3.18 (étape 2, équivalence en effet) en fonction du temps.

3.5.1.3 ÉTAPE 3 : OPTIMISATION DES INSTANTS DE COMMUTATION

La contrainte terminale est explicitement prise en compte au moyen d'un terme de pénalisation de la forme :

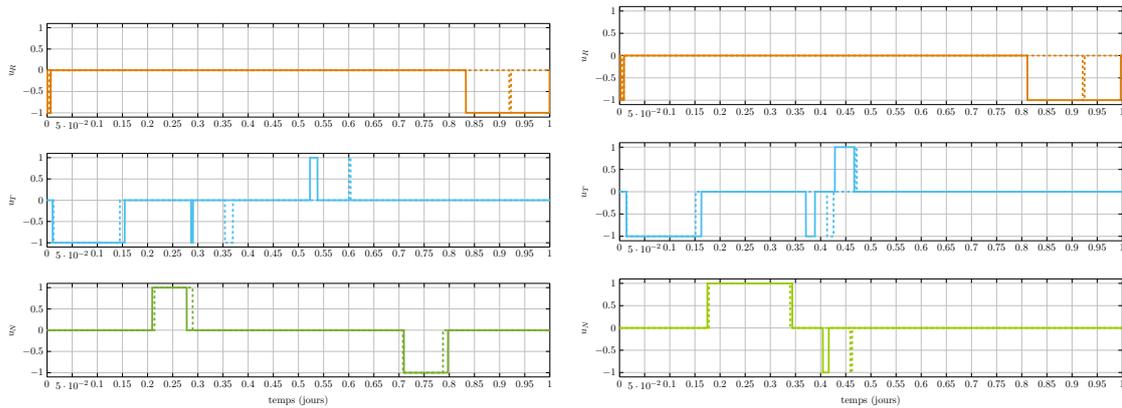
$$X^T(2P + 1)QX(2P + 1) \text{ avec } Q = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_v \end{bmatrix}, \quad (3.87)$$

où les valeurs suivantes ont été choisies pour les paramètres de pénalisation : $\mu_x = 10^2$ et $\mu_v = 10^{-3}$. La grande différence de valeurs entre la pénalisation de la position et de la vitesse vient du fait que la vitesse est exprimée en kilomètres par jours et non en kilomètres par secondes, ce qui introduit un facteur 10^5 dans les valeurs numériques.

La figure 3.10a montre le profil de contrôle obtenu par l'équivalence en consommation ainsi que le profil pour lequel les instants de commutations ont été optimisés avec l'étape 3 de la décomposition. Il apparaît nettement que la taille des créneaux a été réduite, ce qui induit une réduction de la consommation jusqu'à 1,48 m/s, soit une différence relative de 56,8%. Sur la figure 3.11a montrant l'optimisation de la trajectoire dans le plan de l'équateur, il

est possible de voir l'amélioration de la distance à la cible au pris d'une excursion plus importante dans la direction tangentielle.

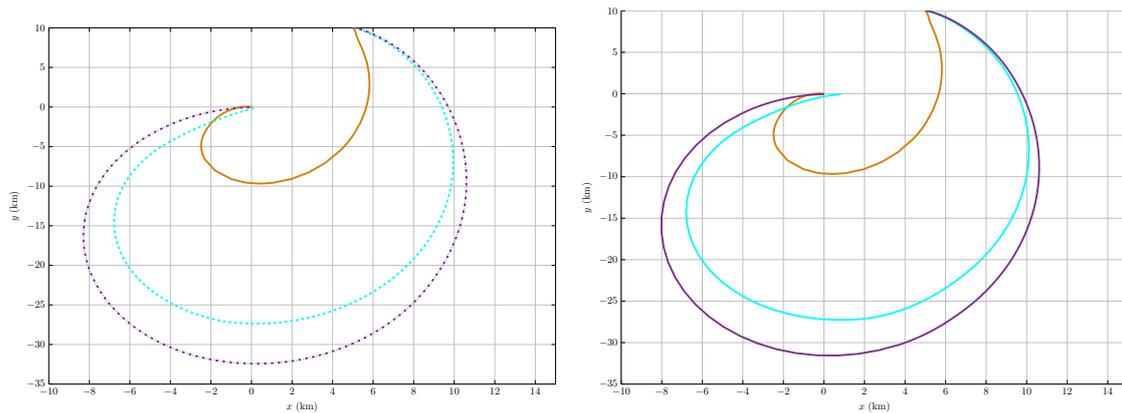
La figure 3.10b montre le profil de contrôle obtenu par l'équivalence en effet ainsi que le profil pour lequel les instants de commutations ont été optimisés avec l'étape 3 de la décomposition. La durée des créneaux est fortement réduite pour aboutir à une consommation de 1,54 m/s. La figure 3.11b montre l'optimisation de la trajectoire dans le plan de l'équateur. Il apparaît nettement que les trois étapes permettent à la trajectoire de se rapprocher de la cible même si l'excursion selon la direction tangentielle à l'orbite du point cible augmente.



(a) Deuxième étape utilisant l'équivalence en consommation (b) Deuxième étape utilisant l'équivalence en effet

FIGURE 3.10 – Profils de contrôle :

— : solution de la deuxième étape, - - : solution de la troisième étape.



(a) Deuxième étape utilisant l'équivalence en consommation (b) Deuxième étape utilisant l'équivalence en effet

FIGURE 3.11 – Trajectoire relative dans le plan de l'orbite :

— : solution du problème aux deux bouts de l'étape 1,
 - - : solution du problème d'équivalence (étape 2),
 ··· : solution du problème issu des systèmes à consommation (étape 3).

Le tableau 3.1 montre le gain en consommation dû aux trois étapes, ainsi que l'évolution

de la position et de la vitesse finale dans le cas de l'équivalence en consommation et en effet, les résultats de ces équivalence servant de donnée initiale pour la troisième étape. Dans chacun des cas, l'optimisation permet d'abaisser la consommation et la distance à la cible. Dans le cas de l'équivalence en effet, les consommations sont plus élevées que dans le cas de l'équivalence en consommation, mais la distance finale à la cible est plus petite.

	Étape 2 problème 3.17	Étape 3	Étape 2 problème 3.18	Étape 3
$\ X(t_f)\ $ (m)	179,2	88,27	836,07	66,41
$\ V(t_f)\ $ (m/s)	$8,44 \cdot 10^{-2}$	$7,80 \cdot 10^{-4}$	$7,26 \cdot 10^{-6}$	0,64
Consommation (m/s)	2,32	1,48	2,73	1,54

TABLE 3.1 – Positions relatives finales $\|X(t_f)\|$, vitesses relatives finales $\|V(t_f)\|$ et consommation pour le problème de rendez-vous optimisé avec la méthode en trois étapes.

3.5.2 APPLICATION DE LA MÉTHODE À TROIS ÉTAPES POUR UN PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE PERTURBÉ

Dans cette partie, le problème considéré est le problème de maintien à poste 1.1 d'un satellite géostationnaire soumis à toutes les perturbations décrites dans la section 1.2.2, page 19. Le satellite, d'une masse de 4850 kg, est équipé du système de propulsion décrit à la section 1.4.2.1, page 34 avec $t_0 = 0$ et $t_f = 7$ jours. Le problème de maintien à poste est résolu par la méthode de décomposition en trois étapes décrite dans cette partie.

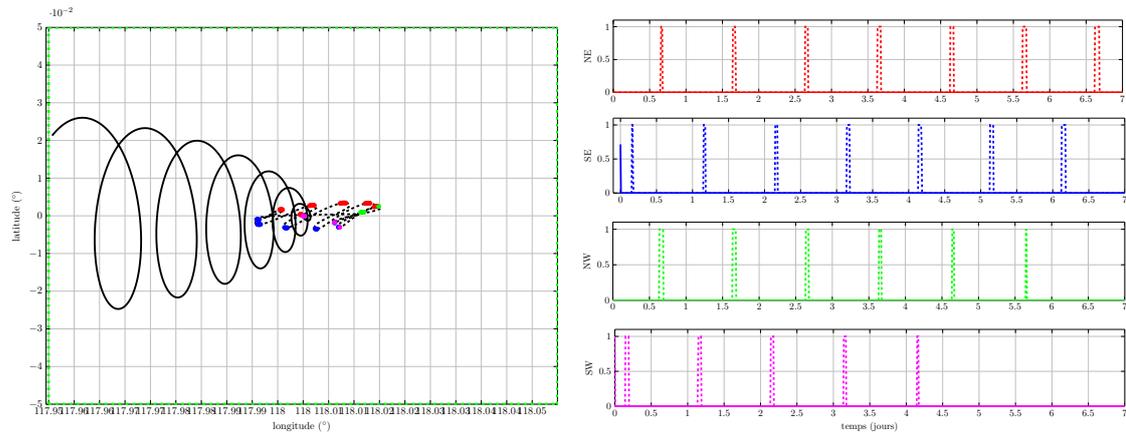
3.5.2.1 ÉTAPE 1 : PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE SANS LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

Les contraintes opérationnelles sont retirées du problème 1.1 si bien que le problème de maintien à poste à résoudre est le problème 3.1 lorsque la position finale est libre ou le problème 3.2 lorsque la position finale est contrainte.

INITIALISATION DE LA SOLUTION AU MOYEN D'UNE MÉTHODE DIRECTE

La méthode directe utilisée pour initialiser les problèmes aux deux bouts 3.5 et 3.6 est une méthode directe de collocation. La discrétisation du vecteur d'état, du vecteur de contrôle et de la dynamique conduit aux problèmes 3.3 et 3.4.

Les trajectoire solutions des problèmes 3.3 et 3.4 sont représentées sur la figure 3.12a dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste. Les profils de contrôle correspondants sont visibles sur la figure 3.12b. Dans le cas où une contrainte sur la position finale est présente, les propulseurs sont actifs en même temps deux à deux tandis que lorsque seules les contraintes de maintien à poste sont présentes, le problème de la disjonction des poussées ne se pose pas puisque le profil n'en compte qu'une seule.



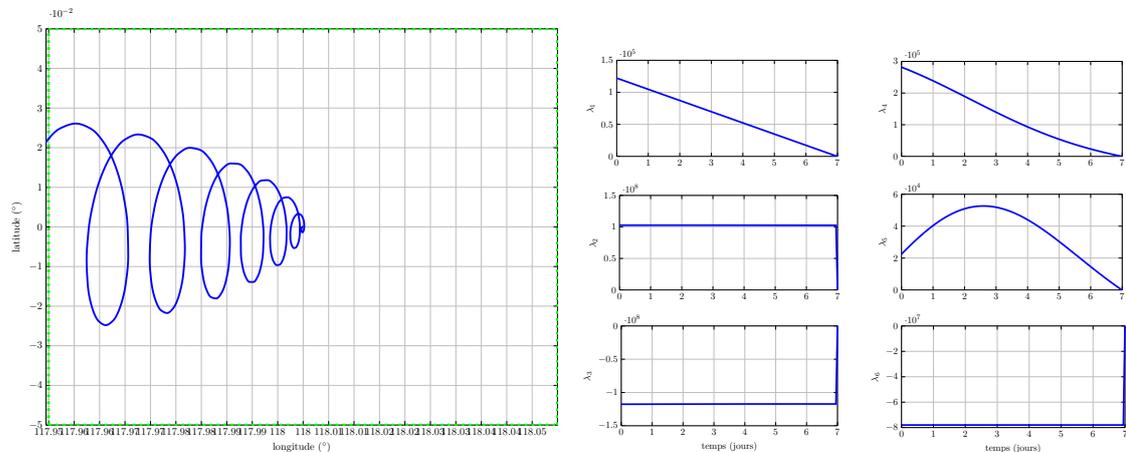
(a) Trajectoires (λ, φ) et fenêtre de maintien à poste

(b) Profils de contrôle

FIGURE 3.12 — solution du problème 3.3, - - solution du problème 3.4.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME SIMPLIFIÉ AVEC LE PRINCIPE DU MAXIMUM

Les trajectoires calculées précédemment permettent d’initialiser les problèmes aux deux bouts 3.5 et 3.6. Comme cela a été annoncé précédemment, la solution d’un problème aux deux bouts est très sensible à son initialisation, à tel point que le problème 3.5 est numériquement difficile à résoudre. Une solution a été obtenue en augmentant progressivement le paramètre de pente M de 10^0 à 10^4 et la constante multiplicative de la fonction de pénalisation μ_1 de 10^8 à 10^{14} . Dans ce cas, la fonction de pénalisation est exprimée avec la latitude et la longitude relative. La figure 3.13a montre la trajectoire dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste et la figure 3.13b le vecteur adjoint en fonction du temps. Les fonctions de commutation conduisant à cette trajectoire sont présentées sur la figure 3.14a et la 3.14b montre les profils continus associés. La discontinuité présente sur la courbe du vecteur adjoint 3.13b se produit lorsque la contrainte de maintien à poste devient active. Le profil de contrôle obtenu n’est pas exploitable dans ce cas.



(a) Trajectoires (λ, φ) et fenêtre de maintien à poste

(b) Vecteur adjoint λ^*

FIGURE 3.13 – Solution du problème 3.5 (1).

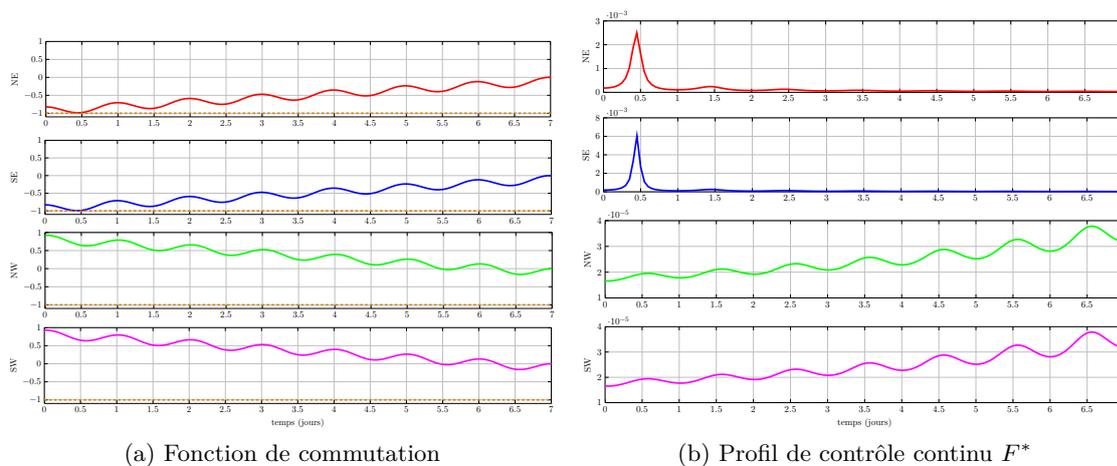


FIGURE 3.14 – Solution du problème 3.5 (2).

Lorsque le problème de contrôle optimal avec position finale libre est résolu avec la fonction de pénalisation exprimée avec les éléments orbitaux relatifs, un profil de contrôle différent est obtenu, voir figure 3.15b avec les fonctions de commutation de la figure 3.15a. La trajectoire résultante est présentée sur la figure 3.16.

Dans le cas du problème 3.6 pour lequel la position finale est contrainte, la trajectoire est indépendante de la valeur de la constante μ_1 . La figure 3.17 montre les positions géographiques en fonction du temps pour $\mu_1 = 10^4$ dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste. La fonction de commutation est représentée sur la figure 3.18a et le profil de contrôle continu associé sur la figure 3.18b.

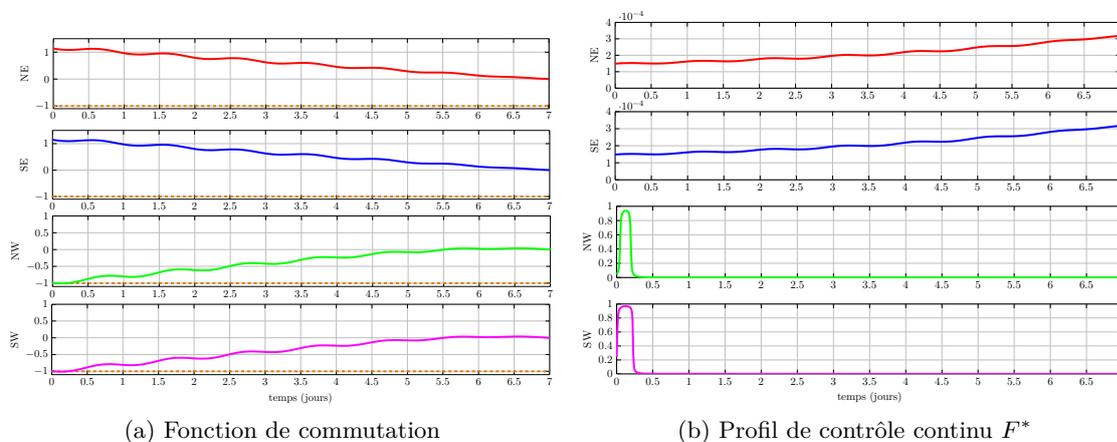


FIGURE 3.15 – Solution du problème 3.5 (fonction de pénalisation exprimée en fonction des éléments orbitaux relatifs).

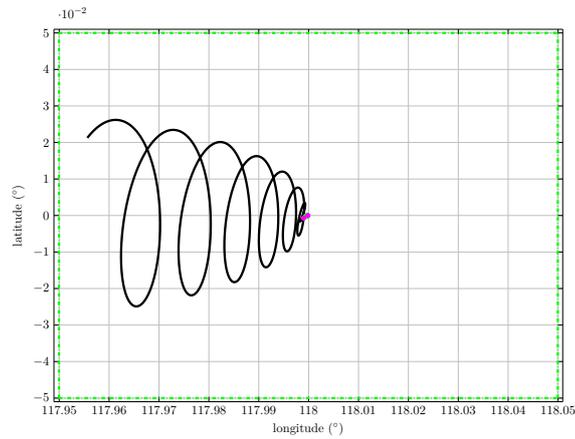


FIGURE 3.16 – Trajectoire (λ^*, φ^*) solution du problème 3.5 et la fenêtre de maintien à poste (fonction de pénalisation exprimée en fonction des éléments orbitaux relatifs).

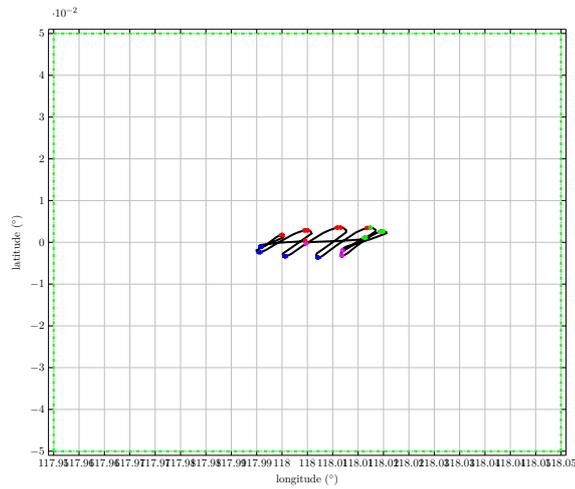


FIGURE 3.17 – Trajectoire solution du problème 3.6 dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste.

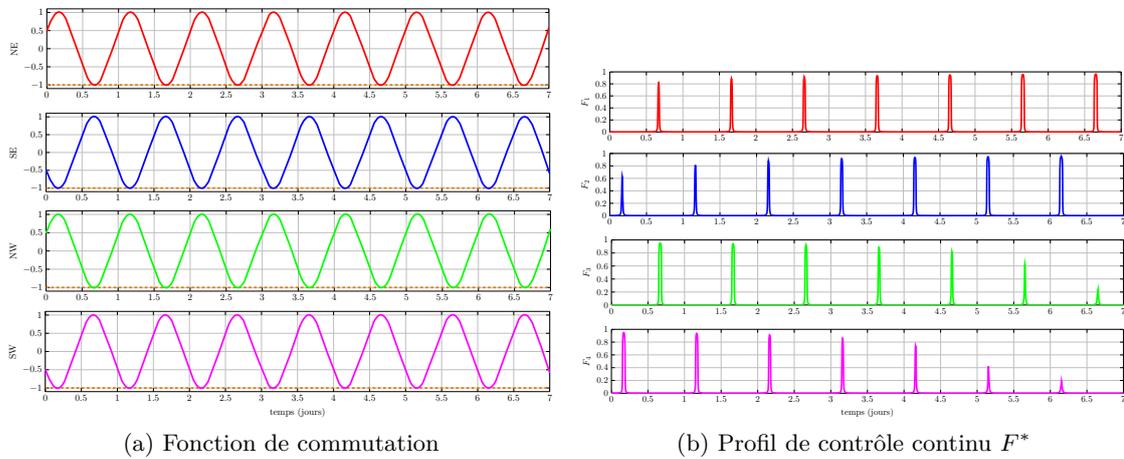


FIGURE 3.18 – Solution du problème 3.6.

Les stratégies de maintien à poste basées sur une analyse physique des perturbations orbitales de la section 1.4 page 29 ont établi que la stratégie optimale de poussée en l'absence des contraintes opérationnelles consiste en des poussées simultanées des propulseurs Nord d'une part et des propulseurs Sud d'autre part. C'est ce qui est retrouvé sur les profils de la figure 3.18b. La stratégie de résolution basée sur des techniques ne reposant pas sur la physique des phénomènes conduit ainsi à des profils de contrôle correspondant aux analyses de la littérature existante sur ce sujet. Pour ce profil continu, la consommation, calculée en intégrant numériquement les fonctions de contrôle, vaut 5,98 m/s.

3.5.2.2 ÉTAPE 2 : SCHÉMAS D'ÉQUIVALENCE POUR LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

L'extraction d'un profil tout ou rien à partir du profil de contrôle continu de la figure 3.18b est réalisée au moyen de paramètres de seuil $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4]$. La figure 3.19 montre que deux valeurs différentes de ζ conduisent à des profils et à un nombre de poussées différents. Ces courbes ont été obtenues avec $\zeta_a = [0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8]$ d'une part et $\zeta_b = [0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]$. La valeur de la constante μ_2 a été choisie égale à 10^{10} .

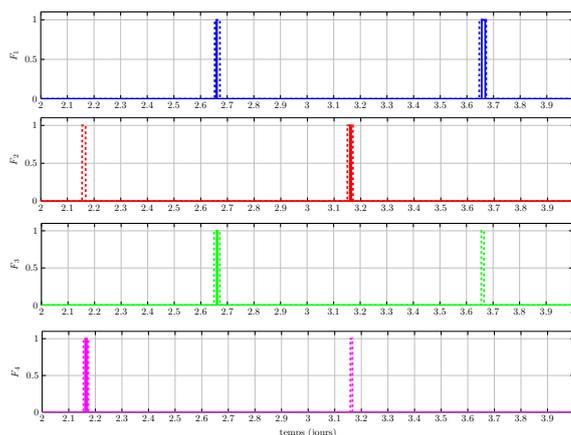


FIGURE 3.19 – Créneaux extraits du profil de contrôle continu de la figure 3.18b (zoom sur l'intervalle $[2, 4]$).

- - : créneaux obtenus avec le paramètre de seuil ζ_a (22 créneaux),
 — : créneaux obtenus avec le paramètre de seuil ζ_b (14 créneaux).

Comme la solution de la première étape de la résolution ne permet pas de garantir le respect des contraintes opérationnelles, une deuxième étape est nécessaire. Les instants de milieu de poussées et leurs demi-largeurs sont très sensibles à la valeur du paramètre ζ choisi, si bien que certaines solutions du problème 3.7 ou 3.8 respectent les contraintes opérationnelles mais ne sont plus confinées dans la fenêtre de maintien à poste.

La figure 3.20 montre la solution du problème 3.7 (équivalence en consommation) avec le paramètre de seuil $\zeta = \zeta_c = [0.89 \ 0.89 \ 0.93 \ 0.93]$ et la solution du problème 3.8 (équivalence en effet) avec le paramètre de seuil $\zeta = \zeta_d = [0.95 \ 0.9 \ 0.95 \ 0.95]$. Dans ce cas, les trajectoires restent à l'intérieur de la fenêtre de maintien à poste. La consommation du profil solution de l'équivalence en consommation est de 3,51 m/set la consommation du profil solution de l'équivalence en effet est de 2,05 m/s.

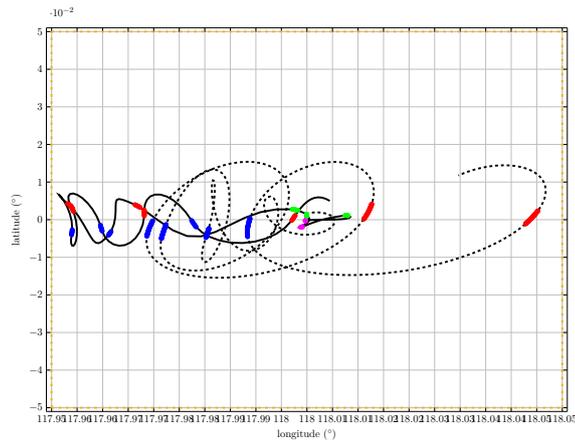


FIGURE 3.20 – Trajectoires dans le plan (φ, λ) .

— : solution du problème 3.7 (équivalence en consommation) avec $\zeta_c = [0.89 \ 0.89 \ 0.93 \ 0.93]$,
 - - : solution du problème 3.8 (équivalence en effet) avec $\zeta_d = [0.95 \ 0.9 \ 0.95 \ 0.95]$.

Pour $\zeta = \zeta_a$, les solutions des deux problèmes 3.7 et 3.8 conduisent à des profils de poussées respectant les contraintes opérationnelles mais aussi à des trajectoires sortant de la fenêtre de maintien à poste, comme les dépeignent la figure 3.21. Bien que les trajectoires ne respectent pas les contraintes de maintien à poste, le but de cette étape de la méthode de résolution est de produire un profil respectant uniquement les contraintes opérationnelles afin initialiser la troisième étape. La consommation du profil issu de l'équivalence en consommation est de 21,45 m/set la consommation du profil issu de l'équivalence en effet est de 22,52 m/s.

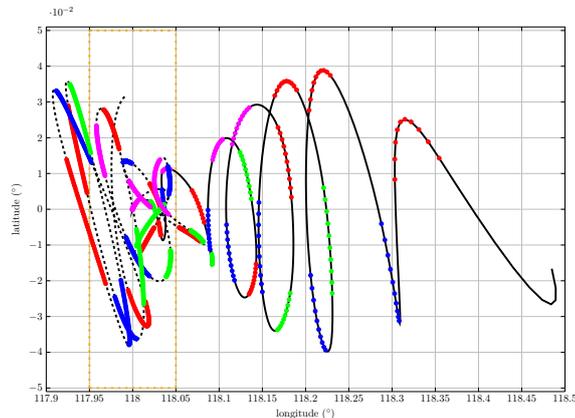


FIGURE 3.21 – Trajectoires dans le plan (φ, λ) .

— : solution du problème 3.7 (équivalence en consommation) avec $\zeta_a = [0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8]$,
 - - : solution du problème 3.8 (équivalence en effet) avec ζ_a .

3.5.2.3 ÉTAPE 3 : OPTIMISATION DES INSTANTS DE COMMUTATION

La troisième étape de la méthode de décomposition optimise les instants de commutation par une méthode s'inscrivant dans le cadre des systèmes à commutation. La séquence de poussées, c'est-à-dire l'ordre d'allumage des propulseurs, obtenue à la fin de la deuxième

étape est supposée être la séquence optimale, dont les instants de commutation restent à optimiser. Même si la trajectoire obtenue à la fin de la deuxième étape ne respecte pas les contraintes de maintien à poste, cette troisième étape permet de s'assurer du respect de ces contraintes.

Pour la première étape, le problème aux deux bouts dans le cas d'un point final libre n'a pu être résolu. Cependant, dans le cadre de la troisième étape, la contrainte sur le point final peut être enlevée. Par ailleurs, comme cela a été fait pour le problème de rendez-vous, il est possible de résoudre un problème pour lequel les contraintes sont prises en compte par une pénalisation dans le vecteur adjoint (problème 3.9) ou un problème pour lequel les contraintes de maintien à poste sont prises en compte par une pénalisation dans la fonction objectif.

La figure 3.22a montre le profil de contrôle calculé avec l'équivalence en consommation pour ζ_c ainsi que le profil de contrôle optimisé avec la troisième étape. Il est possible de remarquer que les deux profils ont le même nombre de poussées pour chaque propulseurs, et que ces dernières sont dans le même ordre dans les deux cas. La figure 3.22b montre la trajectoire qui en découle. La figure 3.23a montre le profil de contrôle calculé avec l'équivalence en effet pour ζ_d ainsi que le profil de contrôle optimisé avec la troisième étape. La figure 3.23b montre la trajectoire qui en découle. Dans ces deux cas, la trajectoire découlant du profil dont les instants de commutation ont été optimisés par la troisième étape sont très similaires entre elles, ce qui laisse supposer qu'un optimum global semble avoir été atteint. Par ailleurs, il est possible de noter que le profil issu de l'équivalence en effet avec le seuil ζ_d ne contient pas de poussées du propulseur Sud-Ouest. Puisque la troisième étape conserve le nombre de poussées par propulseurs, aucune poussée du propulseur Sud-Ouest n'existe dans le profil solution de la troisième étape.

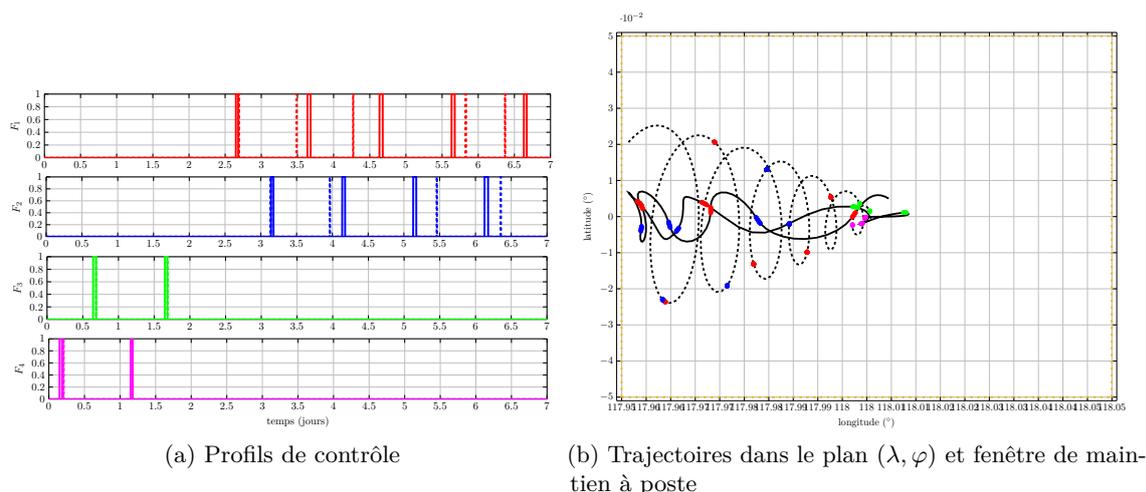


FIGURE 3.22 — : solution du problème 3.7 (équivalence en consommation) avec $\zeta_c = [0.89 \ 0.89 \ 0.93 \ 0.93]$,
 - - : solution du problème 3.11 d'optimisation des instants de commutation pour lequel les contraintes de maintien à poste sont prises en compte au moyen d'une fonction de pénalisation.

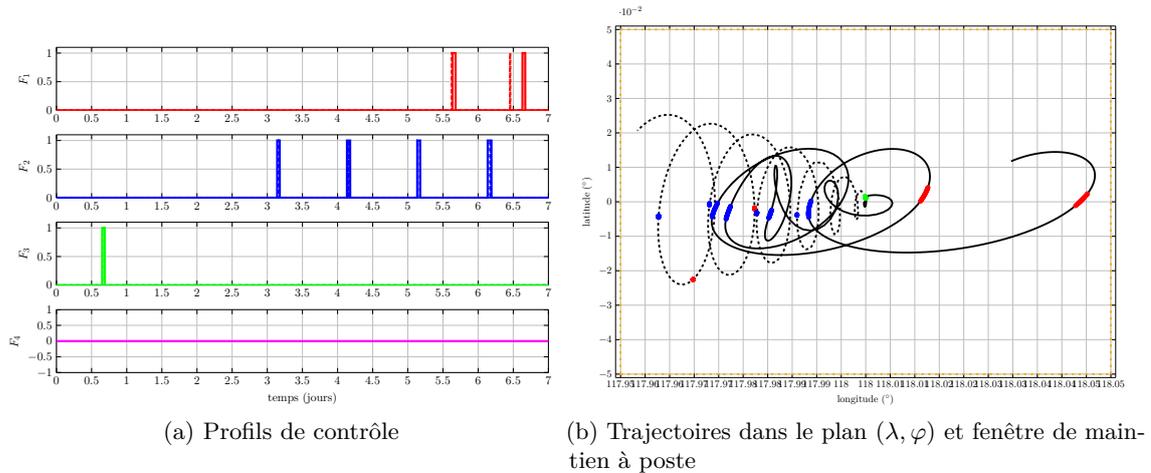


FIGURE 3.23 — — : solution du problème 3.8 (équivalence en effet) avec $\zeta_c = [0.95 \ 0.9 \ 0.95 \ 0.95]$,
 - - : solution du problème 3.11 d’optimisation des instants de commutation pour lequel les contraintes de maintien à poste sont prises en compte au moyen d’une fonction de pénalisation.

Comme cela a été montré dans la partie précédente, il peut arriver que les solutions des problèmes d’équivalence 3.7 et 3.8 conduisent à des trajectoires ne respectant pas les contraintes de maintien à poste. Néanmoins, l’optimisation des instants de commutation par la troisième étape permet d’obtenir des trajectoires respectant celles-ci. Les figures 3.24b et 3.24a montrent respectivement la trajectoire et le profil de contrôle solutions du problème 3.11 initialisé par le paramètre de seuil ζ_a et le schéma d’équivalence en consommation. Les figures 3.25b et 3.25a montrent respectivement la trajectoire et le profil de contrôle solutions du problème 3.11 initialisé par le paramètre de seuil ζ_a et le schéma d’équivalence en effet.

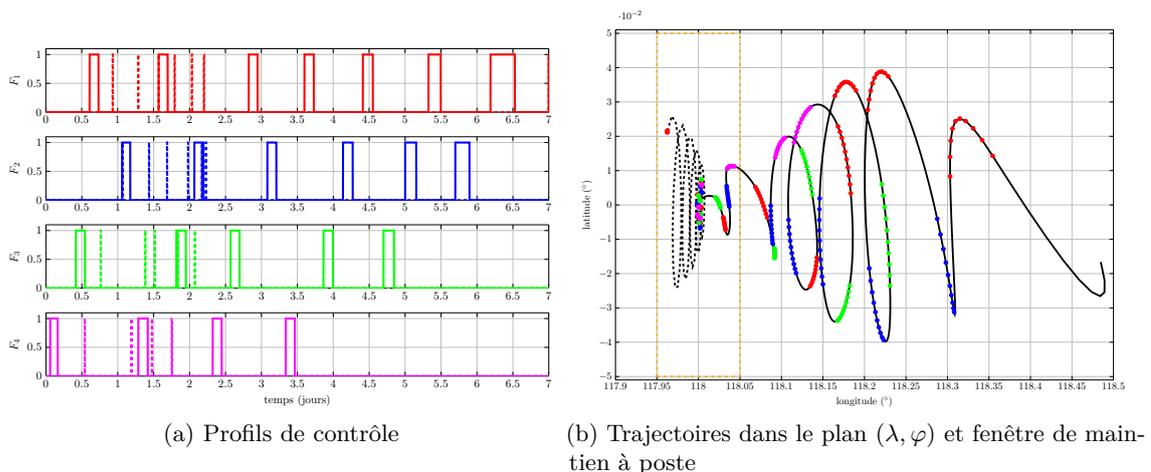


FIGURE 3.24 — — : solution du problème 3.7 (équivalence en effet) avec $\zeta_a = [0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8]$,
 - - : solution du problème 3.11 d’optimisation des instants de commutation pour lequel les contraintes de maintien à poste sont prises en compte au moyen d’une fonction de pénalisation.

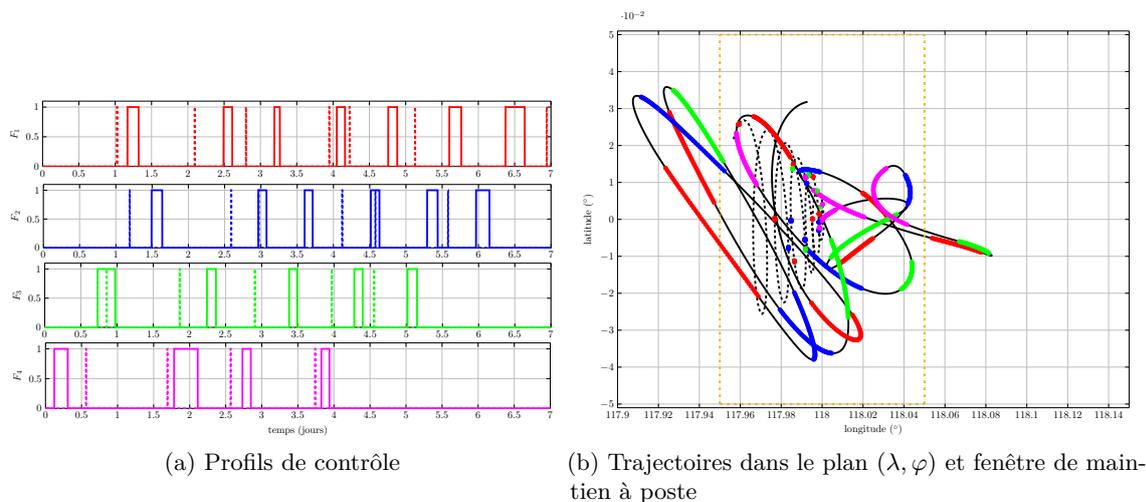


FIGURE 3.25 — : solution du problème 3.8 (équivalence en effet) avec $\varsigma_a = [0.8 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.8]$, - - : solution du problème 3.11 d’optimisation des instants de commutation pour lequel les contraintes de maintien à poste sont prises en compte au moyen d’une fonction de pénalisation.

Une marge a été prise sur la taille de la fenêtre pour prendre en compte le manque de précision dû à une intégration numériques de la dynamique (3.67) et de ses dérivées par rapport aux instants de commutation (H.13) et (H.14).

La Tableau 3.2 regroupe les consommations des profils obtenus à la fin de la deuxième étape avec différents paramètres de seuil et les deux schémas d’équivalence. Dans tous les cas, la troisième étape réussit à baisser la consommation tout en assurant le maintien à poste et le respect des contraintes opérationnelles. La ligne « Consommation minimale » correspond à la consommation d’un profil présentant un nombre de poussées identique à celui considéré, mais ayant pour chacune la durée minimale autorisée T_i . Il apparaît alors que la réduction de la consommation conduit à la réduction de la durée de poussée jusqu’à atteindre la durée minimale autorisée.

3.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, le problème de maintien à poste est résolu par une méthode en trois étapes, basée sur le Principe du Maximum. La première étape consiste à résoudre un problème de maintien à poste par une méthode indirecte sans tenir compte des contraintes opérationnelles. Le profil de contrôle continu solution de cette étape ne respecte pas les contraintes opérationnelles.

Après avoir reconstruit un profil tout ou rien à partir du profil continu solution de la première étape en choisissant des valeurs seuil, le respect des contraintes opérationnelles s’obtient par la résolution de deux schémas d’équivalence conçus à cet effet. Celles-ci sont parfaitement respectées mais la séquence d’activation des propulseurs solution est très sensible à la valeur seuil choisie. Puisque les contraintes de maintien à poste ne sont pas prises en compte explicitement, certains profils peuvent à la fin de la deuxième étape ne pas

Seuil	$\begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \\ \varsigma_4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.89 \\ 0.93 \\ 0.93 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.88 \\ 0.93 \\ 0.93 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.9 \\ 0.95 \\ 0.95 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.95 \\ 0.9 \\ 0.95 \\ 0.95 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.96 \\ 0.95 \\ 0.99 \\ 0.99 \end{bmatrix}$
P		13	14	10	7	22	22	2
Schéma d'équivalence		Conso.	Conso.	Effet	Effet	Conso.	Effet	Conso.
Conso. (m/s) étape 2		3.51	4.41	1.65	2.05	21.45	22.52	0.71
Maintien à poste		oui	oui	oui	oui	non	non	oui
Conso. (m/s) étape 3		0.31	0.33	0.24	0.17	0.52	0.52	0.047
Maintien à poste		oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui
Conso. (m/s) minimale		0.31	0.33	0.24	0.17	0.52	0.52	0.047

TABLE 3.2 – Consommation pour les profils de contrôle calculés à la fin de l'étape 2 et de l'étape 3.

respecter ces dernières contraintes. Les instants de milieu de poussées et leur demi-largeurs doivent alors être optimisés avec une troisième étape.

La troisième étape optimise la valeur des instants d'allumage et d'extinction de chacun des propulseurs, en supposant que le profil de contrôle est tel que deux propulseurs ne poussent pas simultanément. A l'aide d'une technique d'optimisation basée sur la théorie des systèmes à commutation, la consommation pour le maintien à poste est réduite, et les profils de contrôle conduisent à une trajectoire respectant les contraintes de maintien à poste.

La méthode de décomposition en trois étapes est appliquée sur un problème de rendez-vous képlérien avec un point fictif en orbite géostationnaire ainsi que sur le problème de maintien à poste complet pour un horizon temporel court d'une semaine.

Chapitre 4

Optimisation en nombres entiers pour le problème de maintien à poste sur un horizon court

Quand on n'arrêtait pas de changer la façon dont les gens voyaient le monde, on finissait par changer la façon dont on se voyait soi-même.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Sommaire

4.1	Introduction	144
4.2	Transformation du problème continu en problème discret	144
4.2.1	Formalisation binaire des contraintes opérationnelles	145
4.2.1.1	Profil de contrôle binaire	145
4.2.1.2	Transcription des contraintes opérationnelles	146
4.2.1.3	Écriture sous forme matricielle	150
4.2.1.4	Problème de maintien à poste avec les contraintes opérationnelles discrétisées	152
4.2.2	Intégration de la dynamique	153
4.2.2.1	Discrétisation de la matrices de transition	153
4.2.2.2	Schémas d'intégration numérique	157
4.2.2.3	Discrétisation des contraintes de maintien à poste	160
4.2.3	Problèmes d'optimisation en nombres entiers	161
4.3	Solution numérique d'un problème de maintien à poste képlérien	162
4.3.1	Introduction	162
4.3.2	Expression du problème de maintien à poste	163
4.3.2.1	Contraintes opérationnelles	163
4.3.2.2	Contraintes de maintien à poste	164
4.3.3	Solution numérique	166
4.4	Solution numérique du problème de maintien à poste complet	172
4.4.1	Comparaison entre les différentes méthodes d'intégration	172
4.4.2	Comparaison avec la méthode de décomposition en trois étapes	173
4.4.3	Effet des contraintes opérationnelles	175

4.1 INTRODUCTION

Comme cela a été présenté dans le chapitre 1, il existe deux grandes familles de méthodes de résolution des problèmes de contrôle optimal : les méthodes indirectes et les méthodes directes. Le chapitre précédent a décrit la mise en œuvre d’une technique de résolution principalement basée sur les méthodes indirectes même si une étape fait appel à une solution initiale obtenue par une méthode directe. La complexité de la méthode proposée est due à la difficile prise en compte des contraintes opérationnelles dans le cadre du Principe du Maximum, ce qui a requis la résolution de trois étapes successives afin de trouver une solution respectant à la fois les contraintes de maintien à poste et les contraintes opérationnelles.

Dans ce chapitre, le problème de maintien à poste est abordé dans le cadre des méthodes directes. Le caractère tout ou rien de la commande conduit naturellement à une modélisation du profil de poussée de chaque propulseur à l’aide de variables binaires valant 1 lorsque le propulseur est allumé et 0 lorsqu’il est éteint. De plus, la discrétisation de l’intervalle temporel et l’évaluation des fonctions binaires de poussée sur la grille ainsi définie permettent d’exprimer les contraintes opérationnelles – durée minimale de poussée, durée minimale entre deux poussées de deux propulseurs différents ou entre deux poussées du même propulseur – sous la forme de contraintes linéaires sur ces variables binaires.

La résolution d’un problème de contrôle optimal par une méthode directe conduit à la discrétisation des variables d’état et de commande sur une grille temporelle, transformant ainsi le problème de contrôle optimal initial en un problème d’optimisation en dimension finie. Plus la grille est fine, plus le nombre de variables d’optimisation augmente. Un moyen de réduire la taille de l’espace de recherche est d’intégrer la dynamique pour ne garder que les variables de commande comme variables de décision. Cette intégration peut être effectuée d’une part à l’aide de la matrice de transition d’état évaluée numériquement sur les points de la grille de discrétisation ou d’autre part avec des schémas d’intégration numérique de l’équation différentielle de la dynamique.

La transformation en un problème d’optimisation en nombres entiers est appliquée à un problème de maintien à poste autour d’une orbite géostationnaire pour un satellite soumis uniquement à l’accélération centrale et équipé d’un système propulsif idéal – un propulseur dans chacune des directions. Dans un second temps, le problème de maintien à poste prenant en compte les perturbations orbitales pour un satellite équipé du système de propulsion décrit dans la section 1.4.2 est résolu par la méthode décrite dans ce chapitre.

4.2 TRANSFORMATION DU PROBLÈME CONTINU EN PROBLÈME DISCRET

Une approche directe est utilisée pour résoudre le problème de contrôle optimal 1.1. Après avoir défini une grille temporelle, le vecteur de commande est paramétré sur chaque intervalle de la grille par une variable binaire. De cette façon, les contraintes opérationnelles

vont pouvoir s'exprimer sous la forme de contraintes linéaires sur ces variables binaires. Le vecteur d'état est éliminé de l'espace de recherche par intégration de la dynamique soit par l'utilisation de la matrice de transition d'état évaluée numériquement sur la grille temporelle, soit par l'application d'un schéma d'intégration numérique de l'équation différentielle de la dynamique.

4.2.1 FORMALISATION BINAIRE DES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

Pour rappel, les contraintes opérationnelles à satisfaire sont les suivantes :

- (i) la poussée est idéalement soit nulle soit non nulle et constante (il s'agit d'un profil on-off),
- (ii) deux propulseurs ne peuvent pas être actifs simultanément,
- (iii) une poussée doit avoir une durée minimale de $T_l = 5$ minutes,
- (iv) l'intervalle de temps minimal entre deux poussées d'un même propulseur est de $T_d = 20$ minutes,
- (v) l'intervalle de temps entre deux poussées de deux propulseurs différents est de $T_s = 5$ minutes.

4.2.1.1 PROFIL DE CONTRÔLE BINAIRE

La contrainte opérationnelle (i) impose que le profil de poussée de chaque propulseur soit de type tout ou rien. En supposant que cette condition est respectée, le profil de poussée des propulseurs peut être modélisé de la façon suivante :

$$F(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ s_4(t) \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

où $s_l(t) \in \{0, 1\}$, $l = 1, \dots, 4$, $\forall t \in [t_0, t_f]$.

Si l'horizon temporel est découpé en N sous intervalles de longueur $\Delta\tau$, sous la forme :

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = t_f, \quad (4.2)$$

chacune des fonction s_l peut être évaluée en τ pour donner :

$$\forall j = 0, \dots, N, F_j = F(\tau) = \begin{bmatrix} s_1(\tau) \\ s_2(\tau) \\ s_3(\tau) \\ s_4(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_1)_j \\ (s_2)_j \\ (s_3)_j \\ (s_4)_j \end{bmatrix}, \quad \forall \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \quad (4.3)$$

où les $(s_l)_j$, $l = 1, \dots, 4$, $j = 0, \dots, N$ vérifient : $(s_l)_j \in \{0, 1\}$. Ainsi, sur chaque intervalle la valeur du profil de chaque propulseur est une variable binaire, comme cela est illustré sur le schéma de la figure 4.1.

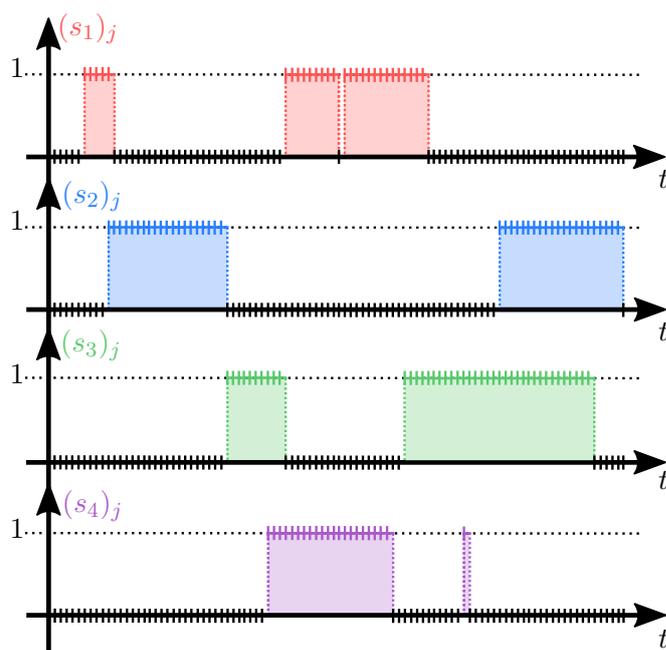


FIGURE 4.1 – Profils binaires pour chacun des 4 propulseurs (contrainte (i)).

Trouver le profil de contrôle permettant la réalisation du maintien à poste revient donc à déterminer la valeurs des $4(N + 1)$ variables binaires $(s_l)_j$. Avec la modélisation des fonctions de poussée proposée, les contraintes opérationnelles restantes (ii) à (v) peuvent être retranscrites en utilisant ces variables binaires.

4.2.1.2 TRANSCRIPTION DES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

CONTRAİNTE DE DISJONCTION DES POUSSÉES

La contrainte de disjonction des poussées (ii) impose que sur chaque intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ le vecteur de contrôle s'exprime sous la forme :

$$\forall j = 0, \dots, N, F_j = \begin{bmatrix} (s_1)_j \\ (s_2)_j \\ (s_3)_j \\ (s_4)_j \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.4)$$

Afin de traduire cette contrainte, il est possible d'introduire une fonction $t \mapsto \gamma(t)$ comptant le nombre de propulseurs actifs à chaque instant :

$$\gamma(t) = \sum_{l=1}^4 s_l(t), \quad (4.5)$$

qui peut être évaluée sur chaque intervalle :

$$\forall j = 0, \dots, N, \gamma(\tau_j) = \gamma_j = (s_1)_j + (s_2)_j + (s_3)_j + (s_4)_j. \quad (4.6)$$

Ainsi, imposer la contrainte (ii) revient à imposer :

$$\forall j = 0, \dots, N, \gamma_j \leq 1. \quad (4.7)$$

CONTRAİNTE DE DURÉE MINIMALE DES POUSSÉES

La contrainte (iii) peut être facilement prise en compte en choisissant la longueur des intervalles $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ de façon adéquate. Ainsi, imposer :

$$\Delta\tau \geq T_l, \quad (4.8)$$

permet d'assurer le respect de la contrainte de durée minimale des poussées.

Cependant, si la durée des intervalles est telle que $\Delta\tau < T_l$, il est nécessaire d'imposer des contraintes sur le nombre minimal d'intervalles sur lesquels un propulseur doit rester actif. Notons $p \in \mathbb{N}^*$, l'entier naturel non nul tel que :

$$(p-1)\Delta\tau < T_l \leq p\Delta\tau. \quad (4.9)$$

Le cas $p = 1$ correspond à $\Delta\tau \geq T_l$ puisqu'un minimum d'un seul intervalle suffit à respecter la contrainte de durée minimale de poussée. Nous supposons donc $p \geq 2$. La contrainte de durée minimale de poussée se traduit de la façon suivante : si sur l'intervalle j aucun propulseur ne pousse et sur l'intervalle $j+1$ un propulseur est actif, alors sur les intervalles allant de $j+2$ à $j+p$, le même propulseur doit rester actif (voir la figure 4.2). Ceci se formalise logiquement par :

$$\forall j = 0, \dots, N-p, (F_j = 0 \ \& \ F_{j+1} \neq 0) \Rightarrow (F_{j+2} = F_{j+1} \ \& \ \dots \ \& \ F_{j+p} = F_{j+1}). \quad (4.10)$$

En utilisant les variables binaires $(s_l)_j$, $l = 1, \dots, 4$, $j = 0, \dots, N$, il vient :

$$\forall k = 2, \dots, p, \forall j = 0, \dots, N-k, \begin{cases} (s_1)_{j+1} - (s_1)_{j+k} - \gamma_j \leq 0, \\ (s_2)_{j+1} - (s_2)_{j+k} - \gamma_j \leq 0, \\ (s_3)_{j+1} - (s_3)_{j+k} - \gamma_j \leq 0, \\ (s_4)_{j+1} - (s_4)_{j+k} - \gamma_j \leq 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

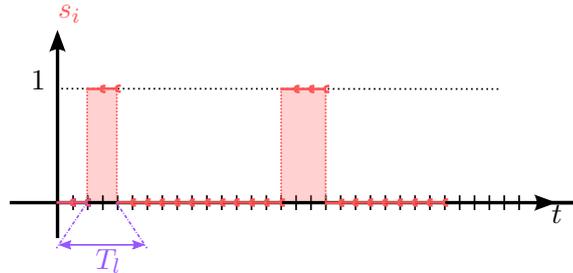


FIGURE 4.2 – Illustration de la contrainte de durée minimale de poussée (contrainte (iii)) dans le cas où $p = 2$.

Cette expression de la contrainte de durée de poussée minimale n'est pas applicable pour le premier intervalle. Il est alors possible d'imposer la valeur de la poussée à 0 pour cet intervalle ou de rajouter la contrainte :

$$F_0 \neq 0 \Rightarrow (F_1 = F_0 \ \& \ \dots \ \& \ F_{p-1} = F_0). \quad (4.12)$$

Cela se traduit en utilisant les variables binaires introduites précédemment :

$$\forall j = 1, \dots, p-1, \begin{cases} (s_1)_0 - (s_1)_j \leq 0, \\ (s_2)_0 - (s_2)_j \leq 0, \\ (s_3)_0 - (s_3)_j \leq 0, \\ (s_4)_0 - (s_4)_j \leq 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

CONSTRAINTES INTERCRÉNEAUX ENTRE DEUX POUSSÉES DU MÊME PROPULSEUR

Selon la contrainte opérationnelle (v), la durée minimale à respecter entre deux poussées du même propulseur est T_s . Soit $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel non nul tel que :

$$(m-1)\Delta\tau < T_s \leq m\Delta\tau. \quad (4.14)$$

Le cas $m = 1$ correspond à $T_s \leq \Delta\tau$ et est automatiquement satisfait. C'est pourquoi dans la suite, m est considéré supérieur à 2. La contrainte (v) signifie que si un propulseur est actif sur l'intervalle j et devient inactif sur l'intervalle $j+1$, alors sur les intervalles allant de $j+2$ à $j+m$ les propulseurs sont inactifs ou un des autres propulseurs est actif (voir la figure 4.3). Ceci se traduit sous forme logique par :

$$\forall j = 0, \dots, N-m, (F_j \neq 0 \ \& \ F_{j+1} = 0) \Rightarrow (F_{j+2} \neq F_j \ \& \ \dots \ \& \ F_{j+m} \neq F_j), \quad (4.15)$$

ce qui se traduit à l'aide des variables binaires par :

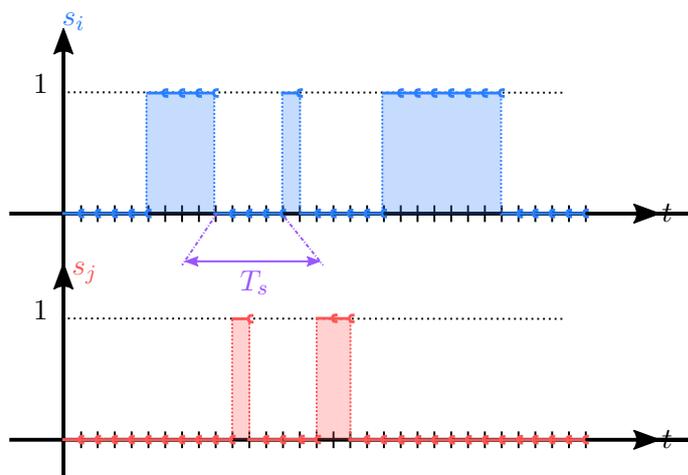


FIGURE 4.3 – Illustration de la contrainte de durée minimale entre deux poussées du même propulseur (contrainte (v)) dans le cas où $m = 4$.

$$\forall k = 2, \dots, m, \forall j = 0, \dots, N - k, \begin{cases} (s_1)_j - (s_1)_{j+1} + (s_1)_{j+k} \leq 1, \\ (s_2)_j - (s_2)_{j+1} + (s_2)_{j+k} \leq 1, \\ (s_3)_j - (s_3)_{j+1} + (s_3)_{j+k} \leq 1, \\ (s_4)_j - (s_4)_{j+1} + (s_4)_{j+k} \leq 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

CONTRAINTES INTERCRÉNEAUX ENTRE DEUX PROPULSEURS DIFFÉRENTS

Selon la contrainte opérationnelle (iv), la durée minimale à respecter entre deux poussées de deux propulseurs différents est T_d . Soit $q \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel non nul tel que :

$$(q - 1)\Delta\tau < T_d \leq q\Delta\tau. \quad (4.17)$$

Si $q = 1$, cette contrainte opérationnelle signifie que si un propulseur est actif sur l'intervalle j , alors sur l'intervalle $j + 1$, soit le même propulseur est actif soit tous sont inactifs. Ceci se traduit de façon logique par :

$$\forall j = 0, \dots, N - 1, F_j \neq 0 \Rightarrow F_{j+1} = \{0, F_i\}, \quad (4.18)$$

ou encore en fonction des variables binaires :

$$\forall j = 0, \dots, N - 1, \begin{cases} (s_1)_j - (s_1)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_2)_j - (s_2)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_3)_j - (s_3)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_4)_j - (s_4)_{j+1} + \gamma_j \leq 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

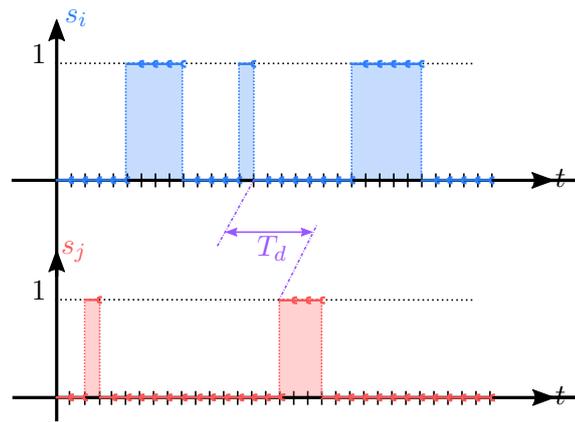


FIGURE 4.4 – Illustration de la contrainte de durée minimale entre deux poussées de deux propulseurs différents (contrainte (iv)) dans le cas où $q = 2$.

Dans le cas où $q \geq 2$, la contrainte opérationnelle (iv) impose de plus de respecter la condition suivante : pour $k = 2, \dots, q$, le propulseur actif sur l'intervalle $j + k$ est identique

au propulseur actif sur l'intervalle $j + k - 1$ ou aucun propulseur n'est actif sur cet intervalle (voir figure 4.4). Cela se traduit de façon logique par : $\forall j = 0, \dots, N - q + 1$,

$$F_j \neq 0 \Rightarrow (F_{j+1} = \{0, F_j\} \ \& \ F_{j+2} = \{0, F_{j+1}\} \ \& \ \dots \ \& \ F_{j+q} = \{0, F_{j+q-1}\}), \quad (4.20)$$

ou encore en fonction des variables binaires :

$$\forall j = 0, \dots, N - 1, \quad \begin{cases} (s_1)_j - (s_1)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_2)_j - (s_2)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_3)_j - (s_3)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \\ (s_4)_j - (s_4)_{j+1} + \gamma_j \leq 1, \end{cases} \quad (4.21a)$$

$$\forall k = 2, \dots, q, \quad \forall j = 0, \dots, N - k + 1, \quad \begin{cases} (s_1)_j - \gamma_{j+k-1} + 2\gamma_{j+k} \leq 2, \\ (s_2)_j - \gamma_{j+k-1} + 2\gamma_{j+k} \leq 2, \\ (s_3)_j - \gamma_{j+k-1} + 2\gamma_{j+k} \leq 2, \\ (s_4)_j - \gamma_{j+k-1} + 2\gamma_{j+k} \leq 2, \end{cases} \quad (4.21b)$$

4.2.1.3 ÉCRITURE SOUS FORME MATRICIELLE

Le vecteur des variables binaires est noté \bar{F} tel que :

$$\bar{F} = [(s_1)_0 \ (s_2)_0 \ (s_3)_0 \ (s_4)_0 \ (s_1)_1 \ (s_2)_1 \ \dots \ (s_3)_N \ (s_4)_N]^T \in \mathbb{R}^{4(N+1) \times 1}, \quad (4.22)$$

et $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$ le vecteur des variables γ_j .

Les contraintes (4.6) se réécrivent de façon matricielle :

$$\Xi_1 \bar{F} - \bar{\gamma} = 0, \quad (4.23)$$

avec :

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{1}_{1 \times 4} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{0}_{1 \times 4} \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{1 \times 4} & \mathbf{1}_{1 \times 4} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 4(N+1)} \quad (4.24)$$

où $\mathbf{1}_{\mu \times \nu} \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}$ est une matrice constituée de 1 sur μ lignes et ν colonnes. L'ajout de la contrainte 4.23 au problème d'optimisation conduit l'algorithme de *branch and bound* utilisé pour résoudre le problème à effectuer des branchements différents que ceux qui sont effectués si le problème d'optimisation est écrit en termes des variables $(s_l)_j$ seulement. La solution est différente, mais des expériences numériques ont montré qu'elles restent proches. Nous avons alors choisi d'utiliser les variables γ_j pour la formulation du problème à résoudre du fait des simplifications d'écriture ainsi introduites.

La contrainte de disjonction des poussées (4.7) s'écrit sous forme matricielle :

$$\bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1}, \quad (4.25)$$

où l'inégalité porte sur chaque composante des vecteurs.

La contrainte de durée minimale de poussée (4.11) s'écrit sous forme matricielle :

$$\forall k = 2, \dots, p, \Xi_{k,F}^l \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{0}_{4(N-k+1) \times 1}, \quad (4.26)$$

avec :

$$\Xi_{k,F}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N-k+1) \times 4(N+1)} \quad (4.27a)$$

$$\Xi_{k,\gamma}^l = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N-k+1) \times (N+1)}, \quad (4.27b)$$

où \mathbf{I}_n désigne la matrice identité de taille $n \times n$, $\mathbf{0}_n$ la matrice nulle de taille $n \times n$, $\mathbf{0}_{n \times 1}$ le vecteur de taille $n \times 1$ rempli de 0 et $\mathbf{2}_n$ le vecteur de taille $n \times 1$ rempli de 2.

La contrainte de durée minimale entre deux poussées du même propulseur s'écrit sous forme matricielle si $m \geq 2$:

$$\forall k = 2, \dots, m, \Xi_{k,F}^s \bar{F} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1}, \quad (4.28)$$

avec :

$$\Xi_{k,F}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \mathbf{0}_4 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N-k+1) \times 4(N+1)}. \quad (4.29)$$

La contrainte de durée minimale entre deux poussées de deux propulseurs différents s'écrit sous forme matricielle :

$$\Xi_{1,F}^d \bar{F} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4N \times 1}, \quad (4.30a)$$

et si $q \geq 2$,

$$\forall k = 2, \dots, q, \Xi_{k,F}^d \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{4(N-k+1) \times 1}, \quad (4.30b)$$

avec :

$$\Xi_{1,F}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 & \mathbf{0}_4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_4 \\ \mathbf{0}_4 & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_4 & \mathbf{I}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times 4(N+1)}, \quad (4.31a)$$

$$\Xi_{1,\gamma}^d = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \vdots \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4N \times (N+1)}, \quad (4.31b)$$

$$\forall k = 2, \dots, q,$$

$$\Xi_{k,F}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{4(N-k+1)} & \mathbf{0}_{4(N-k+1) \times 4k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N-k+1) \times 4(N+1)}, \quad (4.31c)$$

$$\Xi_{k,\gamma}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{2}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{2}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{4 \times 1} & \mathbf{0}_{4 \times 1} & -\mathbf{1}_{4 \times 1} & \mathbf{2}_{4 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4(N-k+1) \times (N+1)} \quad (4.31d)$$

4.2.1.4 PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE AVEC LES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES DISCRÉTISÉES

Avec la paramétrisation des profils de contrôle effectuée au moyen de variables binaires, la fonction objectif à minimiser se réécrit :

$$J = \mathbf{1}_{4(N+1) \times 1}^T \bar{F}. \quad (4.32)$$

Le problème de maintien à poste se réécrit alors :

Problème 4.1. Trouver les variables binaires $(s_l)_j$, $j = 0, \dots, N$, $l = 1, \dots, 4$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{(s_l)_j} J = \mathbf{1}_{4(N+1),1}^T \bar{F}(t),$$

t. q. :

$$\begin{cases}
\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}F, & x(t_0) = x_0, \\
\left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, & \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C(t)x(t) \right| \leq \delta, \\
\Xi_1 \bar{F} + \bar{\gamma} = 0, & \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1}, \\
\forall k = 2, \dots, p, \Xi_{k,F}^l \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } p \geq 2, \\
\Xi_{1,F}^d \bar{F} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4N \times 1}, \\
\forall k = 2, \dots, q, \Xi_{k,F}^d \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } q \geq 2, \\
\forall k = 2, \dots, m, \Xi_{k,F}^s \bar{F} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } m \geq 2.
\end{cases} \quad (4.33)$$

◦

Grâce au paramétrage binaire des variables de contrôle, les contraintes opérationnelles ont pu être modélisées de manière logique puis sous forme de contraintes linéaires. Cependant, le problème obtenu comporte toujours la contrainte dynamique. Afin de transcrire complètement le problème initial de contrôle optimal en un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE), il est nécessaire de substituer à la contraintes différentielle continue une transcription discrète suffisamment fidèle.

4.2.2 INTÉGRATION DE LA DYNAMIQUE

Dans l'optique de résoudre le problème de maintien à poste par une méthode directe de collocation, le vecteur d'état doit aussi être évalué en chacun des points de la discrétisation temporelle. Cependant, comme cela a été présenté dans la section 1.5.2, page 45, il est possible d'intégrer la dynamique du système pour retirer les évaluations du vecteur d'état de l'ensemble des inconnues. Cette partie propose deux méthodes d'intégration possibles de la dynamique. La première consiste en une évaluation numérique de la matrice de transition de l'équation différentielle de la dynamique sur la grille temporelle et la deuxième consiste à utiliser un schéma aux différences finies.

4.2.2.1 DISCRÉTISATION DE LA MATRICES DE TRANSITION

L'intégration de l'équation différentielle de la dynamique relative :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t) + \tilde{B}(t)F(t), \quad (4.34)$$

est effectuée au moyen de la matrice de transition d'état $\Phi(t, t_0)$ définie par exemple par la référence [Antsaklis, 2003] et vérifiant :

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t, t_0) \text{ avec } \Phi(t_0, t_0) = I_6. \quad (4.35)$$

Le vecteur d'état à l'instant t est alors donné par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\tilde{B}(s)F(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)D(s)ds. \quad (4.36)$$

L'horizon temporel $[t_0, t_f]$ est divisé en intervalles définis par la grille donnée par l'équation (4.2). L'expression du vecteur d'état à l'instant t peut alors être transformée de

la façon suivante :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{i=1}^{N_t} \Phi(t, \tau_i) \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) \tilde{B}(s) ds \right) F_i + \left(\int_{\tau_{N_t}}^t \Phi(t, s) \tilde{B}(s) ds \right) F_{N_t} \\ + \sum_{i=1}^{N_t} \Phi(t, \tau_i) \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) D(s) ds + \int_{\tau_{N_t}}^t \Phi(t, s) D(s) ds \quad (4.37)$$

où N_t est l'entier tel que $\tau_{N_t} \leq t < \tau_{N_t+1}$.

Évaluée sur les points τ_j , $j = 1, \dots, N$ de la grille temporelle, l'équation précédente se réécrit :

$$x(\tau_j) = x_j = \Phi(\tau_j, t_0)x(t_0) + \sum_{i=1}^j \Phi(\tau_j, \tau_i) \left[\left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) \tilde{B}(s) ds \right) F_i + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) D(s) ds \right], \quad (4.38)$$

en remarquant que pour $j = 0$, $x(\tau_0) = x(t_0) = x_0$.

Notons :

$$B_i^\Phi = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) \tilde{B}(s) ds, \quad D_i^\Phi = \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) D(s) ds \right), \\ \Phi_{ji} = \Phi(\tau_j, \tau_i), \quad \Phi_{j0} = \Phi(\tau_j, t_0), \quad A_j = A(\tau_j), \\ \tilde{B}_j = \tilde{B}(\tau_j), \quad C_j = C(\tau_j), \quad D_j = D(\tau_j), \quad E_j = E(\tau_j), \quad (4.39)$$

ce qui permet d'écrire :

$$x_j = \Phi_{j0}x_0 + \sum_{i=1}^j \Phi_{ji} \left[B_i^\Phi F_i + D_i^\Phi \right]. \quad (4.40)$$

De la même façon que dans la partie 3.3.4, page 115, la matrice de transition du système temps-variant (4.34) ne peut pas être calculée facilement. Cependant, la matrice A peut être considérée comme constante sur chaque sous-intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ si l'intervalle est suffisamment petit. La matrice de transition d'état est alors le produit des matrices de transition sur chaque sous-intervalle $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, calculées grâce à l'exponentielle de la matrice $A(\tau_j)$ constante sur $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Il vient alors :

$$\forall j = 1, \dots, N, \quad \Phi(\tau_j, t_0) = \prod_{i=0}^{j-1} e^{A_{j-i-1}(\tau_{j-i} - \tau_{j-i-1})}, \quad (4.41)$$

avec pour $j = 0$, $\Phi(\tau_0, t_0) = I_6$.

Il est alors possible de réécrire : $\forall j = 1, \dots, N$,

$$x_j = \left(\prod_{k=0}^{j-1} e^{A_{j-k-1}(\tau_{j-k} - \tau_{j-k-1})} \right) x_0 + \sum_{i=1}^j \left(\prod_{k=0}^{j-i-1} e^{A_{j-k-1}(\tau_{j-k} - \tau_{j-k-1})} \right) \left[B_i^\Phi F_i + D_i^\Phi \right]. \quad (4.42)$$

De la même façon, il est possible de supposer que les matrices $t \mapsto B(t)$ et $t \mapsto D(t)$ sont constantes sur les intervalles $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Ainsi, les intégrales B_i^Φ et D_i^Φ peuvent se réécrire

plus simplement :

$$B^\Phi(\tau_i, s) = \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) ds \right) \tilde{B}_{i-1} = \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A_{i-1}(\tau_i-s)} ds \right) \tilde{B}_{i-1}, \quad (4.43a)$$

$$D^\Phi(\tau_i, s) = \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_i, s) ds \right) D_{i-1} = \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A_{i-1}(\tau_i-s)} ds \right) D_{i-1}, \quad (4.43b)$$

puisque $s \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$. De plus, si les matrices A_i sont supposées inversibles, il vient :

$$B^\Phi(\tau_i, s) = A_{i-1}^{-1} \left(e^{A_{i-1}(\tau_i-\tau_{i-1})} - I_6 \right) \tilde{B}_{i-1}, \quad (4.44a)$$

$$D^\Phi(\tau_i, s) = A_{i-1}^{-1} \left(e^{A_{i-1}(\tau_i-\tau_{i-1})} - I_6 \right) D_{i-1}. \quad (4.44b)$$

Or ces expressions sont valides si les matrices A_i sont inversibles. Une analyse empirique permet d'observer que le déterminant de A s'annule régulièrement (voir la figure 4.5). De plus, même si en dehors des points d'annulation du déterminant, le conditionnement de A est petit, le déterminant est de l'ordre de 10^{-20} . L'inverse de A n'est donc pas calculée numériquement. C'est pourquoi, la matrice $\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{A_{i-1}(\tau_i-s)} ds$ est calculée numériquement à partir de la bibliothèque *chebfun* (voir [Driscoll et al., 2014]). Cette bibliothèque repose sur le fait que des fonctions lisses peuvent être bien représentées par un développement en polynômes de Chebychev.

La position géographique relative est évaluée en chaque point de la grille temporelle selon : $\forall j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} y_j &= y(\tau_j) = C_j x_j, \\ &= C_j \Phi_{j0} x_0 + C_j \sum_{i=1}^j \Phi_{ji} \left[B_i^\Phi F_i + D_i^\Phi \right], \end{aligned} \quad (4.45)$$

puis : $\forall j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau_j) &= \dot{y}_j = E_j x_j + C_j \tilde{B}_j F_j + C_j D_j, \\ &= E_j \Phi_{j0} x_0 + \sum_{i=1}^j E_j \Phi_{ji} \left[B_i^\Phi F_i + D_i^\Phi \right] + C_j \tilde{B}_j F_j + C_j D_j, \end{aligned} \quad (4.46)$$

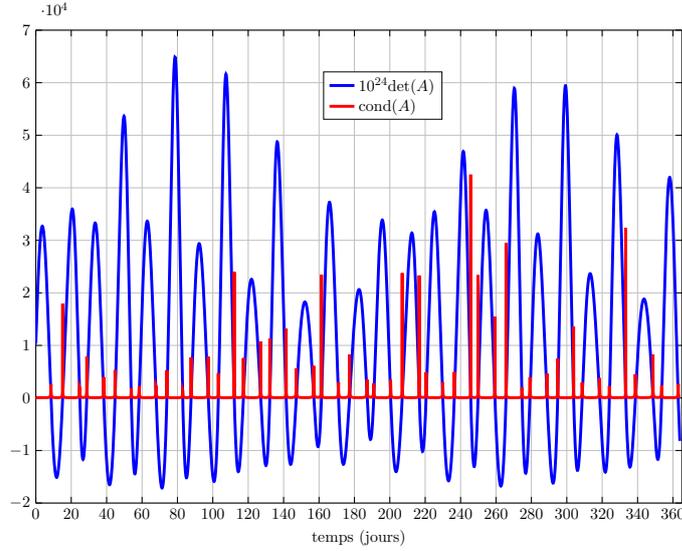


FIGURE 4.5 – — : $10^{24}\det(A(t))$, — : $\text{cond}(A(t))$.

En notant \bar{x} le vecteur composé de l'ensemble des vecteurs d'état évalués en chaque point de la grille temporelle :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \cdots & x_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6N \times 1}, \quad (4.47)$$

\bar{y} le vecteur composé de toutes les positions géographiques relatives :

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1^T & y_2^T & \cdots & y_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N \times 1}, \quad (4.48)$$

$\dot{\bar{y}}$ le vecteur composé de toutes les vitesses géographiques relatives :

$$\dot{\bar{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1^T & \dot{y}_2^T & \cdots & \dot{y}_N^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N \times 1}, \quad (4.49)$$

ainsi que les matrices :

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}B_1^\Phi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{21}B_1^\Phi & \Phi_{22}B_2^\Phi & 0 & \cdots & 0 \\ \Phi_{31}B_1^\Phi & \Phi_{32}B_2^\Phi & \Phi_{33}B_3^\Phi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \Phi_{N1}B_1^\Phi & \Phi_{N2}B_2^\Phi & \Phi_{N3}B_3^\Phi & \cdots & \Phi_{NN}B_N^\Phi \end{bmatrix}, \quad (4.50a)$$

$$\mathfrak{b}_x = \begin{bmatrix} \Phi_{1,0} \\ \Phi_{2,0} \\ \Phi_{3,0} \\ \vdots \\ \Phi_{N,0} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{b}_c = \begin{bmatrix} D_1^\Phi \\ \sum_{i=1}^2 D_i^\Phi \\ \sum_{i=1}^3 D_i^\Phi \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N D_i^\Phi \end{bmatrix}, \quad (4.50b)$$

$$\mathfrak{G} = \begin{bmatrix} C_1\Phi_{11}B_1^\Phi & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_2\Phi_{21}B_1^\Phi & C_2\Phi_{22}B_2^\Phi & 0 & \cdots & 0 \\ C_3\Phi_{31}B_1^\Phi & C_3\Phi_{32}B_2^\Phi & C_3\Phi_{33}B_3^\Phi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ C_N\Phi_{N1}B_1^\Phi & C_N\Phi_{N2}B_2^\Phi & C_N\Phi_{N3}B_3^\Phi & \cdots & C_N\Phi_{NN}B_N^\Phi \end{bmatrix}, \quad (4.50c)$$

$$\mathfrak{g}_x = \begin{bmatrix} C_1\Phi_{1,0} \\ C_2\Phi_{2,0} \\ C_3\Phi_{3,0} \\ \vdots \\ C_N\Phi_{N,0} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}_c = \begin{bmatrix} C_1D_1^\Phi \\ C_2\sum_{i=1}^2 D_i^\Phi \\ C_3\sum_{i=1}^3 D_i^\Phi \\ \vdots \\ C_N\sum_{i=1}^N D_i^\Phi \end{bmatrix}, \quad (4.50d)$$

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} E_1\Phi_{11}B_1^\Phi + C_1\tilde{B}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_2\Phi_{21}B_1^\Phi & E_2\Phi_{22}B_2^\Phi + C_2\tilde{B}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ E_3\Phi_{31}B_1^\Phi & E_3\Phi_{32}B_2^\Phi & E_3\Phi_{33}B_3^\Phi + C_3\tilde{B}_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ E_N\Phi_{N1}B_1^\Phi & E_N\Phi_{N2}B_2^\Phi & E_N\Phi_{N3}B_3^\Phi & \cdots & E_N\Phi_{NN}B_N^\Phi + C_N\tilde{B}_N \end{bmatrix}, \quad (4.50e)$$

$$\mathfrak{e}_x = \begin{bmatrix} E_1\Phi_{1,0} \\ E_2\Phi_{2,0} \\ E_3\Phi_{3,0} \\ \vdots \\ E_N\Phi_{N,0} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{e}_c = \begin{bmatrix} E_1D_1^\Phi + C_1D_1 \\ E_2\sum_{i=1}^2 D_i^\Phi + C_2D_2 \\ E_3\sum_{i=1}^3 D_i^\Phi + C_3D_3 \\ \vdots \\ E_N\sum_{i=1}^N D_i^\Phi + C_ND_N \end{bmatrix}, \quad (4.50f)$$

il est possible d'intégrer l'équation différentielle (4.34) et d'exprimer les positions et vitesses relatives en fonction du contrôle de la façon suivante :

$$\bar{x} = \mathfrak{B}\bar{F} + \mathfrak{b}_x x_0 + \mathfrak{b}_c, \quad (4.51a)$$

$$\bar{y} = \mathfrak{G}\bar{F} + \mathfrak{g}_x x_0 + \mathfrak{g}_c, \quad (4.51b)$$

$$\dot{\bar{y}} = \mathfrak{E}\bar{F} + \mathfrak{e}_x x_0 + \mathfrak{e}_c. \quad (4.51c)$$

L'équation (4.51a) permet d'établir une contrainte reliant le vecteur des inconnues d'état \bar{x} et des inconnues de contrôle \bar{F} .

4.2.2.2 SCHÉMAS D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

L'équation différentielle (4.34) peut être intégrée à l'aide d'un schéma numérique aux différences finies qui donnent une approximation de la dérivée en chaque instant de la grille temporelle. La trajectoire $t \mapsto x(t)$ est ainsi construite de proche en proche. A la différence de la méthode d'intégration présentée dans le paragraphe précédent pour laquelle l'équation différentielle est intégrée formellement puis la solution continue est évaluée de manière

discrète, les schémas aux différences finis présentés dans ce paragraphe permettent de calculer directement une solution approchée, si les schémas numériques choisis sont convergents. Le découpage temporel considéré est celui donné par l'équation (4.2). Le schéma numérique d'intégration de Simpson 1-3 est celui utilisé pour calculer les résidus pour la résolution du problème de contrôle optimal par collocation (voir section 3.2.2, page 105).

Rappelons que ce schéma numérique permet d'écrire : $\forall j = 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \left[I_6 - \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} - \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_{j+1} + A_{j+1} \right) \right] x_{j+1} = & \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_j + A_j \right) \right] x_j \\ & - \frac{\Delta\tau}{6} \left[-\tilde{B}_{j+1} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} \tilde{B}_{j+1} - 2\tilde{B}_{m_j} \right] F_{j+1} + \frac{\Delta\tau}{6} \left[\tilde{B}_j + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} \tilde{B}_j + 2\tilde{B}_{m_j} \right] F_j \\ & - \frac{\Delta\tau}{12} \left[8D_{m_j} - \left(\Delta\tau A_{m_j} - 2I_6 \right) D_{j+1} + \left(\Delta\tau A_{m_j} + 2I_6 \right) D_j \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

La matrice :

$$M_j = \left[I_6 - \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} - \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_{j+1} + A_{j+1} \right) \right], \quad (4.53)$$

doit être inversée afin d'exprimer x_{j+1} en fonction de x_j . La figure 4.6a montre que cette matrice peut être inversée à tout instant. La figure 4.6b montre que le conditionnement de M_j est suffisamment petit pour que les erreurs dues à l'inversion numérique ne soient pas trop grandes.

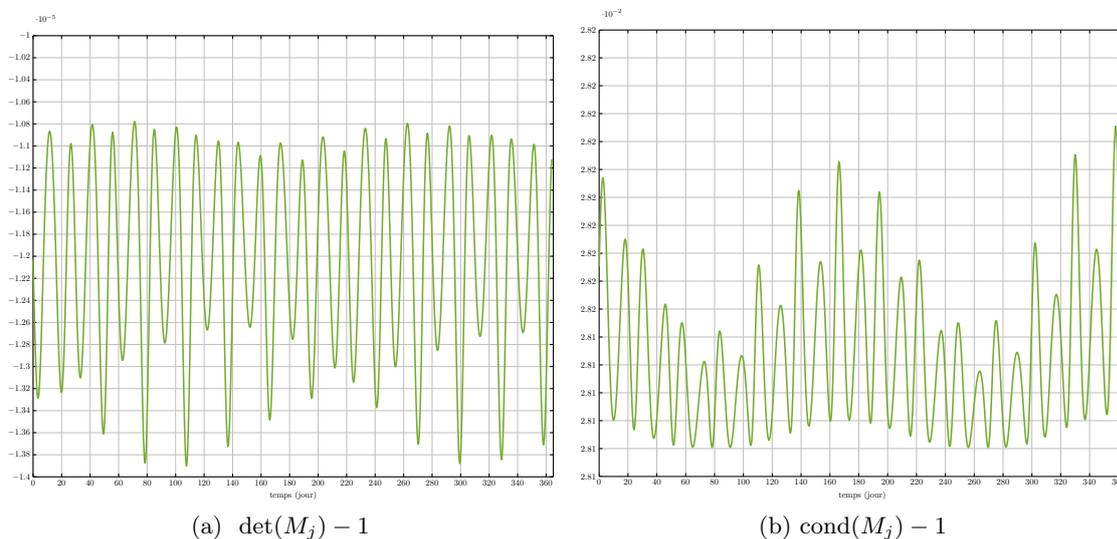


FIGURE 4.6 – Déterminant et conditionnement en fonction du temps.

En notant alors :

$$\begin{aligned} \psi_j^{j+1} &= \left[I_6 - \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} - \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_{j+1} + A_{j+1} \right) \right]^{-1}, \\ \Psi_j^{j+1} &= \left[I_6 - \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} - \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_{j+1} + A_{j+1} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.54a)$$

$$\times \left[I_6 + \frac{\Delta\tau}{6} \left(2A_{m_j} + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} A_j + A_j \right) \right], \quad (4.54b)$$

$$\mathcal{B}_j^+ = \frac{\Delta\tau}{6} \left[\tilde{B}_j - \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_{j-1}} \tilde{B}_j + 2\tilde{B}_{m_{j-1}} \right], \quad (4.54c)$$

$$\mathcal{B}_j^- = \frac{\Delta\tau}{6} \left[\tilde{B}_j + \frac{\Delta\tau}{2} A_{m_j} \tilde{B}_j + 2\tilde{B}_{m_j} \right], \quad (4.54d)$$

$$\mathcal{D}_{j-1}^j = \frac{\Delta\tau}{12} \left[8D_{m_{j-1}} - (\Delta\tau A_{m_{j-1}} - 2I_6) D_j + (\Delta\tau A_{m_{j-1}} + 2I_6) D_{j-1} \right], \quad (4.54e)$$

l'équation différentielle discrétisée se réécrit : pour $j = 1, \dots, N$,

$$x_{j+1} = \Psi_j^{j+1} x_j + \psi_j^{j+1} \left[\mathcal{B}_{j+1}^+ F_{j+1} + \mathcal{B}_j^- F_j + \mathcal{D}_j^{j+1} \right]. \quad (4.55)$$

En notant par ailleurs :

$$\Psi_j^n = \prod_{i=j}^{n-1} \Psi_{n-i+j-1}^{n-i+j}, \quad (4.56)$$

il est possible de réécrire :

$$x_n = \Psi_0^n x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Psi_j^n \mathcal{D}_j^{j+1} + \Psi_0^n \psi_1 \mathcal{B}_0^- F_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\Psi_{j-1}^n \psi_j \mathcal{B}_j^+ + \Psi_j^n \psi_{j+1} \mathcal{B}_j^- \right] F_j + \Psi_{n-1}^n \psi_n \mathcal{B}_n^+ F_n. \quad (4.57)$$

L'équation (4.56) permet d'obtenir la relation suivante :

$$\Psi_j^n = \Psi_{n-1}^n \Psi_j^{n-1}. \quad (4.58)$$

La matrice Ψ_j^n peut alors être interprétée comme la matrice de transition du système discret défini par l'équation (4.55).

Avec l'expression des x_j donnée par l'équation (4.52), l'expression de la position géographique à chaque instant s'écrit : $\forall n = 1, \dots, N$,

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \Psi_0^1 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_0^2 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_1^- & \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ & 0 & \dots & \dots \\ \Psi_0^3 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_1^- & \Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_2^- & \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_3^+ & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \Psi_0^N \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_1^- & \Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^N \psi_3 \mathcal{B}_2^- & \dots & \dots & \dots & \Psi_{N-1}^N \psi_N \mathcal{B}_N^+ \end{bmatrix}, \quad (4.59a)$$

$$\mathfrak{b}_x = \begin{bmatrix} \Psi_0^1 \\ \Psi_0^2 \\ \Psi_0^3 \\ \vdots \\ \Psi_0^N \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{b}_c = \begin{bmatrix} \Psi_0^1 \mathcal{D}_0^1 \\ \sum_{j=0}^1 \Psi_j^2 \mathcal{D}_{j-1}^j \\ \sum_{j=0}^2 \Psi_j^3 \mathcal{D}_{j-1}^j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_j^N \mathcal{D}_{j-1}^j \end{bmatrix}, \quad (4.59b)$$

$$\mathfrak{G} = \begin{bmatrix} C_1 \Psi_0^1 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ & 0 & \dots & \dots & \dots \\ C_2 \left(\Psi_0^2 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & C_2 \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ & 0 & \dots & \dots \\ C_3 \left(\Psi_0^3 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & C_3 \left(\Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_2^- \right) & C_3 \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_3^+ & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ C_N \left(\Psi_0^N \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & C_N \left(\Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^N \psi_3 \mathcal{B}_2^- \right) & \dots & \dots & \dots & C_N \Psi_{N-1}^N \psi_N \mathcal{B}_N^+ \end{bmatrix}, \quad (4.59c)$$

$$\mathfrak{g}_x = \begin{bmatrix} C_1 \Psi_0^1 \\ C_2 \Psi_0^2 \\ C_3 \Psi_0^3 \\ \vdots \\ C_N \Psi_0^N \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}_c = \begin{bmatrix} C_1 \Psi_0^1 \mathcal{D}_0^1 \\ C_2 \sum_{j=0}^1 \Psi_j^2 \mathcal{D}_{j-1}^j \\ C_3 \sum_{j=0}^2 \Psi_j^3 \mathcal{D}_{j-1}^j \\ \vdots \\ C_N \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_j^N \mathcal{D}_{j-1}^j \end{bmatrix}, \quad (4.59d)$$

$$\mathfrak{E} = \begin{bmatrix} E_1 \Psi_0^1 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ & 0 & \dots & \dots & \dots \\ E_2 \left(\Psi_0^2 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & E_2 \Psi_1^2 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ & 0 & \dots & \dots \\ E_3 \left(\Psi_0^3 \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & E_3 \left(\Psi_1^3 \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_2^- \right) & E_3 \Psi_2^3 \psi_3 \mathcal{B}_3^+ & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ E_N \left(\Psi_0^N \psi_1 \mathcal{B}_1^+ + \Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_1^- \right) & E_N \left(\Psi_1^N \psi_2 \mathcal{B}_2^+ + \Psi_2^N \psi_3 \mathcal{B}_2^- \right) & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (4.59e)$$

$$\mathfrak{e}_x = \begin{bmatrix} E_1 \Psi_0^1 \\ E_2 \Psi_0^2 \\ E_3 \Psi_0^3 \\ \vdots \\ E_N \Psi_0^N \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{e}_c = \begin{bmatrix} E_1 \Psi_0^1 \mathcal{D}_0^1 + C_1 D_1 \\ E_2 \sum_{j=0}^1 \Psi_j^2 \mathcal{D}_{j-1}^j + C_2 D_2 \\ E_3 \sum_{j=0}^2 \Psi_j^3 \mathcal{D}_{j-1}^j + C_3 D_3 \\ \vdots \\ E_N \sum_{j=0}^{N-1} \Psi_j^N \mathcal{D}_{j-1}^j + C_N D_N \end{bmatrix}, \quad (4.59f)$$

4.2.2.3 DISCRÉTISATION DES CONTRAINTES DE MAINTIEN À POSTE

Les contraintes de maintien à poste :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y(t) \right| \leq \delta, \\ \left| y(t) \right| \leq \delta, \end{array} \right. \quad (4.60)$$

sont évaluées en chaque point τ_j de la grille temporelle définie par l'équation (4.2), ce qui permet d'écrire :

$$\forall j = 0, \dots, N, \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y_j \right| \leq \delta, \\ \left| y_j \right| \leq \delta, \end{array} \right. \quad (4.61)$$

minimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\bar{F}, \bar{\gamma}} J &= \mathbf{1}_{4(N+1),1}^T \bar{F}, \\ \text{t. q. : } &\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ \Theta_{\text{mp}} \mathfrak{G} \bar{F} \leq \delta_{2N \times 1} - \Theta_{\text{mp}} (\mathfrak{g}_x x_0 + \mathfrak{g}_c), \\ -\Theta_{\text{mp}} \mathfrak{G} \bar{F} \leq \delta_{2N \times 1} + \Theta_{\text{mp}} (\mathfrak{g}_x x_0 + \mathfrak{g}_c), \\ \Xi_1 \bar{F} + \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1}, \\ \forall k = 2, \dots, p, \quad \Xi_{k,F}^l \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{0}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } p \geq 2, \\ \Xi_{1,F}^d \bar{F} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4N \times 1}, \\ \forall k = 2, \dots, q, \quad \Xi_{k,F}^d \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } q \geq 2, \\ \forall k = 2, \dots, m, \quad \Xi_{k,F}^s \bar{F} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } m \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.67)$$

◦

4.3 SOLUTION NUMÉRIQUE D'UN PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE KÉPLÉRIEN

4.3.1 INTRODUCTION

L'objectif de cette section est de valider la méthode de résolution basée sur la transcription du problème de maintien à poste en un problème en nombre entier proposée dans la section précédente sur un problème de maintien à poste simplifié :

- nous considérons qu'aucune force autre que la force d'attraction centrale ne s'applique sur le satellite ; le mouvement peut alors être décrit par les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire, avec un vecteur d'état constitué de la position et de la vitesse cartésiennes relatives à la position de maintien à poste :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.68)$$

- le satellite est supposé être équipé d'un propulseur sur chacune de ses faces et pour lesquels les contraintes opérationnelles rappelées au début du chapitre sont prises en compte. Le vecteur de contrôle est écrit :

$$U = \begin{bmatrix} u_{+R} & u_{+T} & u_{+N} & u_{-R} & u_{-T} & u_{-N} \end{bmatrix}^T \in [0, U_{\max}]^6, \quad (4.69)$$

avec $U_{\max} = \frac{F_{\max}}{m}$, F_{\max} la force maximale que les propulseurs peuvent produire et m la masse du satellite.

Puisque ce dernier est supposé évoluer autour de sa position de maintien à poste sur une orbite géostationnaire, il est possible de modéliser son mouvement grâce au modèle relatif de Hill-Clohessy-Wiltshire présenté dans la section B.1.1.2. Le vecteur d'état est constitué

de la position et de la vitesse cartésiennes relatives à la position de maintien à poste :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) & \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T \quad (4.70)$$

La dynamique est donc écrite sous une forme identique à celle donnée par l'équation (3.78), page 125 :

$$\dot{X}(t) = A_{\text{HCW}}X(t) + B_{\text{HCW}}U(t) \quad (4.71)$$

4.3.2 EXPRESSION DU PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE

4.3.2.1 CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

Puisque le système propulsif considéré dans cette section est soumis aux contraintes opérationnelles rappelées en début de chapitre, nous appliquons la méthode de discrétisation de ces contraintes décrites dans la section 4.2.1, page 145. Cependant, cette discrétisation et les matrices de contraintes qui en découlent ont été écrites pour un vecteur de commande de dimension 4. Pour résoudre le problème décrit ici, il est nécessaire d'adapter les matrices définies dans la sous-section 4.2.1.3 pour un vecteur de commande de dimension 6.

En utilisant la discrétisation de l'horizon temporel de résolution donnée par l'équation (4.2), la fonction $t \mapsto U(t)$ est évaluée en chacun des τ_j . La notation $U_j = U(\tau_j)$, $j = 0, \dots, N$ est adoptée pour la suite. Le profil de commande étant tout ou rien, le vecteur de contrôle en chaque instant peut être réécrit sous la forme :

$$U_j = \begin{bmatrix} (s_1)_j & (s_2)_j & (s_3)_j & (s_4)_j & (s_5)_j & (s_6)_j \end{bmatrix}^T = \left[(s_l)_j \right]_{l=1, \dots, 6}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (4.72)$$

La fonction $t \mapsto \gamma(t)$ définie par l'équation (4.5) est définie ici par :

$$\gamma(t) = \sum_{l=1}^6 s_l(t), \quad (4.73)$$

et peut être évaluée en chaque instant de la grille temporelle : $\forall j = 0, \dots, N$,

$$\gamma(\tau_j) = \gamma_j = (s_1)_j + (s_2)_j + (s_3)_j + (s_4)_j + (s_5)_j + (s_6)_j. \quad (4.74)$$

Le vecteur des inconnues de contrôle est alors écrit :

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} (s_1)_0 & (s_2)_0 & \cdots & (s_6)_0 & (s_1)_1 & (s_2)_1 & \cdots & (s_6)_N \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6(N+1) \times 1}, \quad (4.75)$$

et les inconnues γ_j sont regroupées dans le vecteur $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$. Ainsi, les contraintes

opérationnelles se réécrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi_1 \bar{U} + \bar{\gamma} = 0, \\ \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1}, \\ \forall k = 2, \dots, p, \Xi_{k,U}^l \bar{U} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{0}_{6(N-k-1) \times 1} \text{ si } p \geq 2, \\ \Xi_{1,U}^d \bar{U} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{6N \times 1}, \\ \forall k = 2, \dots, q, \Xi_{k,U}^d \bar{U} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{6(N-k+1) \times 1} \text{ si } q \geq 2, \\ \forall k = 2, \dots, m, \Xi_{k,U}^s \bar{U} \leq \mathbf{1}_{6(N-k+1) \times 1} \text{ si } m \geq 2. \end{array} \right. \quad (4.76)$$

où les matrices $\Xi_1, \Xi_{2,U}, \Xi_{2,\gamma}, \Xi_{3,U}, \Xi_{3,\gamma}, \dots, \Xi_{m,U}, \Xi_{m,\gamma}$ sont définies de façon analogue aux matrices de la section 4.2.1.3 pour une fonction de commande de dimension 6.

4.3.2.2 CONTRAINTES DE MAINTIEN À POSTE

La fenêtre de maintien à poste pour la position cartésienne relative est écrite sous la forme :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \left\{ \begin{array}{l} |y(t)| \leq \delta, \\ |z(t)| \leq \delta, \end{array} \right. \quad (4.77)$$

ou encore :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \left\{ \begin{array}{l} y(t) \leq \delta, \\ -y(t) \leq \delta, \\ z(t) \leq \delta, \\ -z(t) \leq \delta, \end{array} \right. \quad (4.78)$$

puis en faisant intervenir le vecteur d'état :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \left\{ \begin{array}{l} [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] X(t) \leq \delta, \\ -[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] X(t) \leq \delta, \\ [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] X(t) \leq \delta, \\ -[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] X(t) \leq \delta. \end{array} \right. \quad (4.79)$$

Appliquées en chacun des τ_j , ces inégalités deviennent :

$$\forall j = 0, \dots, N, \left\{ \begin{array}{l} [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] X_j \leq \delta, \\ -[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] X_j \leq \delta, \\ [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] X_j \leq \delta, \\ -[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] X_j \leq \delta. \end{array} \right. \quad (4.80)$$

4.3.3 SOLUTION NUMÉRIQUE

Le problème 4.3 est résolu pour un satellite de masse $m = 4850$ kg, équipé de propulseurs électriques de poussée 265 mN chacun. Seule la force d'attraction centrale est considérée ici, et le mouvement du satellite est représenté par sa position et sa vitesse cartésiennes relatives à la position de maintien à poste sur une orbite géostationnaire. Ce problème est résolu avec Gurobi[®] (voir [Gu et al., 2010]) utilisé via l'interface Yalmip[®] pour Matlab[®] (voir [Löfberg, 2004]) pour $t_0 = 0$ et $t_f = 7$ jours sur le modèle de maintien à poste simplifié. La valeur de δ est de 36,8 km. Cette valeur correspond à une fenêtre de maintien à poste de demi largeur $0,05^\circ$ en latitude et longitude. Pour les contraintes opérationnelles, les entiers p , m et q définis dans la section 4.2.1 sont choisis tels que : $p = 1$, $m = 4$ et $q = 1$.

D'après [Alfriend et al., 2009] et comme cela peut se voir sur l'équation (I.4), la matrice de transition d'état montre la présence d'un terme de dérive, linéaire en temps, de coefficient :

$$3n \left(2x(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{n} \right). \quad (4.85)$$

Ce terme se traduit par une dérive de la trajectoire dans le plan (x, y) dans la direction de y .

Ainsi, choisir un point initial à l'intérieur de la fenêtre de maintien à poste qui annule le terme de dérive, de vitesses radiales et normales nulles, c'est-à-dire un point initial respectant les conditions :

$$\begin{cases} |y(t_0)| \leq \delta, \\ |z(t_0)| \leq \delta, \\ 2x(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{n} = 0, \\ \dot{x}(t_0) = 0, \\ \dot{z}(t_0) = 0, \end{cases} \quad (4.86)$$

est suffisant pour assurer que la trajectoire reste dans la fenêtre. La figure 4.7a montre la trajectoire dans le plan (y, z) pour le point initial :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ -20 \\ 0 \\ -10n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

les positions étant données en km et les vitesses en km/j. Aucun propulseur n'est activé pendant l'horizon temporel de résolution et la trajectoire est périodique, ce qui signifie que le maintien à poste est automatiquement assuré. La figure 4.7b montre clairement l'absence de dérive dans le plan (x, y) .

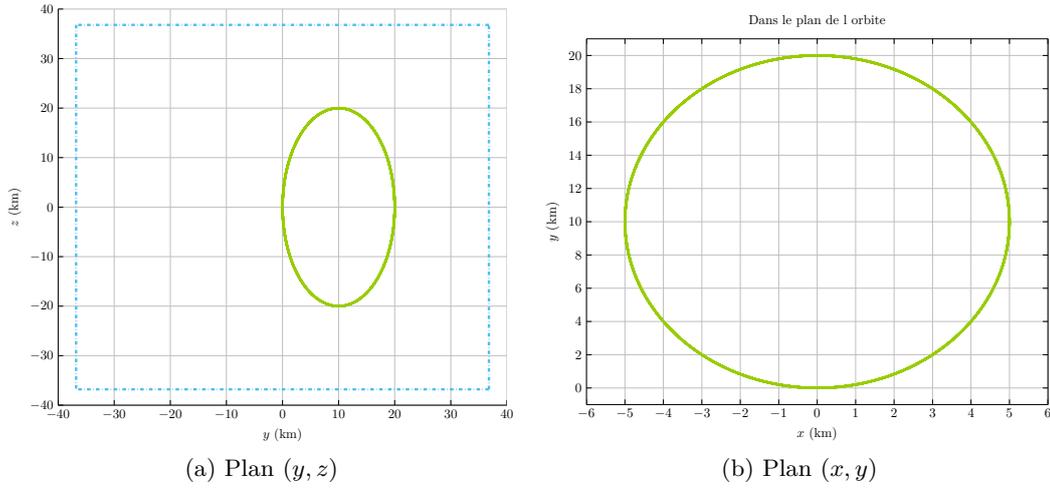


FIGURE 4.7 – Trajectoires pour $X_0 = [5 \ 10 \ -20 \ 0 \ -10n \ 0]^T$.

Pour un point initial $X_0 = [5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, la condition d'annulation de la dérive n'est pas respectée. La figure 4.8a montre que dans ce cas, les propulseurs tendent à annuler cette dérive dès le début de l'intervalle de résolution par une poussée uniquement tangentielle. Sa valeur initiale est de 10 km et une poussée tangentielle l'amène à $-0,12$ km. La dérive n'est pas exactement égale à 0 à cause du caractère fini de l'intervalle temporel de résolution. La figure 4.8b, sur laquelle est tracée l'évolution de y en fonction du temps, montre en effet que la dérive n'est pas nulle, mais de valeur suffisamment faible pour que la trajectoire de y ne sorte pas de la fenêtre de maintien à poste sur $[t_0, t_f]$.

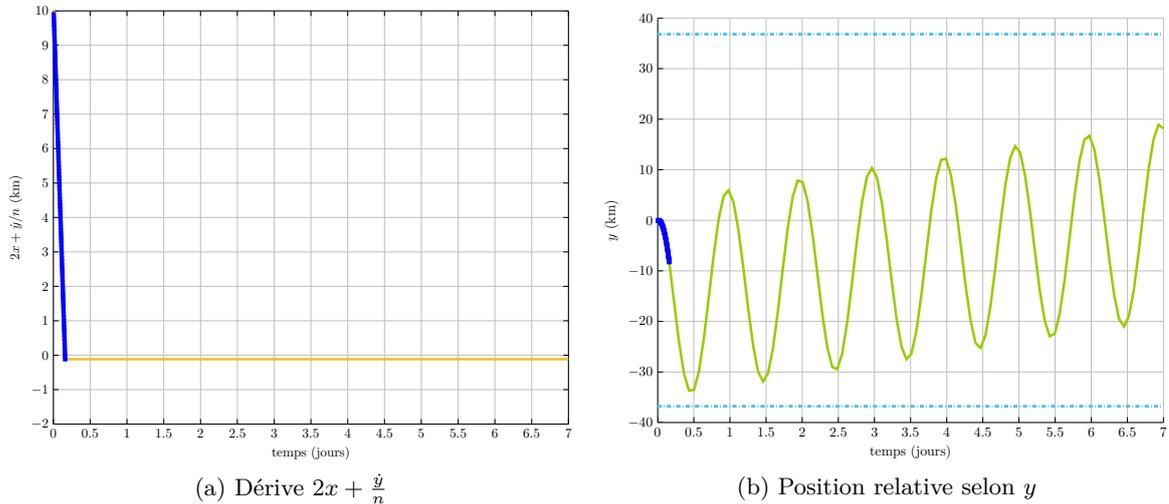


FIGURE 4.8 – Évolution de $2x + \frac{y}{n}$ et de y pour $X_0 = [5 \ 0 \ -0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Dans le cas où le point initial est donné par $X_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, le tableau 4.1 montre l'évolution de la consommation et de la valeur de la dérive en fonction de la durée de l'intervalle de résolution. Lorsque la durée de l'intervalle augmente, la valeur de la dérive se rapproche de 0 et la consommation augmente légèrement. Il semble donc plus intéressant d'avoir un horizon temporel le plus grand possible afin de faire tendre la dérive vers 0, même

si cela induit une petite augmentation de la consommation. La figure 4.9 affiche la valeur de la dérive en fonction du temps dans les cas où $t_f - t_0 = 1, 3$ et 5 jours. Il est possible de voir que plus l'horizon est grand, plus la dérive est petite et dans tous les cas, la poussée tangentielle corrigeant cette dérive a lieu au début de l'horizon de résolution.

$t_f - t_0$	Consommation (m/s)	$\left(2x + \frac{\dot{y}}{n}\right)(t_f)$ (km)
1 jour	0,0164	1,7752
2 jours	0,0819	0,8760
3 jours	0,0984	0,6513
4 jours	0,115	0,4265
5 jours	0,131	0,2017
6 jours	0,131	0,2017
7 jours	0,131	0,2017
8 jours	0,131	0,2017

TABLE 4.1 – Consommation et valeur finale de la dérive pour une optimisation avec $X_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ pour une durée variable.

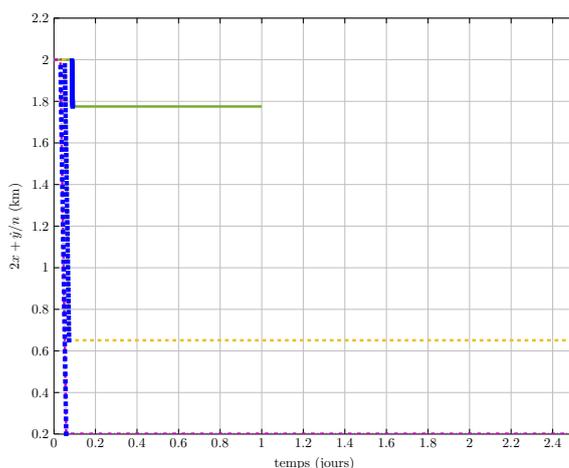


FIGURE 4.9 – Dérive $2x + \frac{\dot{y}}{n}$ (km) en fonction du temps avec les arcs de poussée tangentielle dans le cas où $X_0 = [1 \ 0 \ -0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$,
— $t_f - t_0 = 1$ jour, - - $t_f - t_0 = 3$ jours, - · - $t_f - t_0 = 5$ jours.

Lorsque l'écart à la position de repos en $t = t_0$ est trop grande, il est possible que le solveur ne trouve pas de solutions réalisable pour garantir le maintien à poste sur la durée de l'intervalle de résolution, et l'ensemble solution est vide. Un moyen de pallier ce problème est de relaxer les contraintes de maintien à poste sur l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec $t_0 \leq t_1 \leq t_f$, le solveur réussit à trouver une solution réalisable au problème de maintien à poste. Dans le cas où $X_0 = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ avec un intervalle d'optimisation $t_f - t_0 = 7$ jours, le problème de maintien à poste 4.3 n'est pas réalisable si les contraintes de maintien à poste sont définies sur $[t_0, t_f]$. Cependant, en autorisant le non respect des contraintes de maintien à poste sur $[t_0, t_1]$ tel que $t_1 - t_0 = 2$ jours, le problème peut être résolu. Sur la figure 4.10 montrant la trajectoire solution dans le plan (x, y) , nous pouvons observer que

la trajectoire doit sortir de la fenêtre de maintien à poste, puis les poussées tangentielles ramènent le satellite dans la fenêtre et il dérive dans le sens des y positifs jusqu'à la fin de l'horizon temporel. Ainsi, dans certains cas, il est indispensable d'autoriser la violation des contraintes de maintien à poste sur une partie de l'horizon temporel afin s'assurer le maintien à poste du satellite sur le restant de cet horizon. La durée de 2 jours pour laquelle les contraintes sont relâchées a été choisie empiriquement, mais il peut être intéressant d'optimiser la valeur de l'instant t_1 pour minimiser la consommation.

Les conditions nécessaires d'optimalité dérivées dans la section 2.3, page 62 peuvent être illustrées par la résolution numérique du problème de maintien à poste avec une condition initiale hors-plan. Le point initial est choisi de telle sorte que $|z(t_0)| \geq \delta$ et $\dot{z}(t_0) = 0$. Puisque le point initial se trouve à l'extérieur de la fenêtre, les contraintes de maintien à poste ne sont imposées que sur un intervalle $[t_1, t_f]$. L'effet du choix de la valeur de t_1 et son impact sur la consommation est décrit dans les résultats du tableau 4.2 établis avec $z(t_0) = 60$ km. Plus t_1 est grand, plus le temps passé en dehors de la fenêtre de maintien à poste est grand, mais la consommation a tendance à diminuer légèrement. Ainsi, le choix de t_1 est à effectuer en fonction de la priorité accordée à la rapidité du retour dans le fenêtre de maintien à poste ou à la réduction de la consommation.

La figure 4.11 présente le profil de poussée lorsque $t_1 - t_0 = 2, 4$ et 6 jours et la figure 4.12 montre la trajectoire dans le plan de phase (z, \dot{z}) . Au regard des résultats analytiques donnés dans la section 2.3, il est possible de remarquer que dans chaque cas les poussées ont la même durée, se produisent au même instant chaque jour et sont espacées d'environ une journée. Il est également possible de vérifier numériquement que la durée des poussées conduit à une durée de cycle égale à $\frac{2\pi}{n}$, en rappelant qu'un cycle correspond à l'enchaînement d'un arc de poussée positive, d'un arc libre, d'une poussée négative et d'un autre arc libre.

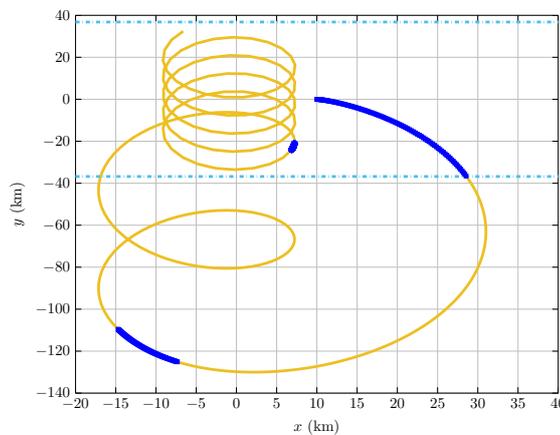


FIGURE 4.10 – Trajectoire dans le plan (x, y) avec les arcs de poussée tangentielle pour $X_0 = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et les contraintes de maintien à poste sont enlevées pour les deux premiers jours.

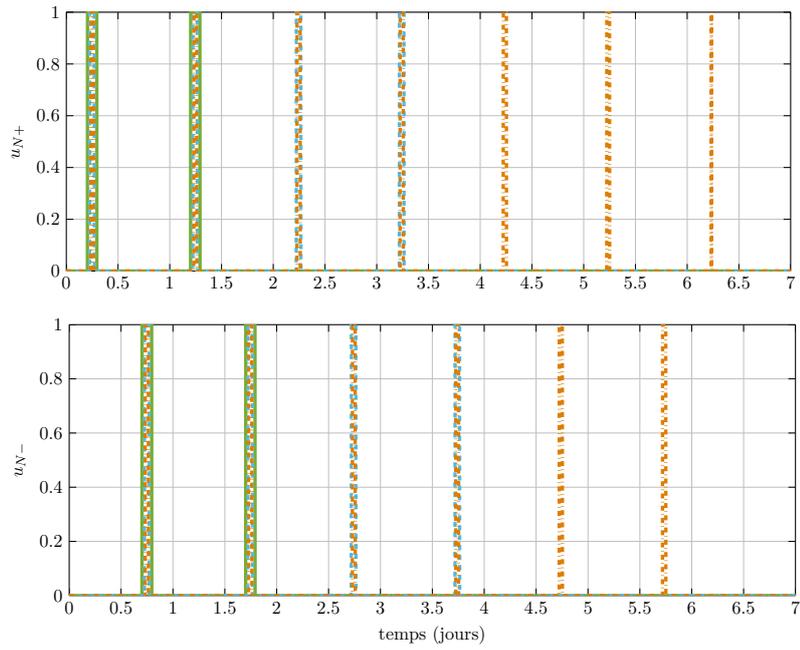


FIGURE 4.11 – Profils de poussée normale pour différentes valeurs de t_1 dans le cas où $z(t_0) = 60$ km : — pour $t_1 = 2$ jours, - - pour $t_1 = 4$ jours, - · - pour $t_1 = 6$ jours.

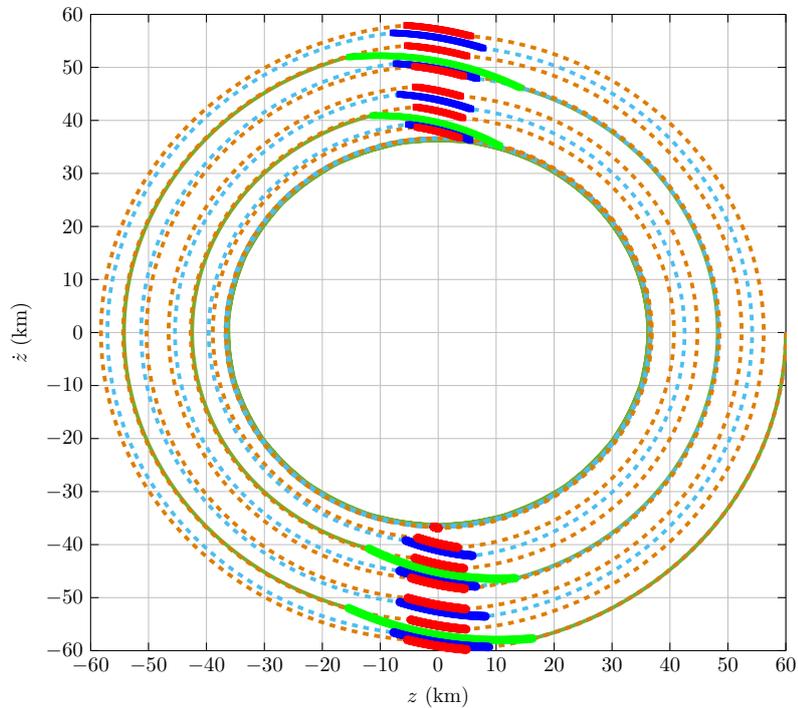


FIGURE 4.12 – Trajectoire dans le plan de phase (z, \dot{z}) pour différentes valeurs de t_1 dans le cas où $z(t_0) = 60$ km : — arcs libres pour $t_1 = 2$ jours, ● arcs de poussée normale, - - arcs libres pour $t_1 = 4$ jours, ● arcs de poussée normale, - · - arcs libres pour $t_1 = 6$ jours, ● arcs de poussée normale.

$t_1 - t_0$	Consommation (m/s)	Nombre de poussées	Durée des poussées (min)	Durée de cycle $/(\frac{2\pi}{n})$ (moyenne)
1 jour	1,803	2	275	1,0027
2 jours	1,721	4	130 ~ 135	0,9998
3 jours	1,705	6	85 ~ 90	1,0009
4 jours	1,705	8	65	1,0007
5 jours	1,705	10	50 ~ 55	1,0001
6 jours	1,705	13	40 ~ 45 et 5 [†]	0,9989
7 jours	1,688	14	35 ~ 40	0,9999

TABLE 4.2 – Consommation et valeur finale de la dérive pour $X_0 = [0 \ 0 \ 60 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ pour une durée variable.

† Dans le profil obtenu, la dernière poussée dure 5 minutes.

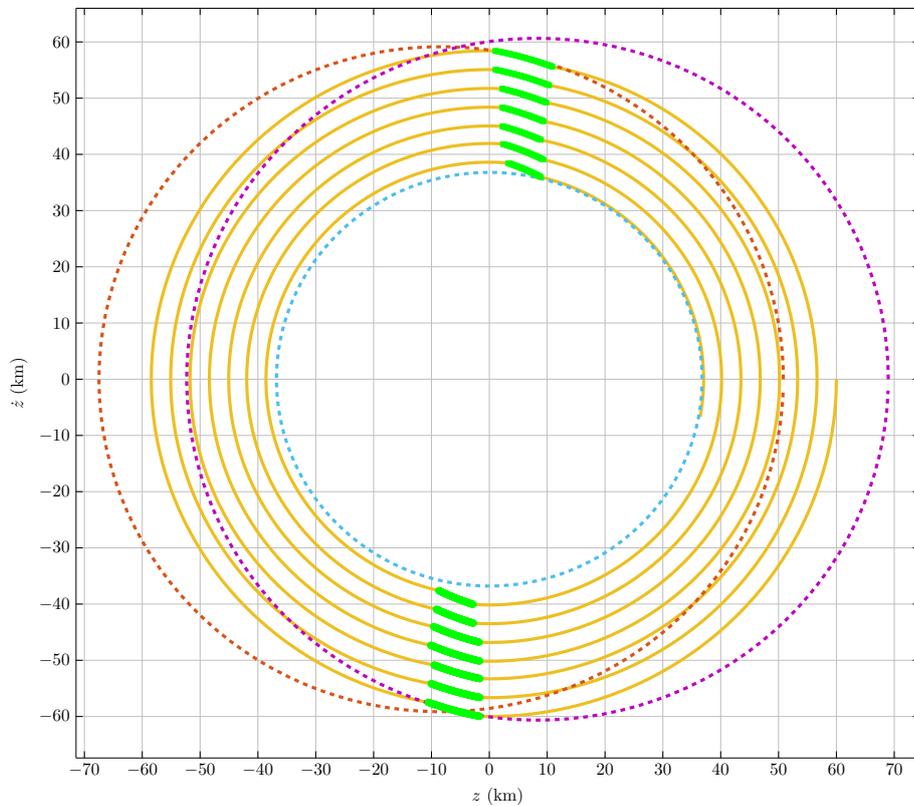


FIGURE 4.13 – Analyse dans le plan de phase $(z, \frac{\dot{z}}{n})$:

- arcs libres,
- arcs de poussée,
- · - arc libre sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon δ ,
- - cercle de centre $(-\frac{F_{\max}}{mn^2}, 0)$ ayant pour rayon le premier arc de poussée positive, - - cercle de centre $(\frac{F_{\max}}{mn^2}, 0)$ ayant pour rayon le premier arc de poussée négative.

La figure 4.13 présente la trajectoire dans le plan de phase $(z, \frac{\dot{z}}{n})$ dans le cas où $t_1 = 7$ jours. Dans ce plan, les arcs libres sont des portions de cercle de centre $(0, 0)$, le dernier de

chaque trajectoire étant de rayon égal à δ . Les arcs de poussées sont des portions de cercle de centre $(\pm \frac{F_{\max}}{mn^2}, 0)$ avec $\frac{F_{\max}}{mn^2} = 8,32$ km. Ceci est en accord avec les conditions nécessaires établies au chapitre 2. Par ailleurs, la figure 4.14 montre que les poussées normales qui corrigent la trajectoire hors-plan, sont effectuées aux nœuds des orbites, ce qui correspond à la stratégie classique de changement du plan de l'orbite. Ces remarques sont également valables pour les trajectoires obtenues avec les autres valeurs de t_1 .

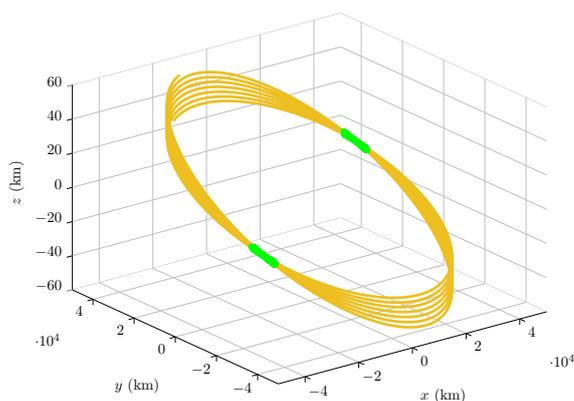


FIGURE 4.14 – Trajectoire dans le repère inertiel géocentrique \mathcal{R}_G et arcs de poussées.

4.4 SOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE MAINTIEN À POSTE COMPLET

Dans cette section, la paramétrisation du contrôle par des variables entières est utilisée pour résoudre un problème de maintien à poste pour un satellite en orbite géostationnaire soumis à toutes les perturbations décrites dans la section 1.2.2, page 19. Le satellite, d'une masse de 4850 kg, est équipé du système de propulsion décrit à la section 1.4.2.1, page 34 avec $t_0 = 0$ et $t_f = 7$ jours.

4.4.1 COMPARAISON ENTRE LES DIFFÉRENTES MÉTHODES D'INTÉGRATION

Une première comparaison peut être effectuée entre les différentes méthodes d'intégration de la dynamique relative du satellite. En effet, dans la section 4.2.2, deux méthodes d'intégration ont été présentées. Ces méthodes sont :

- une intégration analytique de la dynamique grâce à l'utilisation des matrices de transition, puis évaluation de cette solution en les instants de la grille temporelle choisie,
- l'application du schéma numérique aux différences finies de Simpson pour approcher la solution de l'équation différentielle.

Les trajectoires dans le plan (λ, φ) solutions du problème 4.2 utilisant les différents schémas d'intégration présentés sont affichées sur la figure 4.15. Les trajectoires sont quasiment confondues. La figure 4.16 montre que l'écart entre les trajectoires issues de la solution problème pour lequel la dynamique est intégrée par les matrices de transition et pour

lequel la dynamique est intégrée par la méthode de Simpson est très faible. La consommation induite par ces trois profils est de 0,2351 m/s. Une différence majeure entre ces deux types d'intégration est le temps de calcul requis pour calculer et intégrer la dynamique. Sur un intel insideTM core i5 vPro avec Matlab[®]R2014b, l'intégration numérique de la matrice de transition avec *chebfun* nécessite environ 40 minutes de calcul pour un horizon temporel de $t_f - t_0 = 7$ jours (2017 points) tandis que l'intégration par le schéma numérique de Simpson nécessite environ 10 minutes de calculs. Il est donc plus avantageux en termes de temps de calculs d'utiliser la méthode d'Hermite Simpson pour intégrer la dynamique

4.4.2 COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION EN TROIS ÉTAPES

La méthode de résolution en nombre entiers présentée dans ce chapitre et la méthode de résolution en trois étapes développée dans le chapitre précédent permettent de résoudre toutes deux le problème de maintien à poste à consommation minimale. Il est alors possible de comparer les profils de poussée ainsi que les consommations calculées par chacune des deux méthodes.

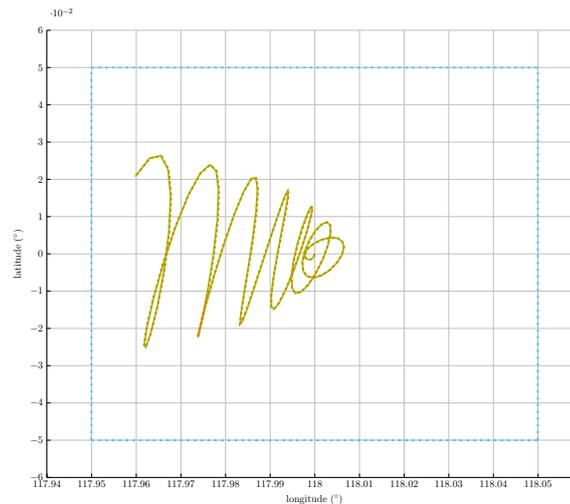


FIGURE 4.15 – Trajectoires solutions du problème en nombres entiers 4.2 utilisant différents schémas d'intégration pour la dynamique :

- intégration par les matrices de transition,
- - intégration par la méthode de Simpson.

Pour les problèmes de maintien à poste à position finale contrainte, les profils de contrôle solutions du problème de maintien à poste transcrit avec les variables entières (problème 4.2 avec contraintes finales) pour lequel les contraintes opérationnelles ont été enlevées et les profils solutions de la première étape de la méthode de décomposition (problème 3.6) exhibent des poussées au même instant pour les mêmes propulseurs comme l'illustre la figure 4.17a. Cette constatation fait écho à l'analyse physique menée dans la partie 1.4 page 29 selon laquelle les deux propulseurs Nord, c'est-à-dire les propulseurs 1 et 2, ainsi que les deux propulseurs Sud, c'est-à-dire les propulseurs 3 et 4, doivent être actifs en même temps. Ainsi, en l'absence de contraintes opérationnelles, les instants de poussées optimaux sont

identiques, qu'ils soient trouvés par le Principe du Maximum ou l'utilisation de variables entières pour paramétrer les poussées. Les trajectoires qui découlent des profils de poussée sont cependant différentes (voir la figure 4.17b).

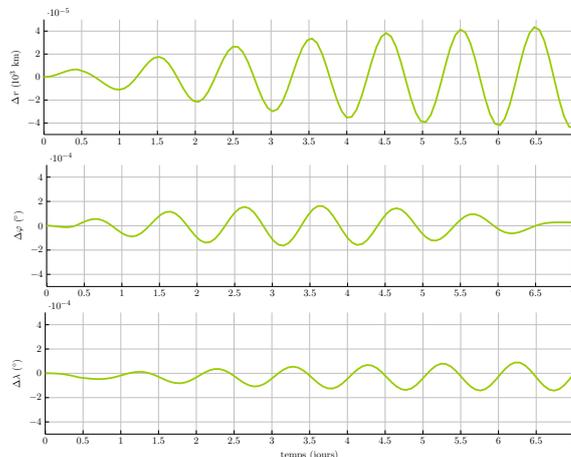


FIGURE 4.16 – Différence de position géographique entre la trajectoire calculée avec l'intégration de la dynamique par les matrices de transition et l'intégration par la méthode d'Hermite Simpson en fonction du temps.

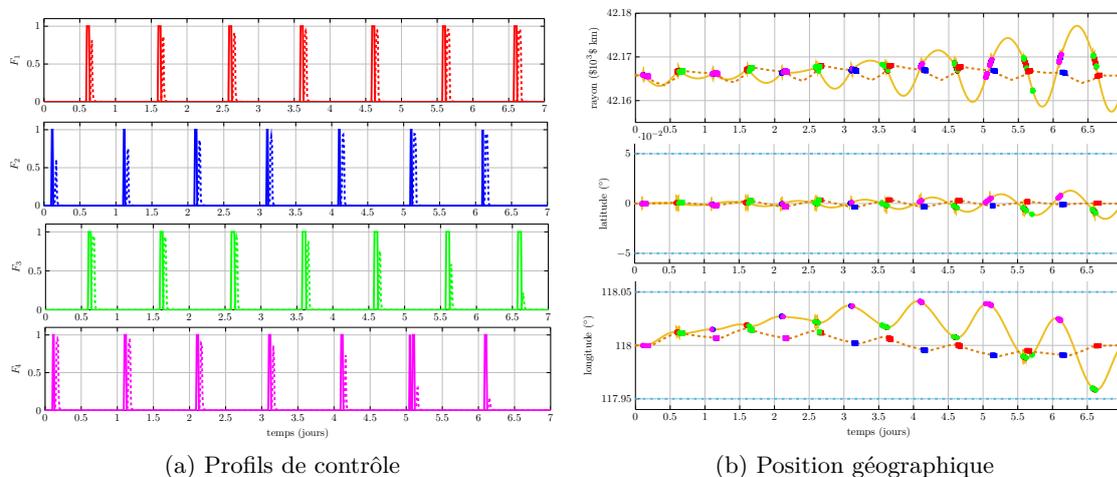


FIGURE 4.17 – Solution du problème 3.6 (étape 1 de la méthode de décomposition) — profil de poussée solution du problème 4.2 avec contraintes finales.

Afin de comparer les solutions de la troisième étape de la méthode de décomposition avec les solutions du problème exprimé en nombres entiers, il est nécessaire de choisir une valeur de la fonction seuil ζ transformant le profil de contrôle continu en un profil tout ou rien – voir la section 3.5.2.3, page 137. En effet, comme cela a été montré dans le chapitre précédent, la trajectoire finale solution de la méthode à trois étapes ainsi que le nombre de poussées dépendent très fortement de la valeur du paramètre de seuil.

En choisissant $\zeta_1 = [0, 99 \quad 0, 95 \quad 0, 99 \quad 0, 99]$, le profil de contrôle issu de la méthode de décomposition présente une seule poussée du propulseur 2, tout comme le profil de contrôle solution du problème en nombres entiers (voir les courbes de la figure 4.18a). La

consommation déduite de ces deux profils est cependant très différente. Pour la solution de la méthode de décomposition, la consommation est de 0.023 m/s tandis qu'elle est de 0,24 m/s pour la solution du problème exprimé en nombres entiers. Cependant, en choisissant $\varsigma_2 = \begin{bmatrix} 0,89 & 0,89 & 0,93 & 0,93 \end{bmatrix}$, le profil de contrôle issu de la méthode de décomposition présente 13 poussées, ce qui conduit à une consommation de 0.31 m/s (voir les courbes de la figure 4.18b).

4.4.3 EFFET DES CONTRAINTES OPÉRATIONNELLES

Comme cela a été présenté dans la partie 1.4 et illustré par les courbes de la figure 4.17a, la stratégie de maintien à poste optimale consiste en l'allumage simultané des deux propulseurs Nord (1 et 2) d'une part et les deux propulseurs Sud (3 et 4) d'autre part. Cependant, les contraintes opérationnelles imposent une disjonction des poussées, et la prise en compte de ces disjonctions entraîne un surcoût, comme l'illustrent les données du tableau 4.3, pour lesquelles la consommation est calculée pour des profils respectant les contraintes opérationnelles et des profils ne les respectant pas, dans le cas de l'intégration de la dynamique par la matrice de transition et par la méthode de Simpson. Dans le cas simulé ici, la position géographique finale est contrainte et doit atteindre une cible fixée. Ce type de condition finale est inspiré de la référence [Eckstein, 1978]. La solution du problème exprimé avec la méthode des matrices de transition conduit dans ce cas à une consommation inférieure à la solution du problème exprimé avec la méthode de Simpson. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser l'intégration de la dynamique par discrétisation de la matrice de transition plutôt que par la méthode de Simpson même si cette dernière est plus rapide à mettre en œuvre.

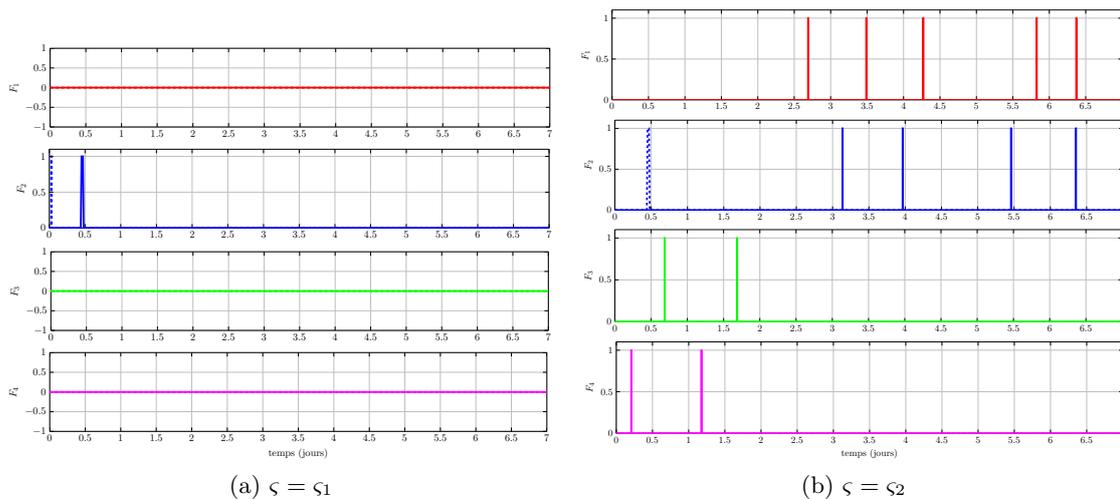


FIGURE 4.18 – - - profil de poussée solution de la troisième étape de la méthode de décomposition,

— profil de poussée solution du problème 4.2 .

Méthode d'intégration	Avec les contraintes opérationnelles	Sans les contraintes opérationnelles
Matrices de transition	4,596 m/s	4,569 m/s
Méthode de Simpson	6,651 m/s	6,601 m/s

TABLE 4.3 – Effet des contraintes opérationnelles sur la consommation.

De la même façon la contrainte de durée minimale a une influence sur la consommation induite par le profil solution. Pour un découpage de l'intervalle $[t_0, t_f]$ en sous intervalles de durée $T_l = 5$ minutes, le tableau 4.4 montre l'effet sur la consommation à la fin de la semaine de la contrainte de durée minimale de poussée égale à pT_l avec $p = 1$ ou $p = 2$.

Méthode d'intégration	$p = 1$	$p = 2$
Matrices de transition	4,596 m/s	4,499 m/s
Méthode de Simpson	6,651 m/s	6,577 m/s

TABLE 4.4 – Effet de la contrainte de durée minimale de la poussée sur la consommation.

Les figures 4.19a et 4.19b montrent l'effet des contraintes opérationnelles sur la trajectoire de maintien à poste dans trois cas :

- les contraintes opérationnelles ne sont pas prises en compte,
- les contraintes opérationnelles sont prises en compte avec une durée minimale de poussée égale à T_l ,
- les contraintes opérationnelles sont prises en compte avec une durée minimale de poussée égale à $2T_l$.

D'après ces figures, lorsque la durée minimale de poussée est égale à $2T_l$, les poussées sont en moyenne plus longues que lorsque la contrainte de durée minimale est T_l , mais il y en a moins, ce qui explique la diminution de la consommation observée sur la semaine de calcul.

4.5 CONCLUSION

Alors que la résolution du problème de maintien à poste par une technique basée sur les méthodes indirectes requiert la succession de trois étapes pour la prise en compte des contraintes opérationnelles et des contraintes de maintien à poste, la modélisation du profil de contrôle par des fonctions binaires permet la réécriture des contraintes opérationnelles en contraintes linéaires sur les variables entières. De plus, l'intégration numérique de la dynamique du système retire les variables continues si bien que le problème à résoudre est un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

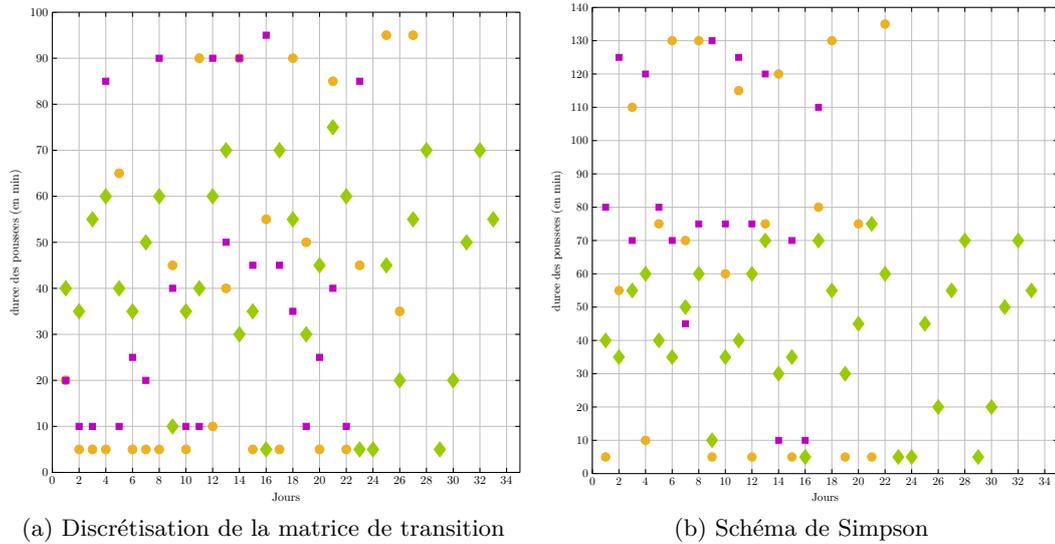


FIGURE 4.19 – Durée des poussées solution du problème 4.2 avec intégration par la méthode des matrices de transition,

- ◆ sans contraintes opérationnelles,
- contraintes opérationnelles avec durée minimale de poussée égale à T_l ,
- contraintes opérationnelles avec durée minimale de poussée égale à $2T_l$.

La méthode de résolution en nombres entiers a été validée sur un problème de maintien à poste simplifié pour lequel aucune perturbations orbitale n'existe et pour lequel le satellite est équipé d'un système de propulsion idéal constitué d'un propulseur par face. La solution de ce problème respecte les conditions suffisantes pour le maintien à poste, à savoir un point situé à l'intérieur de la fenêtre de maintien à poste et une dérive nulle. La durée de l'horizon temporel a un impact sur la consommation. En effet, il a été possible de montrer que le besoin en correction de la dérive est proportionnel à la durée de l'horizon temporel de résolution. Ainsi, lors de la conception d'une mission, il est nécessaire de prendre en compte ce biais dû à l'horizon de la mission.

Certaines conditions initiales conduisent à un espace de solution vide car le niveau de poussée est trop faible par rapport à la correction nécessaire. Ceci fait écho à l'étude analytique menée au chapitre 2 et à la définition d'un espace de départ admissible qui assure la faisabilité du problème de maintien à poste pour le mouvement hors-plan. Dans ce chapitre, il apparaît de façon évidente qu'une telle condition existe pour le mouvement dans le plan de l'équateur. Si la position et la vitesse initiales du satellite sont telles que l'espace des solutions est vide, le relâchement des contraintes de maintien à poste sur une partie de l'horizon temporel est nécessaire pour assurer le retour du satellite dans des conditions de maintien à poste réalisables. La durée pour laquelle les contraintes de maintien à poste sont relâchées a un impact sur la consommation. Cette dernière est légèrement plus élevée lorsque la durée de relâchement des contraintes est faible, mais le satellite reste moins longtemps en dehors de la fenêtre. Le choix de cette durée est donc à déterminer en fonction de la priorité à accorder à la réduction de la consommation ou au temps passé en dehors de la fenêtre de maintien à poste.

Alors que pour le problème simplifié la dynamique est intégrée de façon analytique, pour le

problème complet l'équation différentielle de la dynamique doit être intégrée numériquement. Deux méthodes ont été mises en place : la première évalue la matrice de transition sur la grille temporelle tandis que la deuxième repose sur un schéma aux différences finies. Une première différence entre ces deux méthodes est le temps de calcul pour mener à bien l'intégration. La méthode basée sur les différences finies est plus rapide que la méthode basée sur l'évaluation de la matrice de transition. Dans l'optique d'un temps de calcul réduit, il est plus judicieux d'utiliser la première méthode. Lorsque la position et la vitesse finales sont libres, les deux méthodes conduisent à la même consommation, mais lorsque la position et la vitesse finales sont contraintes, la méthode basée sur la matrice de transition conduit à une consommation plus faible. Ainsi, dans ce dernier cas, il paraît plus judicieux d'utiliser la méthode d'intégration basée sur la matrice de transition.

La solution du problème de maintien à poste transcrit en problème de programmation linéaire en nombres entiers peut être comparée à la solution du problème de maintien à poste résolu avec la méthode en trois étapes mise en place dans le chapitre 3. La consommation du profil résultant de cette méthode est très dépendant d'un paramètre de seuil, et les résultats des deux méthodes ne coïncident que pour une valeur bien choisie du paramètre de seuil de la méthode en trois étapes. Ceci permet de conclure que la méthode en trois étapes est plus difficile à mettre en œuvre que la méthode de résolution en nombres entiers. C'est pourquoi, les analyses sur un horizon long du chapitre suivant sont effectuées sur la base de la méthode en nombres entiers mise au point dans ce chapitre.

Chapitre 5

Problème de maintien à poste résolu sur un an

La seule manière pour trouver quelque chose quand on en a besoin, c'est d'avoir besoin de le trouver.

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Sommaire

5.1	Introduction	180
5.2	Contrainte de fin d'horizon court	181
5.2.1	Conditions finales sur les positions et vitesses cartésiennes relatives	181
5.2.1.1	Trajectoire et contraintes hors-plan	182
5.2.1.2	Trajectoire et contraintes dans le plan	183
5.2.2	Application dans le cas d'un modèle perturbé	187
5.2.2.1	Contraintes terminales	187
5.2.2.2	Expression en termes de positions et de vitesses géographiques	188
5.2.2.3	Discrétisation des contraintes terminales	189
5.2.3	Problèmes de maintien à poste à résoudre	190
5.2.4	Contraintes de maintien à postes quadratiques	191
5.3	Simulations et analyse paramétrique	193
5.3.1	Résolution du problème dans le cas nominal choisi	194
5.3.2	Effet de la méthode d'intégration de la dynamique	198
5.3.3	Effet de la durée de l'horizon court	199
5.3.4	Approximation des contraintes terminales quadratiques	201
5.3.5	Approximation des contraintes quadratiques de maintien à poste	203
5.3.6	Angles de déviation et de déflexion des propulseurs	203
5.3.7	Cas de panne	206
5.3.8	Système propulsif idéalisé	208
5.3.9	Conclusion	208
5.4	Optimisation à horizon glissant	209
5.4.1	Présentation de la méthode	209
5.4.2	Résultats	210
5.5	Conclusion	211

5.1 INTRODUCTION

Dans les deux chapitres précédents, le problème de maintien à poste a été résolu en boucle ouverte sur un horizon court de 7 jours. Les deux méthodes présentées ne peuvent pas être utilisées en l'état pour la résolution sur un horizon beaucoup plus long du fait de problèmes numériques. En effet, pour la méthode de décomposition en trois étapes, la troisième peut être extrêmement longue si le nombre de poussées est élevé car le nombre de propagations de la dynamique est égal à deux fois le nombre de poussées. Ainsi, plus l'horizon est grand, plus l'intégration est longue. Par ailleurs, le paramètre de seuil ζ est plus difficile à régler pour un horizon plus long. La méthode de résolution en nombres entiers quant à elle, nécessite la mise en œuvre de matrices de transition calculées numériquement. Le nombre de calculs à effectuer est proportionnel au carré du nombre de points de discrétisation. Ainsi, si l'horizon temporel est grand, le nombre de points de la grille temporelle augmente, conduisant à stocker des ensembles de données de plus en plus importants et pourrait rapidement atteindre la limite mémoire. Par ailleurs, la durée du cycle de maintien à poste doit être limitée à cause des différentes sources d'erreurs dues à l'exécution des poussées, à la restitution d'orbite et à la modélisation des perturbations. Pour ces raisons, il n'est pas possible d'appliquer les méthodes précédentes sur un horizon temporel trop long.

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place des stratégies pour résoudre le problème de maintien à poste sur un horizon long (typiquement 52 semaines) par résolutions successives sur des horizons plus courts à l'instar de la méthode présentée par la référence [Eckstein and Hechler, 1981]. Ces horizons courts peuvent être synchronisés avec la période de restitution d'orbite. Pour résoudre cette difficulté, ce chapitre se propose de résoudre un enchaînement de problèmes de maintien à poste, chacun définis sur un horizon court bien choisi, la position atteinte à la fin d'un de ces horizons courts constituant la position initiale pour l'horizon suivant. Cependant, la loi de contrôle établie sur un horizon court est aveugle à l'effet des perturbations sur l'horizon court suivant, et le satellite peut être amené à arriver à l'instant final en bord de fenêtre avec une vitesse orientée vers l'extérieur de la fenêtre, ce qui rend le problème de maintien à poste difficile ou impossible à résoudre pour l'horizon suivant. Pour empêcher ce phénomène et assurer un enchaînement de la résolution du problème de maintien à poste sur chacun de ces horizons courts, il est nécessaire d'ajouter des contraintes terminales. Ces conditions terminales sont mises en place en étudiant le mouvement du satellite relativement à sa position de maintien à poste à l'aide des équations de Hill-Clohessy-Wiltshire (modèle d'évolution képlérienne) puis sont étendues au modèle d'évolution prenant en compte les perturbations orbitales en considérant l'ellipse osculatrice à l'instant de contact entre les horizons courts successifs. Le problème de maintien à poste est résolu en utilisant le modèle linéaire de synthèse et la propagation est effectuée en utilisant le modèle non-linéaire de simulation.

Une autre piste de résolution utilisant l'optimisation à horizon glissant est esquissée dans ce chapitre. Le problème de maintien à poste est résolu sur un horizon court, conduisant à une loi de contrôle optimale sur cet horizon. Cette dernière est utilisée pour propager la position initiale du satellite sur la moitié de l'horizon. La position ainsi atteinte correspond alors au début de l'horizon court suivant qui commence donc à la moitié de l'horizon court courant.

Puisque la plus longue période des perturbations est d'une durée égale à un an (potentiel d'attraction du Soleil), l'horizon long est choisi égal à un an. La résolution du problème de

maintien à poste ainsi réalisable sur un horizon long permet de mener à bien une analyse de l'effet des différents paramètres sur la consommation annuelle. Par ailleurs, la méthode de résolution sur l'horizon court peut être aussi bien la méthode en trois étapes du chapitre 3 ou la méthode basée sur la résolution d'un problème d'optimisation en nombres entiers du chapitre 4. Cependant, la méthode en nombres entiers étant plus facilement mise en œuvre, cette dernière sera utilisée tout au long de ce chapitre.

5.2 CONTRAINTE DE FIN D'HORIZON COURT

Dans l'optique de résoudre le problème de maintien à poste de façon récursive en enchaînant la résolution sur les horizons courts les uns après les autres, les contraintes géographiques de maintien à poste peuvent ne pas être suffisantes pour assurer le maintien à poste pour l'horizon court suivant. Par exemple, à l'instant final, la position du satellite peut arriver à proximité de la fenêtre de maintien à poste avec une vitesse dirigée vers l'extérieur de la fenêtre de maintien à poste. Dans ce cas, il n'est pas possible pour un satellite dont la poussée est bornée d'assurer le maintien à poste sur l'horizon court suivant. C'est pourquoi, une contrainte restreignant l'espace admissible final doit être ajoutée au problème d'optimisation, comme le suggère la référence [Grüne and Pannek, 2011].

La référence [Eckstein and Hechler, 1981] propose une stratégie similaire en imposant des contraintes de cible en fin d'horizon court, c'est-à-dire des contraintes de rendez-vous. Les contraintes finales proposées sont plus lâches car elles restreignent l'espace final. Elles font écho aux contraintes de faisabilité exprimées analytiquement pour le problème de maintien à poste képlérien hors-plan exprimé à partir des équations de Hill-Clohessy-Wiltshire dans la section 2.4, et reposent sur le fait d'assurer que l'orbite osculatrice au point de jonction entre deux cycles courts reste à l'intérieur de la fenêtre de maintien à poste. Pour obtenir les conditions sur la trajectoire osculatrice, les conditions sont d'abord développées pour le modèle képlérien en éléments orbitaux, puis étendues à la position géographique du satellite ainsi qu'à sa dérivée temporelle.

5.2.1 CONDITIONS FINALES SUR LES POSITIONS ET VITESSES CARTÉSIENNES RELATIVES

Soit un satellite orbitant autour de la Terre, soumis uniquement à une attraction centrale (modèle képlérien). Dans ce cas, les équations d'évolution des positions et vitesses cartésiennes relatives sont données par la matrice de transition (I.4) qui se développe en :

$$x(t) = -\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right) \cos(nt) + \frac{\dot{x}_0}{n} \sin(nt) + \left(4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right), \quad (5.1)$$

$$y(t) = \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos(nt) + \left(6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n}\right) \sin(nt) - \left(6x_0 + \frac{3\dot{y}_0}{n}\right) nt + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right), \quad (5.2)$$

$$z(t) = z_0 \cos(nt) + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin(nt), \quad (5.3)$$

$$\dot{x}(t) = n \left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right) \sin(nt) + \dot{x}_0 \cos(nt), \quad (5.4)$$

$$\dot{y}(t) = -2\dot{x}_0 \sin(nt) + n \left(6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n} \right) \cos(nt) - \left(6x_0 + \frac{3\dot{y}_0}{n} \right) n, \quad (5.5)$$

$$\dot{z}(t) = -nz_0 \sin(nt) + \dot{z}_0 \cos(nt), \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

avec $X(t_0) = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0]^T$ le vecteur d'état à l'instant initial. Il est possible de retrouver dans les expressions précédentes que le mouvement dans le plan de l'équateur et le mouvement perpendiculaire à ce plan sont découplés. C'est pourquoi les contraintes dans le plan de l'orbite et les contraintes hors du plan de l'orbite sont étudiées de façon séparée

5.2.1.1 TRAJECTOIRE ET CONTRAINTES HORS-PLAN

Le mouvement relatif hors-plan est donné par :

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos(nt) + \frac{\dot{z}_0}{n} \sin(nt), \\ \dot{z}(t) &= -nz_0 \sin(nt) + \dot{z}_0 \cos(nt), \\ &= n \left[\frac{\dot{z}_0}{n} \cos(nt) - z_0 \sin(nt) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

La trajectoire relative hors-plan dans le plan de phase (z, \dot{z}) satisfait :

$$\frac{z^2(t)}{A_0^2} + \frac{\dot{z}^2(t)}{n^2 A_0^2} = 1, \quad (5.9)$$

où A_0 est défini par l'équation (2.8) et le mouvement hors-plan est celui d'un oscillateur harmonique. Sa trajectoire dans l'espace des phases est une ellipse de centre $(0,0)$, de demi-petit axe A_0 (direction z) et de demi-grand axe nA_0 (direction \dot{z}).

Afin de rester dans une fenêtre de maintien à poste de largeur ϵ , il suffit donc d'imposer la contrainte $A_0 \leq \epsilon$, que l'on peut réécrire :

$$z_0^2 + \frac{\dot{z}_0^2}{n^2} \leq \epsilon^2, \quad (5.10)$$

ou encore :

$$\frac{z_0^2}{\epsilon^2} + \frac{\dot{z}_0^2}{n^2 \epsilon^2} \leq 1. \quad (5.11)$$

Le lieu des positions relatives initiales (z_0, \dot{z}_0) est donc l'intérieur d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon ϵ dans le plan $\left(z, \frac{\dot{z}}{n} \right)$ (voir la figure 5.1).

5.2.1.2 TRAJECTOIRE ET CONTRAINTES DANS LE PLAN

Les équations différentielles du mouvement relatif dans le plan sont données par :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right) \cos(nt) + \frac{\dot{x}_0}{n} \sin(nt) + \left(4x_0 + \frac{2y_0}{n}\right), \\
 y(t) &= \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos(nt) + \left(6x_0 + \frac{4y_0}{n}\right) \sin(nt) - \left(6x_0 + \frac{3y_0}{n}\right) nt + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right), \\
 \dot{x}(t) &= n \left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right) \sin(nt) + \dot{x}_0 \cos(nt), \\
 \dot{y}(t) &= -2\dot{x}_0 \sin(nt) + n \left(6x_0 + \frac{4y_0}{n}\right) \cos(nt) - \left(6x_0 + \frac{3y_0}{n}\right) n.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

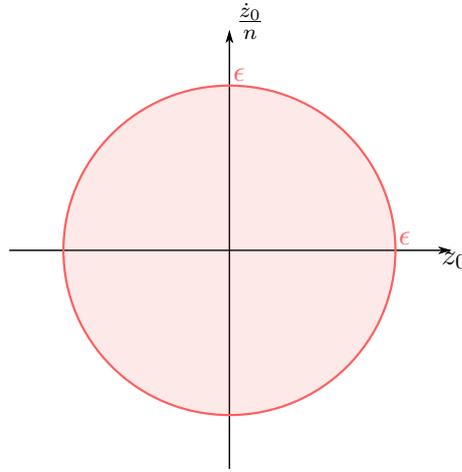


FIGURE 5.1 – Espace admissible dans l'espace $(z_0, \frac{z_0}{n})$.

Il est possible de réécrire :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -\left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right) \cos(nt) + \frac{\dot{x}_0}{n} \sin(nt) + \left(4x_0 + \frac{2y_0}{n}\right), \\
 &= \sqrt{\left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \cos\left(nt + \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{3nx_0 + 2y_0}\right)\right) + \left(4x_0 + \frac{2y_0}{n}\right),
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

et :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{2\dot{x}_0}{n} \cos(nt) + \left(6x_0 + \frac{4y_0}{n}\right) \sin(nt) - \left(6x_0 + \frac{3y_0}{n}\right) nt + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right), \\
 &= 2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \sin\left(nt + \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{3nx_0 + 2y_0}\right)\right) \\
 &\quad - \left(6x_0 + \frac{3y_0}{n}\right) nt + \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n}\right).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

En combinant les deux équations précédentes, il vient :

$$\left[x(t) - \left(4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n} \right) \right]^2 + \frac{\left[y(t) + \left(6x_0 + \frac{3\dot{y}_0}{n} \right) nt - \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \right) \right]^2}{4} = \left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n} \right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2} = A_{xy}^2, \quad (5.15)$$

et la trajectoire dans le plan (x, y) s'écrit :

$$\frac{\left[x(t) - \left(4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n} \right) \right]^2}{A_{xy}^2} + \frac{\left[y(t) + \left(6x_0 + \frac{3\dot{y}_0}{n} \right) nt - \left(y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \right) \right]^2}{4A_{xy}^2} = 1. \quad (5.16)$$

La trajectoire relative dans le plan de l'équateur est donc une ellipse de centre :

$$(x_c, y_c(t)) = \left(4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}, -6x_0 nt - 3\dot{y}_0 t + y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \right), \quad (5.17)$$

de demi petit-axe A_{xy} (direction x) et de demi grand-axe $2A_{xy}$ dans la direction y comme représenté sur la figure 5.2. L'abscisse du centre de l'ellipse est constante mais son ordonnée se déplace au cours du temps.

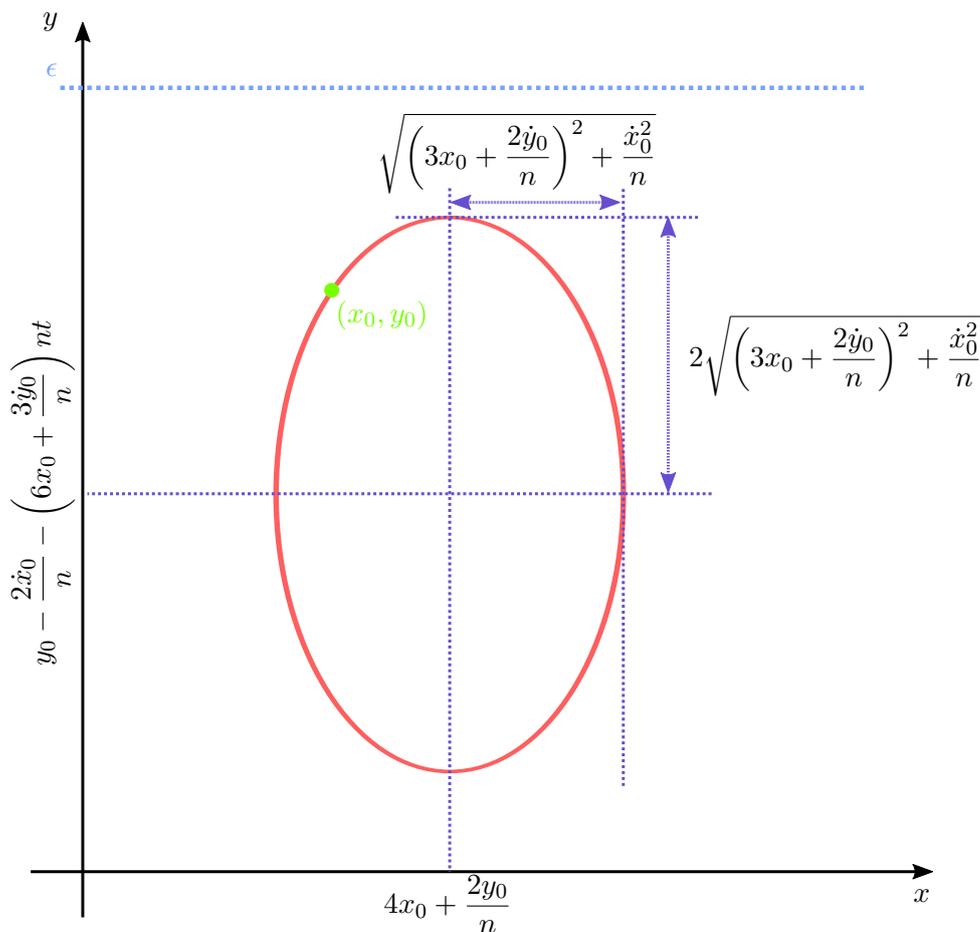


FIGURE 5.2 – Trajectoire dans le plan (x, y) .

Pour que la trajectoire selon y soit comprise dans l'intervalle $[-\epsilon, +\epsilon]$ à l'instant t , il suffit d'imposer la contrainte :

$$\begin{cases} y_c + 2A_{xy} \leq \epsilon, \\ y_c - 2A_{xy} \leq \epsilon, \end{cases} \quad (5.18)$$

ou encore :

$$\left| -6x_0nt - 3\dot{y}_0t + y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \right| \leq \epsilon - 2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}}. \quad (5.19)$$

Cette contrainte peut également être obtenue en considérant la trajectoire du satellite dans le plan (y, \dot{y}) .

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

La contrainte (5.19) peut se décomposer en les deux contraintes :

$$-6x_0nt - 3\dot{y}_0t + y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{n} \leq \epsilon - 2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \quad (5.20a)$$

$$6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n} \leq \epsilon - 2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \quad (5.20b)$$

La contrainte (5.20a) peut se réécrire :

$$0 \leq 2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \leq \epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}. \quad (5.21)$$

Avec le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\dot{x}_0}{n}, \\ \xi_2 = 6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n}, \\ \xi_+(t) = \epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}, \end{cases} \quad (5.22)$$

il est possible de réécrire la contrainte (5.21) sous la forme :

$$\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leq \xi_+. \quad (5.23)$$

Puis, en élevant au carré (les deux termes étant positifs) :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_+^2 \leq 0. \quad (5.24)$$

Notons que la contrainte (5.21) impose $\xi_+(t) \geq 0$. L'inégalité (5.24) définit l'intérieur d'un cône dans l'espace (ξ_1, ξ_2, ξ_+) , de sommet à l'origine, de base circulaire, d'axe de révolution ξ_+ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ (voir la figure 5.3). Comme $\xi_+(t) \geq 0$, l'espace admissible est l'intérieur du demi-cône positif.

La contrainte (5.20b) peut se réécrire :

$$0 \geq -2\sqrt{\left(3x_0 + \frac{2y_0}{n}\right)^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{n^2}} \geq -\epsilon + 6x_0nt + 3y_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}. \quad (5.25)$$

Avec le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\dot{x}_0}{n}, \\ \xi_2 = 6x_0 + \frac{4y_0}{n}, \\ \xi_-(t) = -\epsilon + 6x_0nt + 3y_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}, \end{cases} \quad (5.26)$$

il est possible de réécrire la contrainte (5.25) sous la forme :

$$-\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \geq \xi_-. \quad (5.27)$$

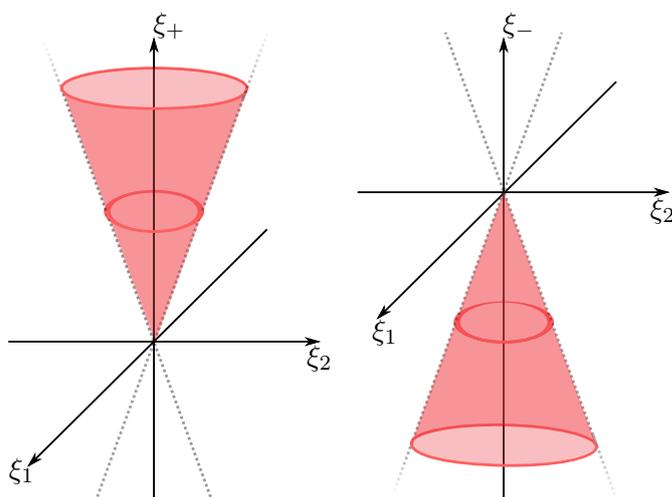


FIGURE 5.3 – Cônes admissibles dans les espaces (ξ_1, ξ_2, ξ_+) et (ξ_1, ξ_2, ξ_-) .

Puis, en élevant au carré (les deux termes étant négatifs) :

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_-^2 \leq 0. \quad (5.28)$$

Notons que la contrainte (5.25) impose $\xi_-(t) \leq 0$. L'inégalité (5.28) définit l'intérieur d'un cône dans l'espace (ξ_1, ξ_2, ξ_-) , de sommet à l'origine, de base circulaire, d'axe de révolution ξ_- et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{4}$ (voir la figure 5.3). Comme $\xi_-(t) \leq 0$, l'espace admissible est l'intérieur du demi-cône négatif.

Les contraintes à imposer pour assurer que la trajectoire reste dans la fenêtre de maintien à poste sont donc les suivantes :

$$\frac{z^2}{\epsilon^2} + \frac{\dot{z}^2}{n^2\epsilon^2} \leq 1, \quad (5.29a)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_+^2 \leq 0, \quad (5.29b)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_-^2 \leq 0, \quad (5.29c)$$

avec le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\dot{x}_0}{n}, \\ \xi_2 = 6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n}, \\ \xi_+(t) = \epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n} \geq 0, \\ \xi_-(t) = -\epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n} \leq 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

5.2.2 APPLICATION DANS LE CAS D'UN MODÈLE PERTURBÉ

5.2.2.1 CONTRAINTES TERMINALES

Dans le cas d'un mouvement képlérien non perturbé, les positions et les vitesses peuvent être transformées en éléments orbitaux décrivant l'orientation de l'orbite et la position du satellite sur cette orbite. Dans le cas d'un mouvement perturbé, les positions et les vitesses peuvent être transformées à chaque instant en éléments orbitaux définissant une ellipse tangente à la trajectoire, appelée orbite osculatrice. Cette orbite osculatrice est la trajectoire que le satellite suivrait si les perturbations orbitales disparaissaient instantanément. Au niveau du point de contact, un satellite sur la trajectoire réelle et un satellite sur la trajectoire osculatrice ont la même position, la même vitesse, mais des accélérations différentes. C'est pourquoi, imposer les contraintes (5.34a), (5.34b) et (5.34c) à la fin de chaque cycle court suffit à assurer que l'orbite osculatrice au point de jonction entre deux horizons courts reste dans la fenêtre de maintien à poste.

En reprenant les notations utilisées dans les chapitres précédents, l'horizon long est défini par l'intervalle $[t_0, t_f]$. Soit $\Delta\mathcal{T}$ la durée d'un horizon court, supposée constante, et J le nombre d'horizons courts nécessaires pour réaliser le maintien à poste sur l'horizon long $[t_0, t_f]$ qui vérifie donc : $(J-1)\Delta\mathcal{T} < t_f - t_0$ et $J\Delta\mathcal{T} \geq t_f - t_0$. Le $j^{\text{ème}}$ horizon court est alors défini par l'intervalle $\mathcal{I}_j = [t_0 + j\Delta\mathcal{T}, t_0 + (j+1)\Delta\mathcal{T}]$ pour $j = 0, \dots, J-1$. Le point de jonction entre les horizons courts $j-1$ et j en $t = t_j^c = t_0 + j\Delta\mathcal{T}$ est noté y_j^c . Il s'agit donc également du point de contact entre la trajectoire perturbée réelle et l'orbite osculatrice en $t = t_j^c$. Sur un intervalle temporel $[t_j^c - \tau, t_j^c + \tau]$, avec τ petit, l'effet intégral des perturbations est faible et la trajectoire perturbée est proche de l'ellipse osculatrice. Ainsi, si $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto y_K(t)$ désignent respectivement la trajectoire perturbée réelle et l'ellipse osculatrice au point y_j^c , il est possible d'écrire :

$$\|y(t) - y_K(t)\| \leq \vartheta \text{ sur } [t_j^c, t_j^c + \tau], \quad (5.31)$$

avec ϑ petit.

Ainsi, assurer que l'ellipse osculatrice se trouve dans une fenêtre de maintien à poste de demi-largeur $\delta - \iota$ permet d'assurer que la trajectoire réelle se trouve dans le fenêtre de maintien à poste de demi-largeur δ sur l'intervalle $[t_j^c, t_j^c + \tau]$. De plus, de cette façon le satellite ne peut pas arriver à la fin d'un cycle court trop près de la frontière avec une vitesse dirigée vers l'extérieur.

A la fin de chaque cycle court à l'instant t_j^c , les contraintes terminales suivantes doivent être ajoutées :

$$\frac{z^2(t_j^c)}{\epsilon^2} + \frac{\dot{z}^2(t_j^c)}{n^2\epsilon^2} \leq 1, \quad (5.32a)$$

$$\xi_1^2(t_j^c) + \xi_2^2(t_j^c) - \xi_+^2(t_j^c) \leq 0, \quad (5.32b)$$

$$\xi_1^2(t_j^c) + \xi_2^2(t_j^c) - \xi_-^2(t_j^c) \leq 0, \quad (5.32c)$$

avec $j = 1, \dots, J$.

5.2.2.2 EXPRESSION EN TERMES DE POSITIONS ET DE VITESSES GÉOGRAPHIQUES

Les contraintes de fin d'horizon court (5.11), (5.24) et (5.28) avec le changement de variables :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{2\dot{x}_0}{n}, \\ \xi_2 = 6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{n}, \\ \xi_+(t) = \epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}, \\ \xi_-(t) = -\epsilon + 6x_0nt + 3\dot{y}_0t - y_0 + \frac{2\dot{x}_0}{n}, \end{cases} \quad (5.33)$$

définissent un espace final admissible pour les positions et vitesses cartésiennes relatives. Afin d'utiliser ces conditions pour la résolution du problème de maintien à poste, il est nécessaire d'exprimer ces contraintes terminales en les positions et vitesses géographiques relatives. En utilisant les formules de conversion établies dans l'annexe J, les conditions terminales (5.32) se réécrivent :

$$\varphi^2(t_j^c) + \frac{\dot{\varphi}(t_j^c)^2}{n^2} \leq \delta^2, \quad (5.34a)$$

$$\begin{aligned} & 4 \left[\frac{\dot{r}(t_j^c)}{n} - r_{mp}\lambda(t_j^c) \right]^2 + \left[10r(t_j^c) + 4r_{mp}\frac{\dot{\lambda}(t_j^c)}{n} \right]^2 \\ & - \left[\delta r_{mp} + 9t_j^c r(t_j^c)n + 3t_j^c r_{mp}\dot{\lambda}(t_j^c) - 3r_{mp}\lambda(t_j^c) + 2\frac{\dot{r}(t_j^c)}{n} \right]^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (5.34b)$$

$$\begin{aligned} & 4 \left[\frac{\dot{r}(t_j^c)}{n} - r_{mp}\lambda(t_j^c) \right]^2 + \left[10r(t_j^c) + 4r_{mp}\frac{\dot{\lambda}(t_j^c)}{n}\lambda(t_j^c) \right]^2 \\ & - \left[-\delta r_{mp} + 9t_j^c r(t_j^c)n + 3t_j^c r_{mp}\dot{\lambda}(t_j^c) - 3r_{mp}\lambda(t_j^c) + 2\frac{\dot{r}(t_j^c)}{n} \right]^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.34c)$$

5.2.2.3 DISCRÉTISATION DES CONTRAINTES TERMINALES

Les contraintes terminales sont des contraintes quadratiques qui définissent un espace admissible convexe. Comme l'utilisation de ces contraintes quadratiques requiert un temps de calcul très grand, nous avons choisi d'approcher ces espaces admissibles convexes par des polytopes pour remplacer les contraintes quadratiques par des contraintes linéaires. Plus le nombre de côtés est élevé, meilleure sera l'approximation.

Les développements de l'annexe K permettent d'obtenir :

$$(\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1})r_{mp}\varphi(t_j^c) + (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k)\frac{r_{mp}\dot{\varphi}(t_j^c)}{n} + r_{sk}\delta \sin\left(\frac{2\pi}{K_z}\right) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K_z - 1. \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} & \left[10\left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+\right) + 9nt_j^c \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+}\right) \right] r(t_j^c) \\ & - r_{mp} \left[2\left(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+\right) + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+}\right) \right] \lambda(t_j^c) \\ & + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ + \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+}\right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\ & + r_{mp} \left[\frac{4}{n}\left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+\right) + 3t_j^c \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+}\right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\ & + r_{mp}\delta \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+}\right) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.35b)$$

$$\begin{aligned} & \left[10\left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^-\right) + 9nt_j^c \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-}\right) \right] r(t_j^c) \\ & - r_{mp} \left[2\left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^-\right) + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-}\right) \right] \lambda(t_j^c) \\ & + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- + \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-}\right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\ & + r_{mp} \left[\frac{4}{n}\left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^-\right) + 3t_j^c \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-}\right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\ & - r_{mp}\delta \sin\left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-}\right) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.35c)$$

Il est possible de remarquer que les plans \mathcal{P}_k introduits définissent un espace contenu strictement dans le cône de l'ensemble admissible. Il est possible d'augmenter le nombre de points pour raffiner la discrétisation. Les contraintes linéarisées sont conservatives, c'est-à-dire que les contraintes sont toujours satisfaites, mais la linéarisation se fait au détriment de la taille de l'espace admissible.

5.2.3 PROBLÈMES DE MAINTIEN À POSTE À RÉSOUDRE

En reprenant les notations du chapitre 4, le problème de maintien à poste à résoudre pour un cycle court est adapté du problème 4.2 et s'écrit :

Problème 5.1. Trouver les vecteurs de variables binaires \bar{F} et $\bar{\gamma}$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{\bar{F}, \bar{\gamma}} J = \mathbf{1}_{4(N+1),1}^T \bar{F},$$

t. q. :

x_0 donné,

$$\Theta_{\text{mp}} \mathfrak{G} \bar{F} \leq \delta_{2N \times 1} - \Theta_{\text{mp}} (\mathfrak{g}_x x_0 + \mathfrak{g}_c), \quad \text{Maintien à poste}$$

$$- \Theta_{\text{mp}} \mathfrak{G} \bar{F} \leq \delta_{2N \times 1} + \Theta_{\text{mp}} (\mathfrak{g}_x x_0 + \mathfrak{g}_c), \quad \text{Maintien à poste}$$

$$\Xi_1 \bar{F} + \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1}, \quad \text{Disjonction des poussées}$$

$$\forall k = 2, \dots, p, \quad \Xi_{k,F}^l \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{0}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } p \geq 2, \quad \text{Durée des poussées}$$

$$\Xi_{1,F}^d \bar{F} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4N \times 1}, \quad \text{Inter-poussées}$$

$$\forall k = 2, \dots, q, \quad \Xi_{k,F}^d \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } q \geq 2, \quad \text{Inter-poussées}$$

$$\forall k = 2, \dots, m, \quad \Xi_{k,F}^s \bar{F} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } m \geq 2, \quad \text{Inter-poussées}$$

$$\begin{aligned} & (\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1}) r_{mp} \varphi(t_j^c) + (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \frac{r_{mp} \dot{\varphi}(t_j^c)}{n} \\ & + r_{sk} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_z} \right) \geq 0, \quad \theta_k = k \frac{2\pi}{K_z}, \quad k = 1, \dots, K_z - 1, \end{aligned} \quad \text{Contrainte finale}$$

$$\begin{aligned} & \left[10 \left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+ \right) + 9 n t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] r(t_j^c) \\ & - r_{mp} \left[2 \left(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ \right) + 3 \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \lambda(t_j^c) \\ & + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\ & + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+ \right) + 3 t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\ & + r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \geq 0, \quad \nu_k^+ = k \frac{2\pi}{K_{xy}^+}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^+ - 1, \end{aligned} \quad \text{Contrainte finale}$$

$$\begin{aligned} & \left[10 \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 9 n t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] r(t_j^c) \\ & - r_{mp} \left[2 \left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- \right) + 3 \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \lambda(t_j^c) \\ & + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 3t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\
& - r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \leq 0, \quad \nu_k^- = k \frac{2\pi}{K_{xy}^-}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^- - 1.
\end{aligned} \tag{Contrainte finale}$$

◦

Dans le cas où le système propulsif utilisé est le système idéal pour lequel le satellite dispose d'un propulseur par face, l'expression du problème 5.1 est à adapter avec les matrices utilisées dans le problème 4.3.

5.2.4 CONTRAINTES DE MAINTIEN À POSTES QUADRATIQUES

Les contraintes de maintien à poste sont habituellement exprimées en utilisant les positions géographiques relatives comme cela est expliqué dans la section 1.4.1.1 sous la forme :

$$|\varphi| \leq \delta \text{ et } |\lambda| \leq \delta. \tag{5.36}$$

Comme nous l'avons remarqué dans la section 1.4.1.2, les contraintes de maintien à poste peuvent être exprimées à l'aide des éléments orbitaux équinoxiaux relatifs sous la forme :

$$2\sqrt{i_x^2 + i_y^2} \leq \delta, \tag{5.37a}$$

$$2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \delta + \ell_{M\Theta}, \tag{5.37b}$$

$$2\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq \delta - \ell_{M\Theta}, \tag{5.37c}$$

mais ne sont pas étudiées dans la littérature. Puisque ces contraintes sont exprimées sous forme quadratique ou conique, et définissent des espaces admissibles convexes, il est possible d'approcher ces espaces par des polytopes, de la même façon que ce qui a été fait pour les contraintes terminales.

En découpant l'intervalle $[0, 2\pi]$ en sous-intervalles définis par les angles respectivement donnés par :

$$\tilde{\theta}_k = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_z}, \quad k = 0, \dots, \tilde{K}_z - 1, \quad \tilde{K}_z \geq 3, \tag{5.38a}$$

$$\tilde{\nu}_k^+ = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+}, \quad k = 0, \dots, \tilde{K}_{xy}^+ - 1, \quad \tilde{K}_{xy}^+ \geq 3, \tag{5.38b}$$

$$\tilde{\nu}_k^- = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^-}, \quad k = 0, \dots, \tilde{K}_{xy}^- - 1, \quad \tilde{K}_{xy}^- \geq 3, \tag{5.38c}$$

il est possible d'approcher les contraintes (5.37a), (5.37b) et (5.37c) respectivement par les ensembles de contraintes linéaires :

$$\begin{aligned}
& \left(\sin \tilde{\theta}_k - \sin \tilde{\theta}_{k+1} \right) i_x + \left(\cos \tilde{\theta}_{k+1} - \cos \tilde{\theta}_k \right) i_y + \frac{\delta}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_z} \right) = 0, \\
& k = 0, \dots, \tilde{K}_z - 1,
\end{aligned} \tag{5.39a}$$

$$2(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+)e_x + 2(\cos \nu^+ k + 1 - \cos \nu_k^+)e_y + \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+}\right)(\delta + \ell_{M\Theta}) \geq 0,$$

$$k = 0, \dots, \tilde{K}_{xy}^+ - 1, \quad (5.39b)$$

$$2\left(\sin \tilde{\nu}_k^- - \sin \tilde{\nu}_{k+1}^-\right) e_x + 2\left(\cos \tilde{\nu}_{k+1}^- - \cos \tilde{\nu}_k^-\right) e_y + \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^-}\right)(\delta - \ell_{M\Theta}) \geq 0,$$

$$k = 0, \dots, \tilde{K}_{xy}^- - 1. \quad (5.39c)$$

Les trois ensembles de contraintes linéaires (5.39a), (5.39b) et (5.39c) peuvent alors remplacer les contraintes de maintien à poste exprimées en termes de positions géographiques relatives dans le problème 5.1 pour donner le problème de maintien à poste suivant :

Problème 5.2. Trouver les vecteurs de variables binaires \bar{F} et $\bar{\gamma}$ solutions du problème de minimisation :

$$\min_{\bar{F}, \bar{\gamma}} J = \mathbf{1}_{4(N+1),1}^T \bar{F},$$

t. q. :

x_0 donné,

$$\left(\sin \tilde{\theta}_k - \sin \tilde{\theta}_{k+1}\right) i_x + \left(\cos \tilde{\theta}_{k+1} - \cos \tilde{\theta}_k\right) i_y + \frac{\delta}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_z}\right) = 0,$$

$$\tilde{\theta}_k = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_z},$$

Maintien à poste

$$2(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+)e_x + 2(\cos \nu^+ k + 1 - \cos \nu_k^+)e_y$$

$$+ \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+}\right)(\delta + \ell_{M\Theta}) \geq 0, \quad \tilde{\nu}_k^+ = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+},$$

Maintien à poste

$$2\left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^-\right) e_x + 2\left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^-\right) e_y$$

$$+ \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^-}\right)(\delta - \ell_{M\Theta}) \geq 0, \quad \tilde{\nu}_k^- = k \frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^-},$$

Maintien à poste

$$\Xi_1 \bar{F} + \bar{\gamma} = 0, \quad \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{N+1},$$

Disjonction des poussées

$$\forall k = 2, \dots, p, \quad \Xi_{k,F}^l \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^l \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } p \geq 2,$$

Durée des poussées

$$\Xi_{1,F}^d \bar{F} + \Xi_{1,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{1}_{4N \times 1},$$

Inter-poussées

$$\forall k = 2, \dots, q, \quad \Xi_{k,F}^d \bar{F} + \Xi_{k,\gamma}^d \bar{\gamma} \leq \mathbf{2}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } q \geq 2,$$

Inter-poussées

$$\forall k = 2, \dots, m, \quad \Xi_{k,F}^s \bar{F} \leq \mathbf{1}_{4(N-k+1) \times 1} \text{ si } m \geq 2,$$

Inter-poussées

$$\left(\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1}\right) r_{mp} \varphi(t_j^c) + \left(\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k\right) \frac{r_{mp} \dot{\varphi}(t_j^c)}{n}$$

$$+ r_{sk} \delta \sin\left(\frac{2\pi}{K_z}\right) \geq 0, \quad \theta_k = k \frac{2\pi}{K_z}, \quad k = 1, \dots, K_z - 1,$$

Contrainte finale

$$\left[10\left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+\right) + 9nt_j^c \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+}\right)\right] r(t_j^c)$$

$$- r_{mp} \left[2\left(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+\right) + 3 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{K}_{xy}^+}\right)\right] \lambda(t_j^c)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\
& + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+ \right) + 3t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\
& + r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \geq 0, \quad \nu_k^+ = k \frac{2\pi}{K_{xy}^+}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^+ - 1, \quad \text{Contrainte finale} \\
& \left[10 \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 9nt_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] r(t_j^c) \\
& - r_{mp} \left[2 \left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- \right) + 3 \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \lambda(t_j^c) \\
& + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\
& + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 3t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\
& - r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \leq 0, \quad \nu_k^- = k \frac{2\pi}{K_{xy}^-}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^- - 1. \quad \text{Contrainte finale}
\end{aligned}$$

◦

Dans la section suivante, l'enchaînement des solutions du problème 5.1 ou du problème 5.2 est testé sur un exemple réaliste de maintien à poste sur une durée longue d'un an et une analyse paramétrique est conduite afin de déduire des choix pertinents pour la réussite du processus.

5.3 SIMULATIONS ET ANALYSE PARAMÉTRIQUE

La solution du problème de maintien à poste sur un cycle long d'une durée d'un an, en résolvant le problème de maintien à poste 5.1 sur les horizons courts les uns à la suite des autres. Deux types de systèmes propulsifs sont considérés dans cette étude :

- le système propulsif décrit dans le brevet de la référence [Anzel, 1995],
- un système propulsif idéal pour lequel le satellite dispose d'un propulseur sur chacune de ses faces.

Dans la suite de cette section, l'effet de différents paramètres est étudié :

- méthode d'intégration de la dynamique (calcul des matrices de transition avec la bibliothèque chebfun ou intégration de l'équation différentielle par un schéma aux différences finies),
- durée du cycle court,
- nombre de sommets pour le polytope approchant les contraintes terminales quadratiques (valeurs de K_z , K_{xy}^+ et K_{xy}^-),
- contraintes de maintien à poste en position géographiques ou en éléments orbitaux,
- angles de déviation et de déflexion pour les propulseurs du système propulsif de la référence [Anzel, 1995].

Dans toute la suite de l'analyse numérique, si la valeur d'un paramètre n'est pas précisée, celle-ci sera égale à sa valeur nominale définie dans le tableau 5.1. Par ailleurs, une étude a été menée dans le cas où un des propulseurs est en panne et ne peut plus fournir de poussée sur le reste de l'horizon de maintien à poste.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
date initiale	1 ^{er} janvier 2034	cycle court	7 jours
masse	4850 kg	K_z	16
λ_{mp}	118°	K_{xy}^+	16
F_{\max}	0,265 N	K_{xy}^-	16
I_{sp}	2005 s	\tilde{K}_z	16
angle θ	63,64°	\tilde{K}_{xy}^+	16
angle α	7,03°	\tilde{K}_{xy}^-	16
intégration	Hermite-Simpson	$\Delta\tau$	5 min
		m	4
		p	1
		q	1

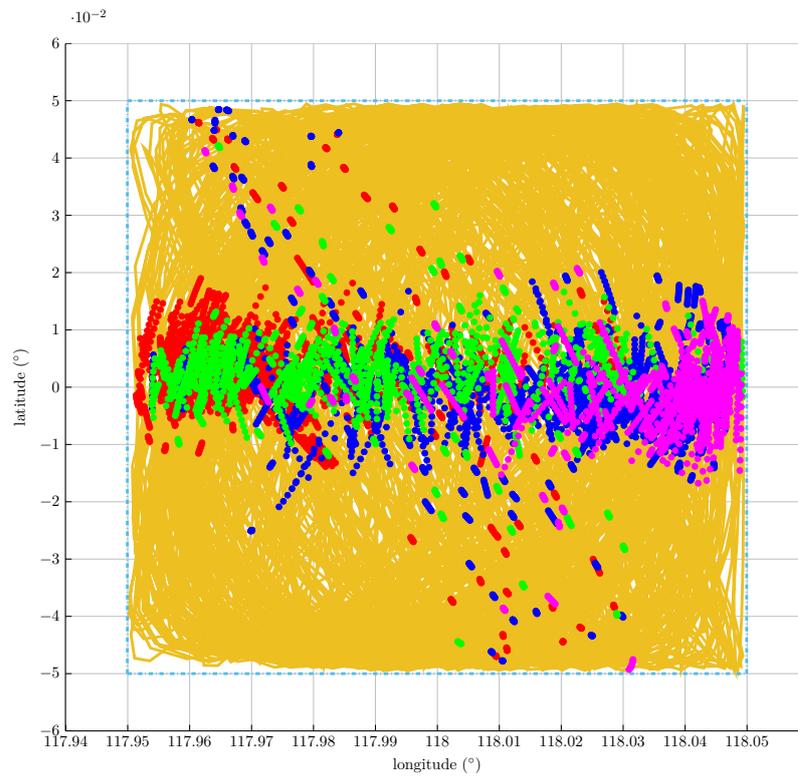
TABLE 5.1 – Valeurs nominales pour les simulations numériques.

5.3.1 RÉOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS NOMINAL CHOISI

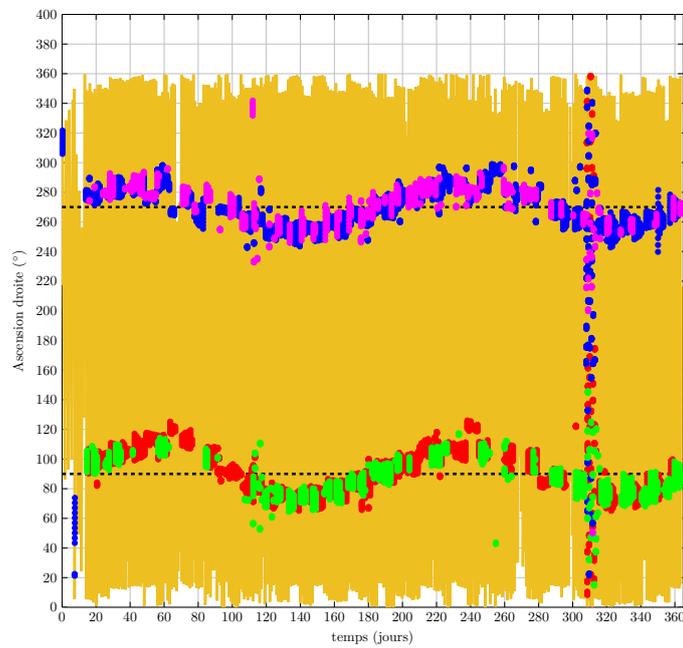
Cette sous-section a pour objectif d'analyser la solution du problème de maintien à poste dans les conditions nominales définies par le tableau 5.1 avec le système propulsif décrit par [Anzel, 1995] au regard de l'analyse physique menée dans la section 1.4.

La figure 5.4a montre la trajectoire du satellite dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste ainsi que l'indication des poussées de chacun des propulseurs sur la trajectoire. Il apparaît que les poussées ont lieu lorsque le satellite se trouve près de l'équateur, en général lorsque la latitude du satellite est comprise entre $-0,02^\circ$ et $+0,02^\circ$. Cela correspond au fait que les poussées sont plus efficaces lorsque le satellite se trouve aux nœuds de l'orbite et est en accord avec les principes empiriques de maintien à poste établis. Les poussées du propulseur Nord-Est sont plus longues lorsque la longitude est faible, c'est-à-dire sur le côté Ouest de la fenêtre de maintien à poste, et les poussées du propulseur Sud-Ouest sont davantage présentes lorsque la longitude est élevée, c'est-à-dire sur le bord Est de la fenêtre. Les poussées des propulseurs Sud-Est et Nord-Ouest sont réparties sur l'ensemble de la plage de longitude accessible.

La figure 5.4b montre l'évolution de l'ascension droite du satellite au cours du temps comprise entre 0° et 360° avec l'indication des poussées de chacun des propulseurs. D'après cette courbe, les deux propulseurs Nord sont actifs lorsque le satellite se trouve autour d'une ascension droite de 90° et les deux propulseurs Sud sont actifs lorsque le satellite se trouve autour d'une ascension droite de 270° . Ceci correspond à la stratégie fondée sur l'analyse physique des perturbations, établie dans la section 1.4.



(a) Trajectoire géographique



(b) Ascension droite

FIGURE 5.4 – Trajectoire dans le plan (λ, φ) , ascension droite et indication des poussées :
 — : trajectoire du satellite, - · - : fenêtre de maintien à poste
 ● : propulseur Nord-Est, ● : propulseur Sud-Est,
 ● : propulseur Nord-Ouest, ● : propulseur Sud-Ouest.

La consommation totale obtenue à la fin de l'année est de 129,2 m/s. La figure 5.5a montre la consommation sur chaque cycle court (une semaine dans le cas nominal) et la figure 5.5b la consommation cumulée semaine après semaine. Il est possible de remarquer sur la figure 5.5a qu'au milieu de l'année (autour des semaines 20-30) et à la fin de l'année (à partir de la semaine 45), la consommation est plus élevée. Cela se voit également sur la figure 5.5b puisque sur ces semaines, la pente de la courbe de consommation augmente. Puisque les poussées sont de type on-off, l'évolution de la consommation est directement proportionnelle aux durées des poussées qui sont affichées sur la figure 5.6. Selon cette figure, la durée des poussées au milieu et à la fin de l'année est plus importante. Les perturbations orbitales à corriger semblent donc plus importantes sur ces semaines. Par ailleurs, comme la durée des sous-intervalles de la grille temporelle choisie est de 5 minutes, il est possible de remarquer que la durée de chaque poussée est un multiple de 5 minutes. Les poussées sont en général d'une durée inférieure à 80 minutes.

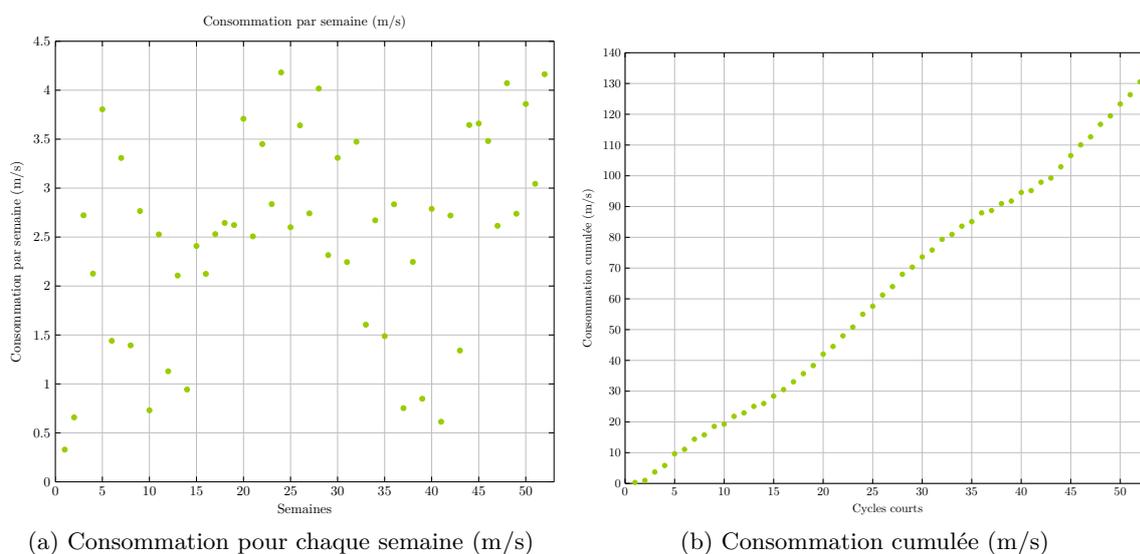


FIGURE 5.5 – Consommation pour chaque semaine et consommation cumulée sur un an (m/s)

La figure 5.7 montre la durée entre les poussées de chaque propulseur. Il apparaît que les poussées sont majoritairement séparées d'une durée égale à un jour, ce qui correspond à la stratégie développée en utilisant une analyse physique des perturbations et établie dans la section 1.4. Un certain nombre de poussées sont espacées de deux jours. Ainsi, les poussées ont tendance à avoir lieu au même moment dans la journée, et s'il arrive que des poussées ne sont pas nécessaires un jour donné, la poussée est reportée au jour d'après, ou plusieurs jours plus tard, au même moment de la journée.

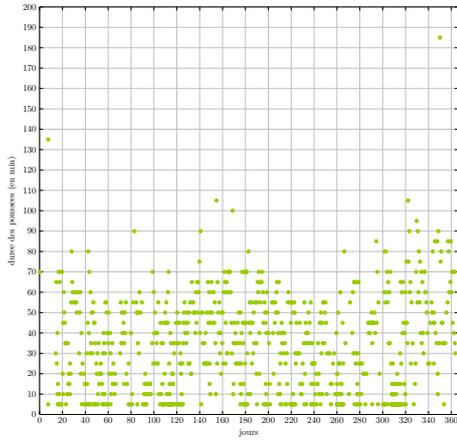


FIGURE 5.6 – Durée des poussées tous propulseurs confondus (en minutes).

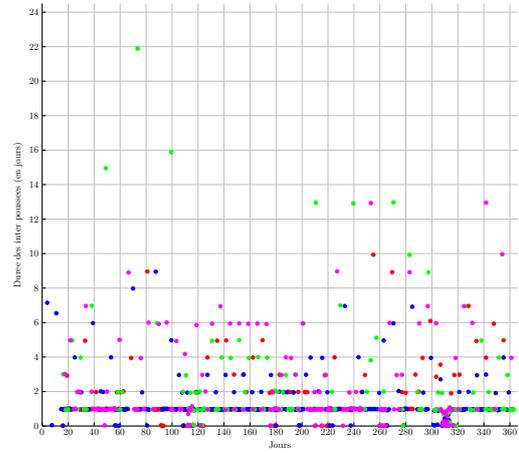
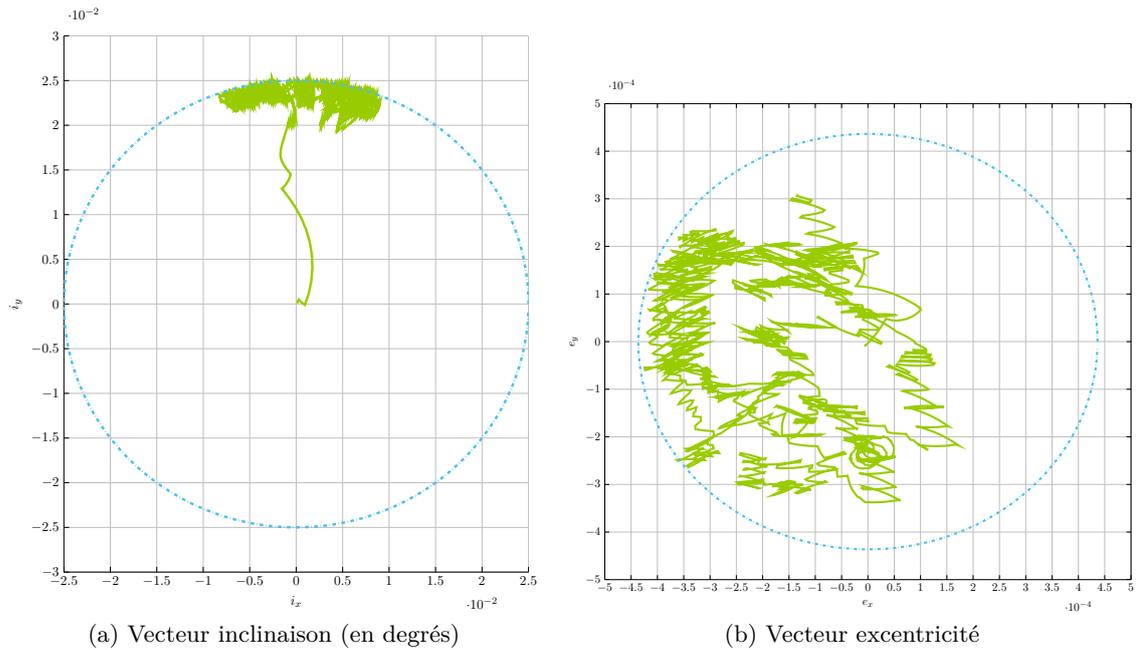


FIGURE 5.7 – Durée des intervalles sans poussées pour chaque propulseur :
 ● : Nord-Est, ● : Sud-Est,
 ● : Nord-Ouest, ● : Sud-Ouest.

Pour établir les stratégies basées sur l'analyse physique des perturbations, la référence [Campan and Brousse, 1994] suppose que les composantes perturbatrices hors-plan n'induisent de dérive séculaire que sur la composante i_y du vecteur inclinaison. C'est ce que montre la figure 5.8a. Le point de départ est le point $(0, 0)$ pour les deux premières semaines, la trajectoire dans le plan (i_x, i_y) évolue exclusivement dans la direction $+i_y$, et au bout de la troisième semaine les propulseurs assurent que le vecteur inclinaison reste dans la fenêtre admissible et contrent la dérive séculaire en i_y tout en permettant les oscillations de i_x autour de 0. On retrouve, par ailleurs, sur la figure 5.8b un constat établi par Soop dans [Soop, 1994] : la norme du vecteur excentricité est bornée par $4,5 \cdot 10^{-4}$.



(a) Vecteur inclinaison (en degrés)

(b) Vecteur excentricité

FIGURE 5.8 – Vecteurs inclinaison et excentricité

Dans le paragraphe F.1.2.3, une expression d'une borne sur le rayon relatif a pu être établie (voir l'équation (F.26)). Cette borne fait intervenir un terme Γ_l qui est la dérivée seconde (supposée constante) de la longitude par rapport au temps. En effectuant une régression polynomiale de degré 2 sur la trajectoire libre pendant 60 jours à partir du centre de la fenêtre, le mouvement de la longitude peut s'écrire sous la forme :

$$\lambda(t) - \lambda_{mp} = \gamma_l t^2 + \beta_l t + \alpha_l \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma_l = -1,7644 \cdot 10^{-5} \text{ rad/j}^2, \\ \beta_l = 1,2715 \cdot 10^{-6} \text{ rad/j}, \\ \alpha_l = 3,1548 \cdot 10^{-7} \text{ rad.} \end{cases} \quad (5.40)$$

Il vient alors $\Gamma_l = 2\gamma_l = -3,5288 \cdot 10^{-5} \text{ rad/j}^2$. En prenant la valeur maximale de l'excentricité égale à $4,5 \cdot 10^{-4}$, la borne sur le rayon relatif est de 20,38 km. Sur la courbe de la figure 5.9, la valeur maximale atteinte par le rayon relatif est de 14,24 km. La borne donnée par l'équation (F.26) est donc vérifiée. Une marge existe cependant entre la valeur maximale atteinte par le rayon relatif et la valeur de la borne. Une explication de cet écart peut venir du fait que la borne a été établie dans le cadre d'une stratégie de correction de la longitude à poussée forte. Par conséquent, il est bien légitime de ne pas donner de bornes sur le rayon pour assurer le maintien à poste.

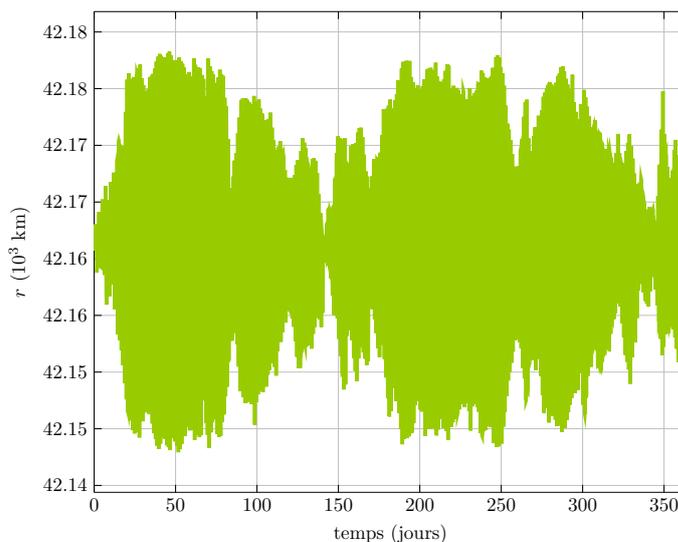


FIGURE 5.9 – Rayon en fonction du temps.

Toutes les analyses menées dans ce paragraphe valident la stratégie de résolution du problème de maintien à poste sur un horizon long mise en place. Il est alors possible d'étudier l'effet des paramètres dont dépend cette stratégie.

5.3.2 EFFET DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DE LA DYNAMIQUE

Cette sous-section a pour objectif d'analyser l'effet de la méthode d'intégration de la dynamique dans le problème de maintien à poste. Le tableau 5.2 montre que la méthode d'intégration choisie influence peu la consommation totale sur une année. La figure 5.10 montre que l'évolution de la consommation cumulée sur un an diffère entre les deux méthodes

d'intégration à partir de la semaine 26. Les deux méthodes conduisent à la même structure de consommation pour laquelle des poussées sont plus longues en milieu et en fin d'année.

La différence entre ces deux méthodes réside dans le temps de calcul des matrices \mathfrak{B} , \mathfrak{b}_x et \mathfrak{b}_c . La méthode de calcul par l'intégration des matrices de transition à l'aide de la bibliothèque *chebfun* nécessite environ 40 minutes de calculs pour chacune des semaines tandis que la méthode de calcul par l'application d'un schéma numérique aux différences finies nécessite environ 15 minutes de calculs pour chaque semaine (sur un intel insideTM core i5 vPro avec Matlab[®]r2014). Ainsi, même si la consommation finale est légèrement plus faible avec la méthode utilisant *chebfun*, nous préconisons d'utiliser la méthode aux différences finies d'Hermite-Simpson. D'autres schémas numériques d'ordre plus élevé pourraient être utilisés, et leur effet sur la consommation totale analysé, mais cette étude ne rentre pas dans le cadre de ce travail.

Méthode d'intégration	chebfun	Hermite-Simpson
Consommation (m/s)	130,0	129,2

TABLE 5.2 – Effet de la méthode d'intégration de la dynamique sur la consommation annuelle.

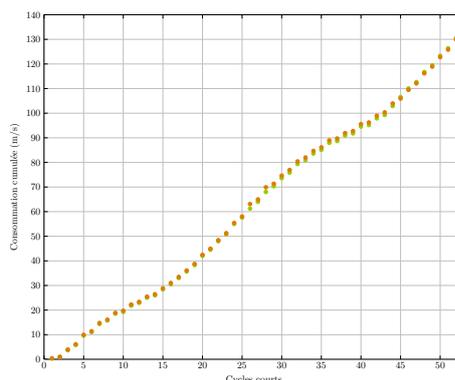


FIGURE 5.10 – Consommation cumulée sur une année avec les trois méthodes d'intégration numériques : ● intégration des matrices de transition avec *chebfun*, ● schéma d'Hermite-Simpson.

5.3.3 EFFET DE LA DURÉE DE L'HORIZON COURT

Comme le montre le tableau 5.3, la variation de la consommation annuelle en fonction de la durée de l'horizon court reste globalement faible sur les cas testés. Sur la figure, 5.11 qui montre l'évolution de la durée cumulée des poussées (directement proportionnelle à la consommation) pour chaque durée de cycle court, il est possible de remarquer que jusqu'à environ la moitié de l'année, les courbes évoluent à peu près ensemble, puis certaines s'écartent. C'est le cas notamment des courbes correspondant aux cycles court de 4 et 9 jours. Lorsque la durée du cycle court augmente, la consommation diminue globalement, sauf pour les cycles courts de 4 et 9 jours. En effet, avoir un horizon court plus long permet d'avoir un horizon de prédiction des perturbations plus grand. Cependant, comme il est possible de s'y attendre, le temps de résolution moyen du problème de maintien à poste

en nombres entiers augmente lorsque la durée du cycle court augmente car les matrices de contraintes sont de plus en plus grandes, sauf dans le cas d'un cycle court de 10 jours pour lequel la durée de résolution moyenne est plus petite. La durée nominale du cycle court a été choisie égale à 7 jours pour avoir une consommation assez faible tout en ayant un temps de résolution par cycle raisonnable. Une durée d'une semaine correspond par ailleurs à une subdivision commode d'une année.

Durée du cycle court (j)	Consommation (m/s)	Temps moyen de calcul par cycle (s)
2	132,4	4,99
3	131,14	14,48
4	132,01	30,72
5	130,03	67,90
6	129,45	83,16
7	129,55	160,94
8	129,54	187,45
9	144,71	312,08
10	128,54	249,41

TABLE 5.3 – Consommation annuelle (en m/s) en fonction de la durée du cycle court.

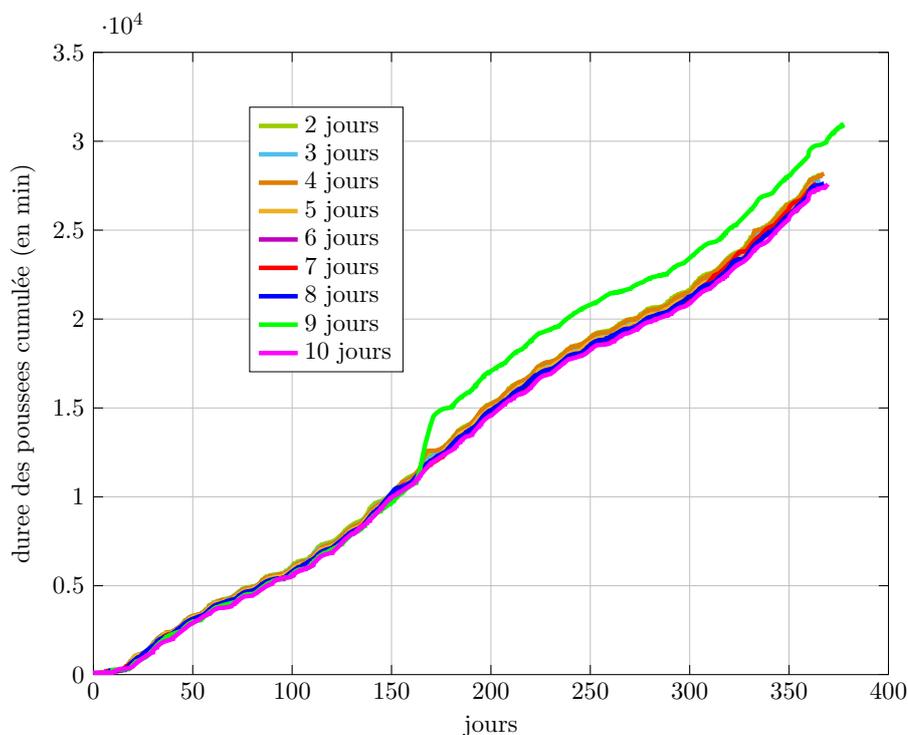


FIGURE 5.11 – Longueur cumulée des poussées pour différentes durées du cycle court.

5.3.4 APPROXIMATION DES CONTRAINTES TERMINALES QUADRATIQUES

L'approximation des contraintes terminales quadratiques par un ensemble de contraintes linéaires, décrite dans la section **K**, dépend des valeurs de K_z (le nombre de segments qui approche le cercle frontière), K_{xy}^+ et K_{xy}^- (le nombre de plans qui approchent le cône frontière). Le tableau 5.4 montre l'évolution de la consommation annuelle en fonction de la finesse de l'approximation. Sur la figure 5.12 affichant la consommation cumulée par semaine, une divergence des courbes apparaît à partir de la semaine 17 alors que pour les semaines 1 à 16, les consommations restent quasiment identiques dans tous les cas. Une étude approfondie doit être menée pour trouver la cause de cette divergence. Le nombre de sommets choisis pour l'approximation a très peu d'influence sur la consommation finale. Nous avons donc choisi pour le cas nominal une valeur de K_z , K_{xy}^+ et K_{xy}^- qui permet d'obtenir la consommation annuelle totale la plus petite. De la même façon, le temps moyen de calcul de chaque cycle court ne peut pas être un facteur déterminant de choix du nombre optimal de sommets pour l'approximation des contraintes quadratiques. Néanmoins, lorsque $K_z = K_{xy}^+ = K_{xy}^-$, la durée moyenne de résolution par cycle est anormalement petite.

Dans la sous-section **K**, le cas $K_z = 2$ est interprété comme étant équivalent à une contrainte de vitesse finale hors-plan nulle. Cela conduit à une contrainte d'annulation de la dérivée de la latitude en fin d'horizon court. Il est également possible d'ajouter une contrainte d'annulation de la dérivée de la longitude en fin d'horizon court. Ce faisant, la consommation annuelle obtenue est de 191,6 m/s. La figure 5.13 montre que la trajectoire n'occupe pas intégralement la fenêtre de maintien à poste par comparaison à la trajectoire obtenue dans le cas nominal (voir la figure 5.4a). Ces deux contraintes sont donc beaucoup trop restrictives.

K_z	K_{xy}^+	K_{xy}^-	Consommation annuelle (m/s)	Temps moyen de calcul par cycle (s)
3	3	3	131,9	139,56
4	4	4	130,7	138,14
5	5	5	134,0	144,16
6	6	6	129,2	122,99
7	7	7	129,2	130,44
8	8	8	130,2	137,46
10	10	10	129,5	101,19
12	12	12	129,4	104,22
14	14	14	129,3	139,98
16	16	16	129,2	160,94
32	32	32	132,7	85,01
64	64	64	130,6	142,16

TABLE 5.4 – Impact du nombre d'hyperplans pour l'approximation des contraintes terminales sur la consommation annuelle (en m/s).

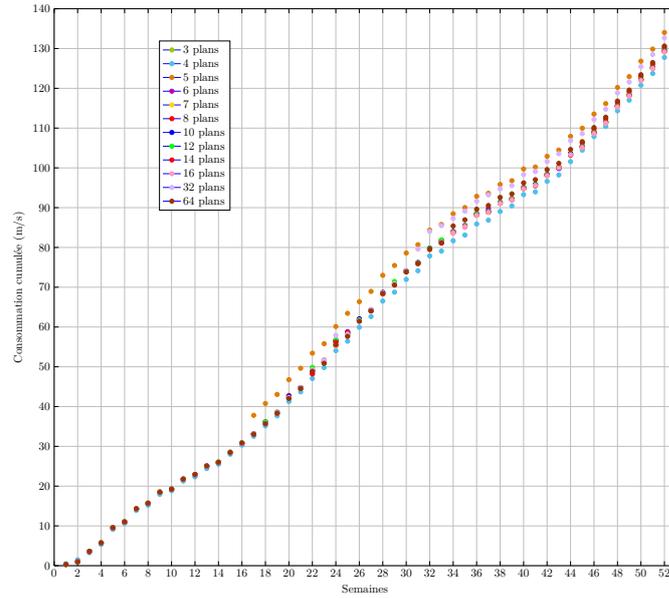


FIGURE 5.12 – Consommation cumulée pour différentes approximations des contraintes terminales.

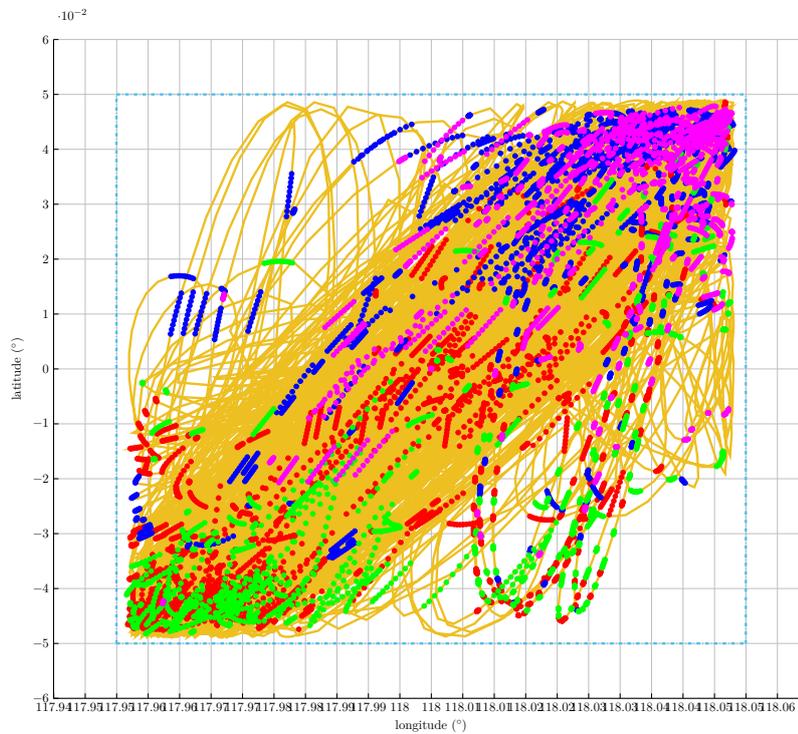


FIGURE 5.13 – Trajectoire du satellite dans le plan (λ, φ) avec la fenêtre de maintien à poste.

- : propulseur Nord-Est, • : propulseur Sud-Est,
- : propulseur Nord-Ouest, • : propulseur Sud-Ouest.

5.3.5 APPROXIMATION DES CONTRAINTES QUADRATIQUES DE MAINTIEN À POSTE

Les contraintes de maintien à poste peuvent être exprimées à l'aide des éléments orbitaux équinoxiaux relatifs et s'écrivent alors sous la forme de contraintes quadratiques. Dans la section 5.2.4, ces contraintes ont été approchées par un ensemble de contraintes linéaires. Cet ensemble dépend du nombre d'hyperplans choisi pour approcher l'espace admissible convexe. Plus ce nombre est petit, plus l'espace dans lequel le satellite est confiné est restreint, et par conséquent, plus la consommation de carburant est élevée. La tableau 5.5 montre l'impact de ce nombre d'hyperplans sur la consommation annuelle. L'effet de la réduction de l'espace admissible à cause de l'approximation intérieure est nettement visible sur les courbes d'évolution du vecteur inclinaison de la figure 5.14 sur laquelle sont aussi représentés les polygones approchant le cercle de la contrainte. Puisque les polygones sont à l'intérieur du cercle, l'ensemble des contraintes linéaires est conservatif, c'est-à-dire que l'approximation étant réalisée par l'intérieur, les contraintes de maintien à poste ne seront jamais violées. Cette réduction d'espace admissible peut être quantifié de la façon suivante. L'aire que le vecteur inclinaison peut occuper dans le plan (i_x, i_y) est :

$$\mathcal{A} = \pi \frac{\delta^2}{4}, \quad (5.41)$$

et l'aire d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{\delta}{2}$ avec K_z côtés définis par l'angle au centre $\frac{2\pi}{K_z}$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_{K_z} = \frac{K_z \delta^2}{8} \sin\left(\frac{2\pi}{K_z}\right). \quad (5.42)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, il vient : $\mathcal{A}_{K_z} \xrightarrow{K_z \rightarrow \infty} \mathcal{A}$.

Par ailleurs, l'impact de ce nombre de plans sur l'évolution de la durée de poussée cumulée est plus marqué que dans les analyses précédentes (voir la figure 5.15). Ainsi, un nombre de sommets élevé conduit à une meilleure approximation des contraintes quadratiques et à une réduction de la consommation annuelle.

5.3.6 ANGLES DE DÉVIATION ET DE DÉFLEXION DES PROPULSEURS

Pour le système de propulsion décrit dans la référence [Anzel, 1995] et repris dans la section 1.4.2, la direction des poussées dépend d'un angle de déviation par rapport à la direction normale au plan de l'orbite et un angle de déflection par rapport à la direction Terre-satellite. Comme cela est indiqué dans la référence [Anzel, 1988], cette inclinaison des propulseurs conduit à une perte de poussée dans la direction Nord-Sud dépendant du cosinus de cet angle de déviation. Comme les perturbations hors-plan sont les plus difficiles à corriger, cette perte conduit à une augmentation de la consommation lorsque les propulseurs sont inclinés vers le plan de l'orbite. De plus, les prévisions données dans la section F.3 et issues de la référence [Soop, 1994] pour la correction hors-plan doivent être adaptées pour tenir compte de cette perte. Par exemple, pour une inclinaison à corriger de $\Delta i_{1 \text{ an}} = 0,758^\circ$, il est nécessaire de consommer 78,67 m/s avec un propulseur perpendiculaire à l'équateur. Dans le cas d'un angle de déviation nominal $\theta = 63,64^\circ$, il est nécessaire de consommer

173,26 m/s pour cette même correction. Le tableau 5.6 montre l'effet de l'angle d'inclinaison sur la consommation annuelle et la compare aux valeurs de la référence [Soop, 1994]. Dans ce tableau, les troisième et quatrième colonnes correspondent aux valeurs d'inclinaison à corriger selon la référence [Soop, 1994], ajustées avec les valeurs d'inclinaison des propulseurs. La première ligne correspond aux valeurs à corriger dans le cas où les propulseurs étaient orientés dans la direction normale au plan de l'équateur.

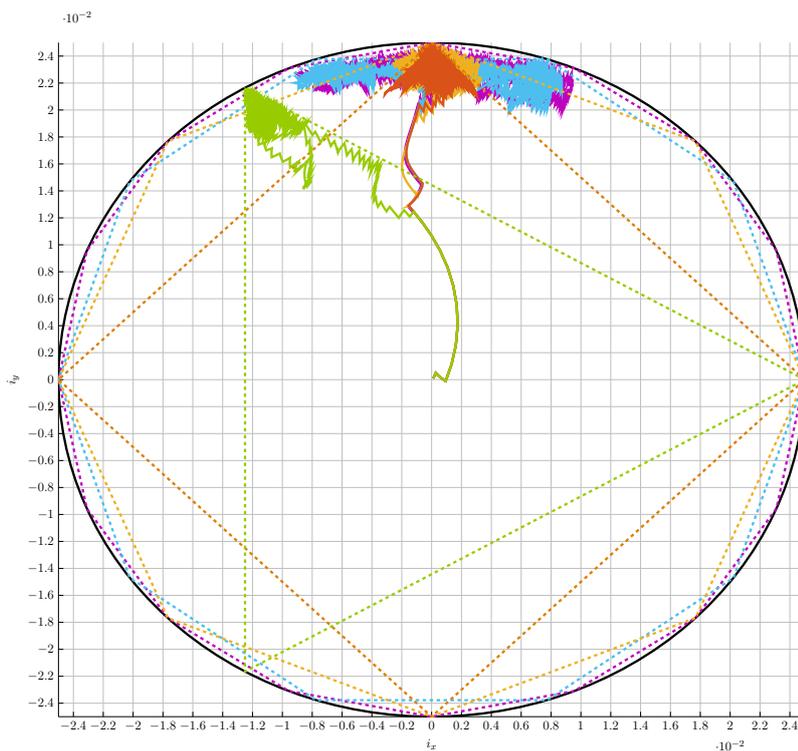


FIGURE 5.14 – Trajectoire du vecteur inclinaison dans le plan (i_x, i_y) en fonction du nombre de plans pour l'approximation de la contrainte de maintien à poste quadratique :
— 3 plans, — 4 plans, — 8 plans, — 10 plans, — 16 plans.

\tilde{K}_z	\tilde{K}_{xy}^+	\tilde{K}_{xy}^-	Consommation annuelle (m/s)	Temps moyen de calcul par cycle (s)
3	3	3	138,3	483,45
4	4	4	137,2	203,84
8	8	8	133,2	525,80
10	10	10	130,4	364,88
16	16	16	130,6	516,94

TABLE 5.5 – Impact du nombre d'hyperplans pour l'approximation de la contrainte de maintien à poste en éléments orbitaux équinoxiaux relatifs sur la consommation annuelle (en m/s).

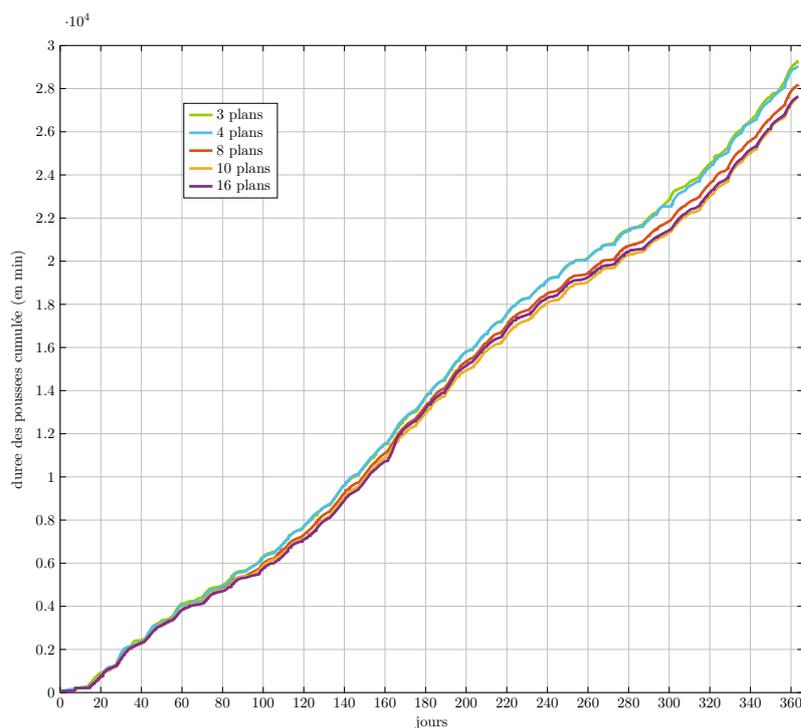


FIGURE 5.15 – Longueur cumulée des poussées pour différentes approximations des contraintes quadratiques de maintien à poste.

Il apparaît nettement que plus l'angle d'inclinaison des propulseurs est élevé, plus la consommation est importante, mais cette dernière reste inférieure aux prédictions de [Soop, 1994] corrigées. La méthode de résolution proposée réussit toujours à obtenir une consommation inférieure à celle prévue par la référence [Soop, 1994]. La figure 5.16 montre bien que plus l'angle de déviation est important, plus les poussées sont longues. Pour obtenir une consommation annuelle minimale, il est nécessaire de choisir un propulseur le moins incliné possible.

Angle θ ($^\circ$)	Consommation (m/s)	Valeurs de [Soop, 1994] corrigée (m/s)	
		minimale	maximale
<i>Valeurs de référence</i>		78,67	99,4
55	104,3	137,2	173,3
60	117,0	157,3	198,8
65	133,7	186,1	235,2
70	162,0	230,0	290,6
75	204,3	304,0	384,1
80	291,0	453,0	572,4
85	572,9	902,6	1140,5

TABLE 5.6 – Consommation annuelle en fonction de l'angle de déviation θ et comparaison avec les valeurs de la référence [Soop, 1994] corrigées de la perte d'efficacité due à la déviation des propulseurs.

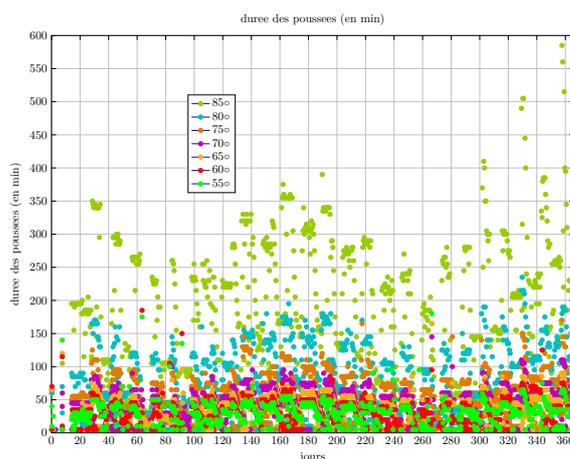


FIGURE 5.16 – Longueur des poussées pour différentes valeurs de la déviation des propulseurs par rapport à l’axe Nord-Sud.

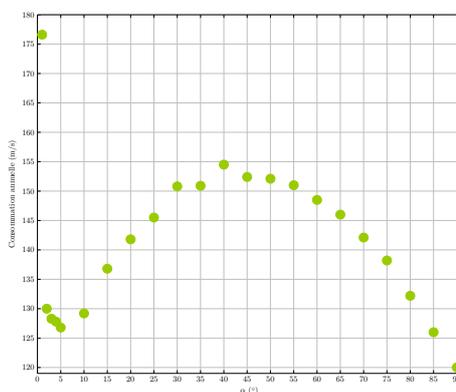


FIGURE 5.17 – Consommation annuelle en fonction de l’angle α de déflexion de la direction poussée des moteurs par rapport à la direction radiale.

5.3.7 CAS DE PANNE

La référence [Gopinath and Srinivasamuthy, 2003], qui utilise le système propulsif présenté dans le brevet de la référence [Anzel, 1995], envisage les cas de panne pour un propulseur du satellite de façon qualitative et affirme que si un des propulseurs est arrêté, le propulseur diamétralement opposé doit aussi l’être. Par exemple, si le propulseur Nord-Est est en panne et ne produit plus de poussée, alors les deux propulseurs Nord-Ouest et Sud-Est suffisent pour assurer le maintien à poste, avec une consommation supérieure. De la même façon, si le propulseur Nord-Ouest est en panne et ne produit plus de poussée, les deux propulseurs Nord-Est et Sud-Ouest suffisent pour assurer le maintien à poste. Le problème de maintien à poste est alors résolu en ajoutant une contrainte d’arrêt des propulseurs pour le propulseur Nord-Est d’une part et pour le propulseur Nord-Ouest d’autre part. D’après la figure 5.18a qui montre la durée des poussées dans le cas où le propulseur Nord-Est est arrêté, le propulseur Sud-Ouest n’est presque jamais actif sur l’année. De la même façon, d’après la figure 5.18b qui montre la durée des poussées dans le cas où le propulseur Nord-Ouest est arrêté, le propulseur Sud-Est n’est presque jamais actif. Les consommations annuelles

sont de 176,0 m/s dans le cas où le propulseur 1 est en panne et de 162,9 m/s dans le cas où le propulseur 2 est en panne. Ces consommations annuelles sont plus élevées que dans le cas nominal. Ainsi, lorsqu'un propulseur est en panne, le maintien à poste est assuré, mais la durée de vie du satellite diminue. Le tableau 5.7 montrant les durées de poussées cumulées de chaque propulseur, confirme cette analyse. Il est intéressant de remarquer que la durée des poussées vers l'Est est plus grande que la durée des poussées vers l'Ouest : il y a donc bien une dérive en longitude à corriger. Les durées à peu près égales des poussées Nord et Sud mettent en lumière le fait que les perturbations hors plan sont périodiques de périodes au moins égale à un an. De plus, dans le cas où deux propulseurs diamétralement opposés sont en panne, le satellite reste toujours contrôlable. En revanche, dans le cas où deux propulseurs non diamétralement opposés sont en panne, le maintien à poste n'est plus assuré.

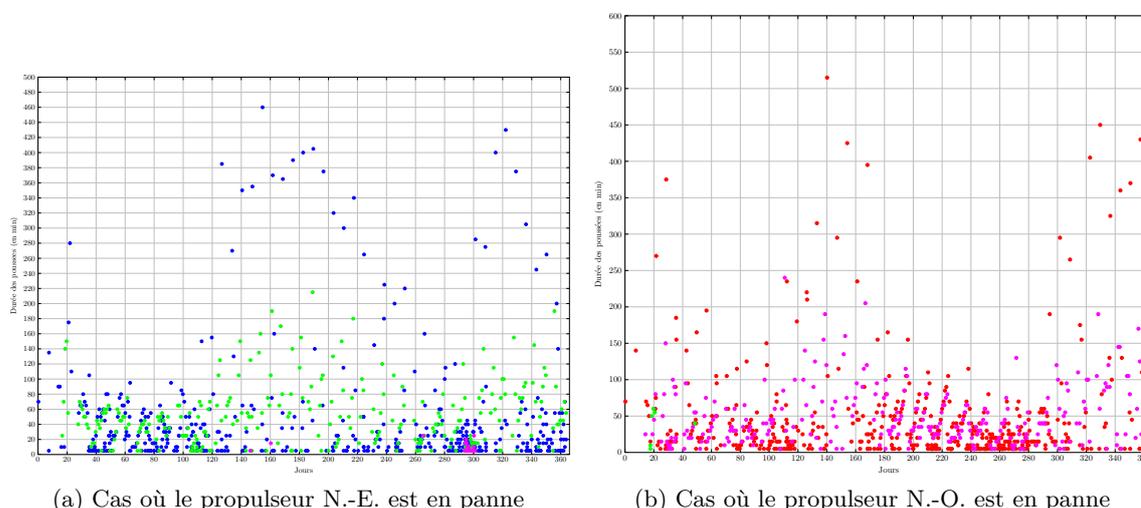


FIGURE 5.18 – Durée des poussées (en minutes) dans le cas de panne de propulseurs :
 ● : propulseur Nord-Est, ● : propulseur Sud-Est,
 ● : propulseur Nord-Ouest, ● : propulseur Sud-Ouest.

	Cas nominal	Panne du propulseur NE	Panne du propulseur SE
NE	5,62 j	0	15,04 j
SE	6,42 j	15,58 j	0
NO	4,12 j	9,96 j	0,15 j
SO	3,03 j	0,33 j	9,61 j
Total	19,19 j	25,87 j	24,80
Total Nord	9,74 j	9,96 j	15,19 j
Total Sud	9,45 j	15,91 j	9,61 j
Total Est	12,04 j	15,58 j	15,04 j
Total Ouest	7,15 j	10,29 j	9,76 j

TABLE 5.7 – Durée cumulée des poussées de chaque propulseur sur un an dans le cas nominal et dans les cas de pannes.

5.3.8 SYSTÈME PROPULSIF IDÉALISÉ

Le système propulsif décrit par la référence [Anzel, 1995] présente l'inconvénient de coupler les corrections dans le plan de l'équateur et les corrections perpendiculaires à ce dernier, alors que les perturbations hors-plan sont les plus difficiles à corriger. C'est pourquoi dans cette section nous proposons d'étudier le maintien à poste d'un satellite équipé d'un système propulsif idéalisé constitué d'un propulseur par face. La consommation annuelle obtenue dans ce cas est de 41,8 m/s. La courbe de consommation cumulée de la figure 5.19 présente la même forme que celle obtenue dans le cas du système propulsif de [Anzel, 1995] avec une consommation plus importante en milieu et en fin d'année.

La figure 5.20 montrant la durée des poussées pour chaque propulseur confirme l'analyse physique effectuée dans la section 1.4 selon laquelle les perturbations hors-plan sont les plus coûteuses à corriger. Concernant les poussées dans le plan de l'équateur, la majorité d'entre elles est réalisée de façon tangentielle à l'orbite et très peu de poussées sont effectuées dans la direction radiale. De façon identique à la sous-section 5.3.1, le propulseur Nord est actif lorsque le satellite est voisin de la position d'ascension droite 90° et le propulseur Sud est actif lorsque le satellite se trouve dans une région proche du point d'ascension droite 270° , comme cela est visible sur la courbe de la figure 5.21. Ces analyses valident elles-aussi la stratégie de résolution du problème de maintien à poste mise en place tout en montrant que le système propulsif réel utilisé basé sur le brevet de [Anzel, 1995] conduit à une perte d'efficacité.

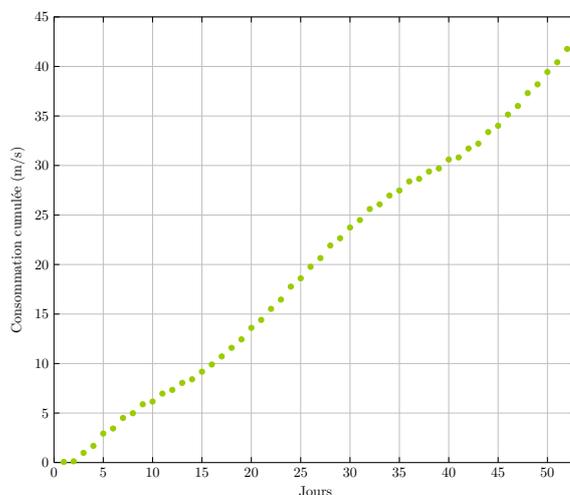


FIGURE 5.19 – Consommation cumulée sur un an dans le cas de l'utilisation d'un système de propulsion idéal.

5.3.9 CONCLUSION

La mise en place des contraintes de fin d'horizon court a permis la résolution du problème de maintien à poste sur un horizon long d'une année. La loi de contrôle ainsi calculée est conforme aux analyse physique qui ont pu être trouvées dans la littérature existante sur le maintien à poste, ce qui permet de valider la stratégie mise en place. Par ailleurs, il est possible d'analyser l'impact sur la consommation annuelle des différents paramètres définissant le problème de maintien à poste. Parmi ceux-ci, la durée de l'horizon court ou la

finesse de l'approximation des contraintes terminales ont peu d'effet tandis que la finesse de l'approximation des contraintes de maintien à poste quadratiques ou les angles d'orientation des propulseurs ont un effet plus important. Ces derniers sont donc à choisir soigneusement pour minimiser le besoin en carburant. Dans tous les cas, le choix du système propulsif de la référence [Anzel, 1995] conduit à une surconsommation par rapport à un système idéal pour lequel le satellite dispose d'un propulseur sur chacune de ses faces. Il est toutefois nécessaire de garder à l'esprit que ces analyses ont été effectuées en supposant que l'influence d'un paramètre sur la consommation est décorrélée des autres paramètres, ce qui n'est pas vrai de façon générale. Les résultats présentés ici représentent donc une première analyse paramétrique qu'il sera nécessaire d'approfondir par la suite.

5.4 OPTIMISATION À HORIZON GLISSANT

Cette section propose une piste de résolution basée sur l'optimisation à horizon glissant afin de réduire la consommation annuelle de la stratégie de maintien à poste.

5.4.1 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE

Dans la section précédent, la loi de contrôle a été calculée avec le modèle de synthèse sur un intervalle $[t_1, t_1 + T]$ puis la trajectoire résultant de cette loi de contrôle a été appliquée sur le même intervalle $[t_1, t_1 + T]$. En utilisant la définition de l'horizon de prédiction donnée par la référence [Mayne et al., 2000], à savoir, l'intervalle de temps pour lequel le contrôle est calculé, et l'horizon de contrôle comme étant l'intervalle sur lequel la loi de contrôle est appliquée, la méthode de la section précédente a donc la particularité d'utiliser un horizon de prédiction et un horizon de contrôle identiques, au prix de l'ajout d'une contrainte terminale. Ce problème d'optimisation est alors décrit comme un problème d'optimisation à horizon fixe (horizon glissant).

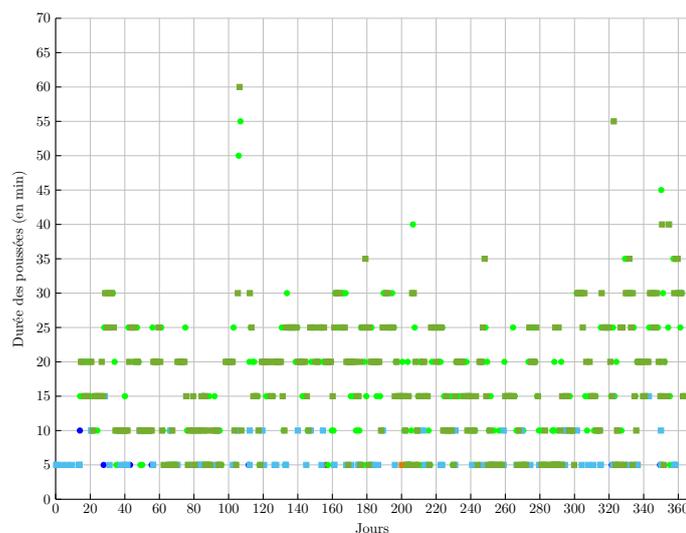


FIGURE 5.20 – Durée des poussées pour chaque propulseur :

- : propulseur u_{+R} , ● : propulseur u_{+T} , ● : propulseur u_{+N} ,
- : propulseur u_{-R} , ■ : propulseur u_{-T} , ■ : propulseur u_{-N} .

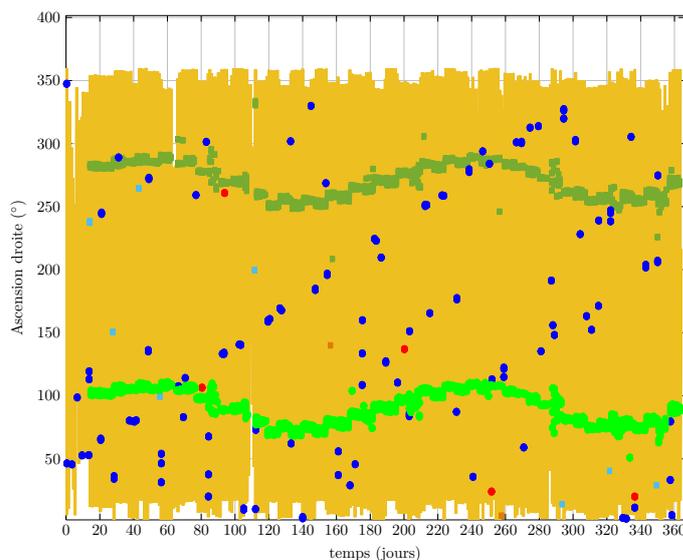


FIGURE 5.21 – Ascension droite du satellite en fonction du temps et position des poussées pour chaque propulseur : — : ascension droite,
 ● : propulseur u_{+R} , ● : propulseur u_{+T} , ● : propulseur u_{+N} ,
 ● : propulseur u_{-R} , ● : propulseur u_{-T} , ● : propulseur u_{-N} .

La technique d'optimisation à horizon glissant repose sur un choix de l'horizon de prédiction plus grand que l'horizon de contrôle, ce qui permet de retirer les contraintes terminales comme cela est expliqué dans la référence [Mayne et al., 2000]. De ce fait, une loi de contrôle est calculée avec le modèle de synthèse sur un intervalle $[t_1, t_1 + T]$ et cette loi est appliquée sur un intervalle plus court $[t_1, t_1 + \tau]$ avec $\tau < T$. L'intervalle $[t_1 + \tau, t_1 + T]$ est appelé recouvrement. La trajectoire solution est alors calculée avec le modèle de simulation sur l'intervalle $[t_1, t_1 + \tau]$ et le vecteur d'état à l'instant τ constitue le point initial pour le calcul de la loi de commande sur l'intervalle de prédiction $[t_1 + \tau, t_1 + \tau + T]$. Cette deuxième loi de commande est alors appliquée sur l'intervalle de contrôle $[t_1 + \tau, t_1 + 2\tau]$, et le processus peut être répété indéfiniment, ce qui conduit à un recul progressif de l'horizon d'optimisation global.

L'optimisation à horizon glissant a été étudiée depuis les années 1980 (voir la référence [Chen and Shaw, 1982]) et continue à être un sujet étudié (voir par exemple les références [Clarke and Scattolini, 1991], [Milam et al., 2005], [Goodwin et al., 2004] ou encore [Grüne and Pannek, 2011] par exemple). Pour un système linéaire temps-invariant, la référence [Camacho and Bordons, 2012] exhibe des résultats de stabilité pour le calcul de lois de contrôle fondées sur une optimisation à horizon glissant. Comme le modèle de synthèse utilisé dans le cadre du maintien à poste d'un satellite en orbite géostationnaire est linéaire temps-variant, ces résultats ne pourront pas être appliqués. Néanmoins, les simulations numériques montrent qu'il est possible de calculer un profil de contrôle permettant à la trajectoire de rester bornée dans la fenêtre de maintien à poste.

5.4.2 RÉSULTATS

Le problème de maintien à poste est résolu dans le cas où le satellite est équipé d'un système de propulsion idéal (un propulseur par face) ou dans le cas où il est équipé du

système de propulsion à poussée faible décrit dans le brevet de [Anzel, 1995]. L’horizon de prédiction est pris égal à 1 semaine, c’est-à-dire $T = 7$ jours, et l’horizon de contrôle est pris égal à une demi-semaine, c’est-à-dire $\tau = 3,5$ jours et un recouvrement de 3,5 jours. Les conditions finales (K.5), (K.11) et (K.17) sont retirées du problème d’optimisation à résoudre. Le tableau 5.8 montre que l’application de la technique d’optimisation à horizon glissant permet un gain de consommation sur l’année. Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés à ceux obtenus par l’optimisation à horizon fixe pour laquelle la contrainte finale est discrétisée avec 16 hyperplans.

Propulsion	Horizon fixe	Horizon glissant
Idéale	42,0 m/s	40,8 m/s
Anzel	129,2 m/s	127,0 m/s

TABLE 5.8 – Consommations (en m/s) dans le cas du problème 5.1 (horizon fixe) et dans le cas du problème 4.2 par une méthode d’optimisation à horizon glissant.

La figure 5.22 montre la consommation cumulée sur l’année dans le cas de l’optimisation à horizon fixe avec les contraintes finales et de l’optimisation à horizon glissant, que ce soit avec le système de propulsion idéal et le système propulsif décrit dans le brevet [Anzel, 1995].

Même si l’optimisation à horizon glissant permet de réduire la consommation annuelle, un inconvénient majeur de cette méthode est la multiplication du nombre d’horizons courts sur lesquels le problème de maintien à poste doit être résolu. Dans le cas étudié dans cette section pour lequel le recouvrement est d’une durée égale à la moitié de l’horizon court, le nombre d’horizons court est multiplié par deux, et le temps de calcul est augmenté. De façon générale, le temps de résolution augmente avec la taille du recouvrement. Le choix de la taille du recouvrement est donc important lors de la mise en place d’une résolution par une méthode d’optimisation à horizon glissant.

5.5 CONCLUSION

Puisque le problème de maintien à poste ne peut pas d’être résolu sur un horizon trop long, les stratégies mises en place ont consisté en un découpage de l’horizon temporel de résolution en horizons plus courts sur lesquels il est possible de résoudre le problème de maintien à poste par l’une ou l’autre des méthodes développées dans les chapitres précédents. En considérant que le problème de maintien à poste est résolu sur un horizon court après l’autre, la loi de contrôle établie sur un intervalle ne tient pas compte de l’effet des perturbations sur l’horizon suivant. C’est pourquoi, il est nécessaire d’ajouter des contraintes à la fin de chaque horizon court afin d’assurer que le problème à résoudre reste faisable, en empêchant par exemple le satellite d’arriver trop près de la fenêtre de maintien à poste avec une vitesse vers l’extérieur. A la différence de ce qui existe dans la littérature, ces contraintes finales ne sont pas des contraintes de rendez-vous mais des contraintes réduisant l’espace final admissible. Elles ont été établies en analysant le mouvement képlérien d’un satellite en positions et vitesses cartésiennes relatives, puis étendues au cas d’un mouvement soumis aux perturbations orbitales en considérant l’ellipse osculatrice à l’instant de jonction entre chaque horizon court.

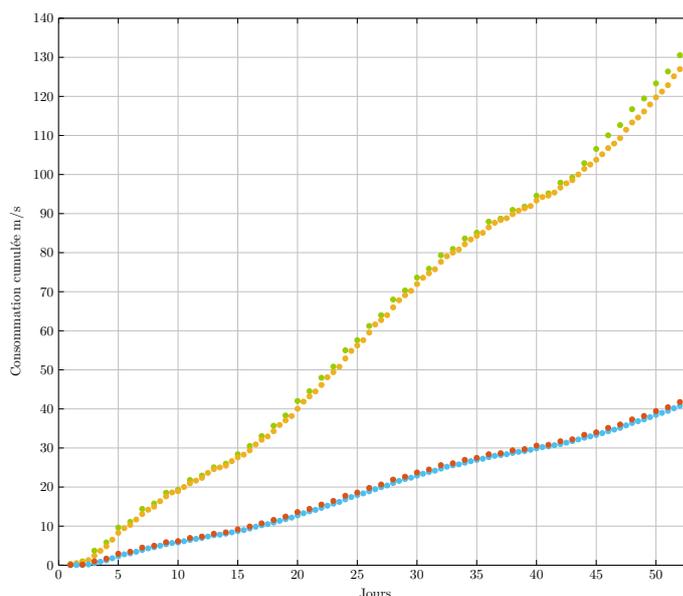


FIGURE 5.22 – Consommation cumulée sur un an (en m/s) :

- : optimisation à horizon fixe avec le système propulsif de [Anzel, 1995],
- : optimisation à horizon glissant avec le système propulsif de [Anzel, 1995],
- : optimisation à horizon fixe avec le système propulsif idéal,
- : optimisation à horizon glissant avec le système propulsif idéal.

Les simulations effectuées avec un jeu de paramètres dits nominaux montrent que les analyses empiriques de la littérature sont retrouvées, ce qui permet de valider la méthode de résolution mise en place. Puisque qu'il est désormais possible de résoudre le problème de maintien à poste sur un horizon long d'un an, une analyse de l'effet des différents paramètres sur la consommation annuelle a pu être menée. Tout d'abord, l'impact de la méthode d'intégration, qui était important dans le cas de la résolution sur une semaine, devient très faible dans le cas de la résolution sur une année, et il est préférable d'utiliser une intégration par une méthode aux différences finies pour le gain en temps de calcul qu'elle apporte. La durée de l'horizon court a également un impact sur la consommation, car lorsque l'horizon court est long, des effets périodiques des perturbations peuvent plus facilement être pris en compte. En revanche, cela a un impact négatif sur le temps de calcul et sur les besoins en espace mémoire. Cette durée doit donc être choisie en fonction des besoins et des attentes de l'utilisateur. Puisque le temps de calcul pour la prise en compte des contraintes finales sous forme quadratiques est rédhibitoire, il est nécessaire d'approcher ces dernières par un ensemble de contraintes linéaires. Le nombre de contraintes linéaires utilisées a peu d'influence sur la consommation annuelle. Dans le cas où les contraintes de maintien à poste sont exprimées avec les éléments orbitaux équinoxiaux relatifs et approchées par des ensembles de contraintes linéaires, la consommation annuelle diminue lorsque le nombre de contraintes augmente. Il est donc plus intéressant de prendre un grand nombre de contraintes linéaires. Il a de plus été possible de montrer que l'orientation des angles moteurs influe très fortement sur la consommation annuelle et que la configuration nominale choisie permet de minimiser la consommation. Enfin, dans le cas de panne de l'un des propulseurs ou de deux d'entre eux diamétralement opposés, le maintien à poste reste réalisable pour la durée de la simulation et l'orientation des moteurs choisie. Ces analyses ont été effectuées en supposant

que chaque paramètre influe indépendamment des autres sur la consommation annuelle, ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Une stratégie de résolution par une optimisation à horizon glissant a été également abordée. Comme la loi de contrôle solution du problème de maintien à poste sur un horizon court est aveugle à l'effet des perturbations sur l'horizon suivant, la position initiale est propagée sur la première moitié de l'horizon court, et la position ainsi obtenue constitue alors la position initiale du cycle court suivant. De cette façon, la loi de contrôle sur la première moitié de l'horizon court prenant en compte l'effet des perturbations sur la deuxième moitié de cet horizon, le problème de maintien à poste reste faisable d'un demi-horizon court à l'autre. De cette façon, les conditions terminales ne sont plus nécessaires, mais le nombre de problèmes à résoudre est doublé.

Conclusions et perspectives

C'était étonnant ce qu'on arrivait à faire quand on avait le culot d'essayer [...].

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

Le travail présenté dans ce manuscrit avait pour but de résoudre le problème de maintien à poste d'un satellite géostationnaire à poussée électrique, transcrit en un problème de contrôle optimal à consommation minimale avec des contraintes sur l'état (les contraintes de maintien à poste), des contraintes sur le contrôle (la prise en compte du caractère limité de la poussée), et des contraintes opérationnelles, qui sont difficiles à prendre en compte puisqu'elles s'expriment de façon implicite en fonction du profil de commande. Après la résolution analytique d'un problème de maintien à poste képlérien hors-plan avec un système de propulsion idéal, deux techniques de résolution ont été proposées.

La première approche de résolution proposée est basée sur le Principe du Maximum de Pontryagin et se décompose en trois étapes. La première étape consiste à résoudre le problème de maintien à poste sans les contraintes opérationnelles. Des paramètres de seuil permettent de transformer le profil de contrôle continu en un profil tout ou rien. La valeur de ces paramètres de seuil a une très forte influence sur le nombre de poussées de chaque propulseur, qui restera fixe par la suite, et ils doivent donc être choisis avec précaution. La deuxième étape assure la prise en compte des contraintes opérationnelles par la résolution de schémas d'équivalence en consommation ou en effet. La séquence de poussées obtenue à la fin de cette deuxième étape, qui restera fixe pour la suite, respecte les contraintes opérationnelles, mais pour certaines valeurs des paramètres de seuil, les contraintes opérationnelles ne sont plus respectées. La troisième étape optimise alors les valeurs des instants d'allumage et d'extinction des propulseurs pour assurer à la fois le respect des contraintes opérationnelles et des contraintes de maintien à poste. Cette optimisation est réalisée dans le cadre des systèmes à commutation. Cette technique est appliquée d'une part dans le cadre du rendez-vous képlérien avec un système propulsif idéal, ce qui a donné lieu à la publication en conférence de [Gazzino et al., 2017a] ainsi que l'acceptation dans le journal associé (voir [Gazzino et al., 2017b]), et d'autre part dans le cadre du problème de maintien à poste complet avec le système propulsif de [Anzel, 1995], ce qui a donné lieu à la publication en conférence de [Gazzino et al., 2016] et [Gazzino et al., 2017c].

La deuxième approche de résolution proposée est basée sur la transcription du problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation en dimension finie. Puisque les poussées sont de type tout ou rien, il est possible de paramétrer les profils de contrôle par des fonctions

binaires et de les discrétiser sur une grille temporelle. Ces variables binaires permettent de réécrire très facilement les contraintes opérationnelles difficiles en contraintes linéaires. Afin de réduire la taille de l'espace de recherche, l'équation de la dynamique linéarisée est intégrée numériquement en utilisant deux techniques différentes. La première repose sur une discrétisation des matrices de transition et la deuxième sur un schéma aux différences finies. La première méthode utilisant les matrices de transition est rédhibitoire en termes de temps de calcul, et la seconde présente les avantages d'être rapide et de permettre un contrôle de l'erreur d'approximation commise en choisissant l'ordre du schéma aux différences finies. C'est pourquoi, nous préconisons l'utilisation de la deuxième méthode d'intégration. Le problème de contrôle optimal initial est alors transformé en un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers. Ce problème est résolu tout d'abord dans un cas képlérien simplifié avec un système propulsif idéal pour lequel la dynamique s'exprime avec les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire et peut être intégrée analytiquement, puis dans un deuxième temps dans le cas du problème de maintien à poste complet, ce qui a conduit à la publication en conférence de [Gazzino et al., 2017d].

La méthode de décomposition en trois étapes est assez délicate à mettre en œuvre puisque la solution de la première étape est numériquement très sensible lorsque les contraintes sur l'état deviennent actives. De plus, il est nécessaire de choisir correctement la valeur des fonctions seuils car il est apparu que ces valeurs conditionnent le nombre de poussées et ont un impact sur la consommation finale. Néanmoins, cette liberté de réglage permet d'analyser la sensibilité de la solution par rapport au nombre de poussées et de choisir le nombre minimal de poussées pour avoir une consommation minimale tout en garantissant le respect des contraintes opérationnelles et de maintien à poste. Si le nombre de poussées est élevé, la troisième étape peut être longue à résoudre puisque qu'il est nécessaire d'effectuer autant d'intégrations de la dynamique qu'il y a d'instantanés de commutation. La deuxième méthode, basée sur la transcription en nombres entiers, est quant à elle très facile à mettre en œuvre, mais nécessite d'importantes ressources de mémoire puisque les matrices de transitions entre chaque point de la grille temporelle doivent être calculées puis stockées pour être utilisées par le solveur du problème linéaire en nombres entiers. C'est pourquoi, pour une analyse paramétrique fine de la solution, nous préconisons l'utilisation de la première méthode proposée tandis que pour une utilisation plus automatisée, la seconde méthode est plus appropriée. C'est également la raison pour laquelle la résolution sur un horizon long par résolutions successives sur des horizons courts a été effectuée avec la seconde méthode.

Comme cela a été dit dans le paragraphe précédent, l'utilisation de la seconde méthode de résolution du problème de maintien à poste nécessite de stocker l'ensemble des matrices de transition entre les différents instants de la grille temporelle. Si l'horizon temporel de résolution est trop long, les ressources matérielles peuvent venir à manquer pour la résolution du problème en une seule étape. C'est pourquoi nous avons proposé de résoudre le problème de maintien à poste sur un horizon long par résolutions successives sur des horizons courts. Pour ce faire, des contraintes terminales ont dû être ajoutées au problème de maintien à poste pour assurer que l'ensemble des solutions reste non vide. En effet, il pourrait arriver que le satellite arrive en fin de cycle court en bordure de la fenêtre de maintien à poste avec une vitesse élevée orientée vers l'extérieur. La valeur de la poussée que les propulseurs peuvent fournir étant limitée, le maintien à poste ne pourra alors pas être assuré pour l'horizon court suivant. La perspective d'utiliser l'optimisation à horizon glissant a été évoquée et les résultats obtenus en terme de consommation semblent prometteurs. Cependant, comme un

recouvrement est nécessaire, le temps de calcul peut devenir beaucoup plus long.

Le travail réalisé pour cette thèse a permis de résoudre le problème posé, mais laisse le champ libre à de futurs travaux sur la question.

Dans toute l'étude menée dans ce manuscrit, le satellite pointe toujours dans une direction radiale et l'effet des perturbations orbitales sur l'attitude n'a pas été prise en compte. Pour ce faire, il est nécessaire d'ajouter la dynamique du satellite en attitude. Le contrôle de l'attitude peut alors être effectué en supposant que les propulseurs sont orientables, ou que la direction des poussées ne passe pas par le centre de gravité afin de créer un couple résiduel. Cependant, les angles moteurs deviennent alors des variables à optimiser et apparaissent de façon non linéaire dans la dynamique, ce qui peut poser des problèmes pour la résolution des problèmes en nombres entiers. Une première piste consiste à linéariser les angles par rapport à une valeur de référence pour retrouver un problème linéaire.

Comme la dynamique de maintien à poste linéarisée est temps-variante, il n'est pas possible de calculer facilement la matrice de transition. Une méthode de calcul des matrices de transition basée sur l'utilisation des polynômes de Chebychev a été mise au point (voir la référence [Bréhard et al., 2016]) et a commencé à être appliquée à un problème de rendez-vous et à l'intégration de la dynamique d'un satellite géostationnaire soumis aux perturbations orbitales et linéarisée, ce qui a conduit à la publication de conférence acceptée [Arantes et al., 2018]. Cette intégration certifiée de la matrice de transition pourra être utilisée en lieu et place du schéma aux différences finies nécessaire pour la deuxième méthode de résolution du problème de contrôle optimal.

Dans la thèse de [Losa, 2007] et dans la référence [Losa et al., 2005], un changement de variables pour obtenir un système plat a été présenté. De cette façon, les dérivées de plus haut degré des sorties plates peuvent être paramétrées par des fonctions de bases adéquates. Pour obtenir un profil de poussées tout ou rien, ces fonctions de bases peuvent être choisies comme étant des polynômes, et les fonctions de de contrôles peuvent être facilement représentées par un jeu de paramètres à optimiser.

Le mouvement relatif képlérien hors-plan est le mouvement d'un oscillateur harmonique, et fait donc partie des quelques problèmes qu'il est possible de résoudre analytiquement. Par un changement de variable approprié, il est possible de montrer que le mouvement relatif dans le plan de l'équateur est un double intégrateur et un oscillateur harmonique. Il est alors possible d'utiliser la résolution analytique proposée dans ce manuscrit pour l'adapter au problème dans le plan. Par ailleurs, la dynamique linéarisée en éléments orbitaux équinoxiaux relatifs prenant en compte le potentiel terrestre réel présente également un découplage et une matrice de dynamique constituée uniquement de fonctions trigonométriques de pulsation égale à la vitesse de rotation de la Terre. Il serait donc possible d'utiliser ces constatations pour résoudre analytiquement un problème de maintien à poste perturbé. La grande difficulté de la résolution du problème de maintien à poste de façon analytique est le traitement des contraintes sur l'état dans le cadre du Principe du Maximum. La thèse [Claeys, 2013] introduit les mesures d'occupations et il semble qu'elles soient particulièrement indiquées pour traiter naturellement les contraintes sur l'état.

Repères de référence

A.1 REPÈRE INERTIEL GÉOCENTRIQUE

Le repère cartésien de référence choisi est le repère inertiel géocentrique dont on peut trouver une définition dans [Vallado, 1997] sous le nom *Geocentric Equatorial Coordinate System* ou *Earth Center Inertial* dont l'origine est située au centre de la Terre, représenté par le point G et dont les axes sont définis par :

- l'axe (G, \vec{u}_{Z_G}) pointant vers le pôle nord terrestre,
- l'axe (G, \vec{u}_{X_G}) dans la direction de l'intersection entre le plan de l'écliptique et le plan de l'équateur terrestre (point vernal),
- l'axe (G, \vec{u}_{Y_G}) qui complète le trièdre orthogonal direct,

et illustrés sur la figure A.1. Le repère $(G, \vec{u}_{X_G}, \vec{u}_{Y_G}, \vec{u}_{Z_G})$ est noté \mathcal{R}_G et la base associée \mathcal{B}_G .

Une position dans l'espace est repérée par ses trois coordonnées cartésiennes x , y et z ou par ses trois coordonnées sphériques r , α (ascension droite) et δ (déclinaison) reliées entre elles de la façon suivante et illustrées sur la figure A.2.

$$x = r \cos \delta \cos \alpha, \quad (\text{A.1a})$$

$$y = r \cos \delta \sin \alpha, \quad (\text{A.1b})$$

$$z = r \sin \delta. \quad (\text{A.1c})$$

Les relations inverses s'écrivent :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (\text{A.2a})$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (\text{A.2b})$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad (\text{A.2c})$$

où α est choisi tel que $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$ pour $x > 0$ et $\alpha \in [90^\circ, 270^\circ]$ pour $x < 0$.

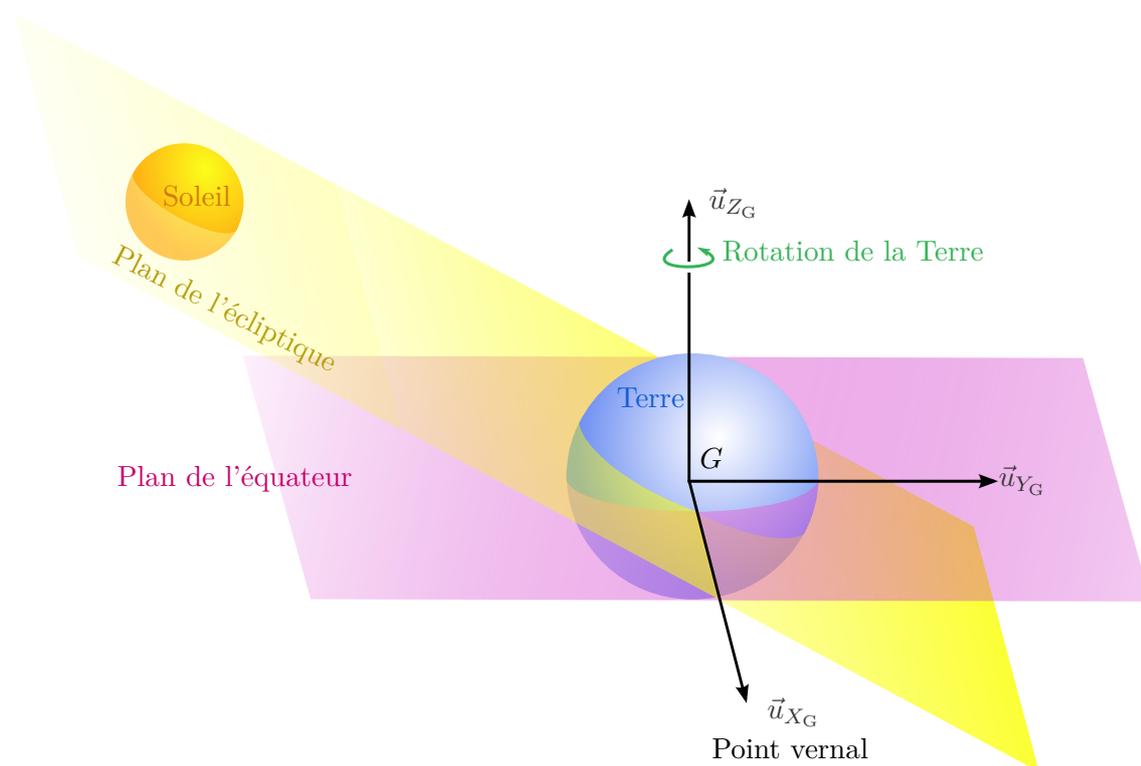


FIGURE A.1 – Repère géocentrique inertiel

A.2 REPÈRE GÉOCENTRIQUE TOURNANT

Le repère géocentrique tournant, nommé par [Vallado, 1997] *Earth Centered Earth Fixed*, est un repère dont l'origine est située au centre de la Terre et dont les axes sont définis par :

- un axe pointant vers le pôle nord terrestre,
- un axe pointant dans la direction du méridien de Greenwich,
- un axe qui complète le trièdre orthogonal direct,

et illustrés sur la figure A.3.

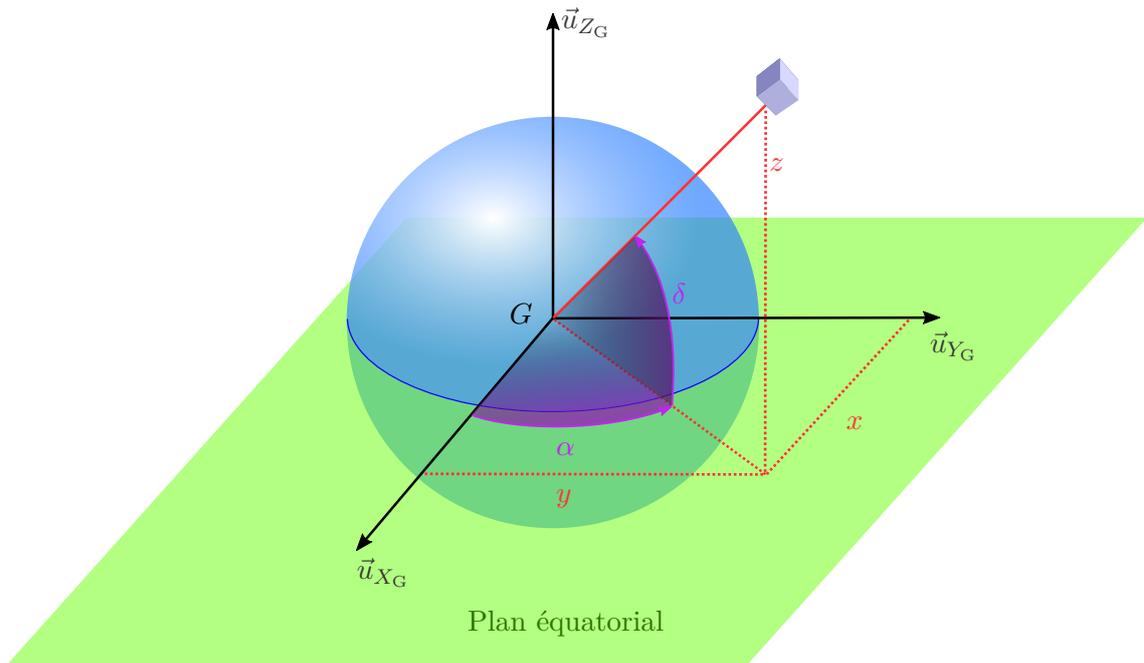
Dans ce repère, les points sont repérés par leur longitude géographique λ et leur latitude géographique φ définies par :

$$\lambda = \alpha - \Theta(t), \quad (\text{A.3a})$$

$$\varphi = \delta. \quad (\text{A.3b})$$

$\Theta(t)$ est l'ascension droite du méridien de Greenwich (angle entre l'axe (G, \vec{u}_{X_G}) de la figure A.1 et le méridien de Greenwich) et représente donc l'angle de rotation de la Terre à l'instant t considéré. On suppose ici que la rotation de la Terre est constante au cours du temps. Cette angle est appelé parfois temps sidéral. Il est donc possible d'écrire :

$$\Theta(t) = \Theta(t_0) + \omega_{\oplus}(t - t_0), \quad (\text{A.4})$$

FIGURE A.2 – Ascension droite α et déclinaison δ d'un point dans l'espace

où ω_{\oplus} est la vitesse de rotation de la Terre, supposée constante.

Si $[x \ y \ z]^T$ est la position d'un satellite dans le repère géocentrique inertiel, alors son rayon r , sa latitude λ et sa longitude φ sont calculés au moyen des formules suivantes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (\text{A.5a})$$

$$\cos \lambda = \frac{x \cos \Theta(t) + y \sin \Theta(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\sin \lambda = \frac{y \cos \Theta(t) - x \sin \Theta(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (\text{A.5c})$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (\text{A.5d})$$

$$\sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (\text{A.5e})$$

A.3 REPÈRE ORBITAL LOCAL

Il est possible de définir un système de coordonnées liées à la position du satellite sur l'orbite. Il s'agit du repère orbital local. Ses axes peuvent être notés RTN ou RSW comme dans [Vallado, 1997] et sont définis par :

- l'axe \vec{u}_N colinéaire au vecteur moment cinétique \vec{h} ,
- l'axe \vec{u}_R colinéaire à la direction centre de la Terre - satellite,
- l'axe \vec{u}_T qui complète le trièdre orthogonal direct,

et illustré sur la figure A.4. Le repère $(S, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ est noté \mathcal{R}_{OL} et la base associée \mathcal{B}_{OL} .

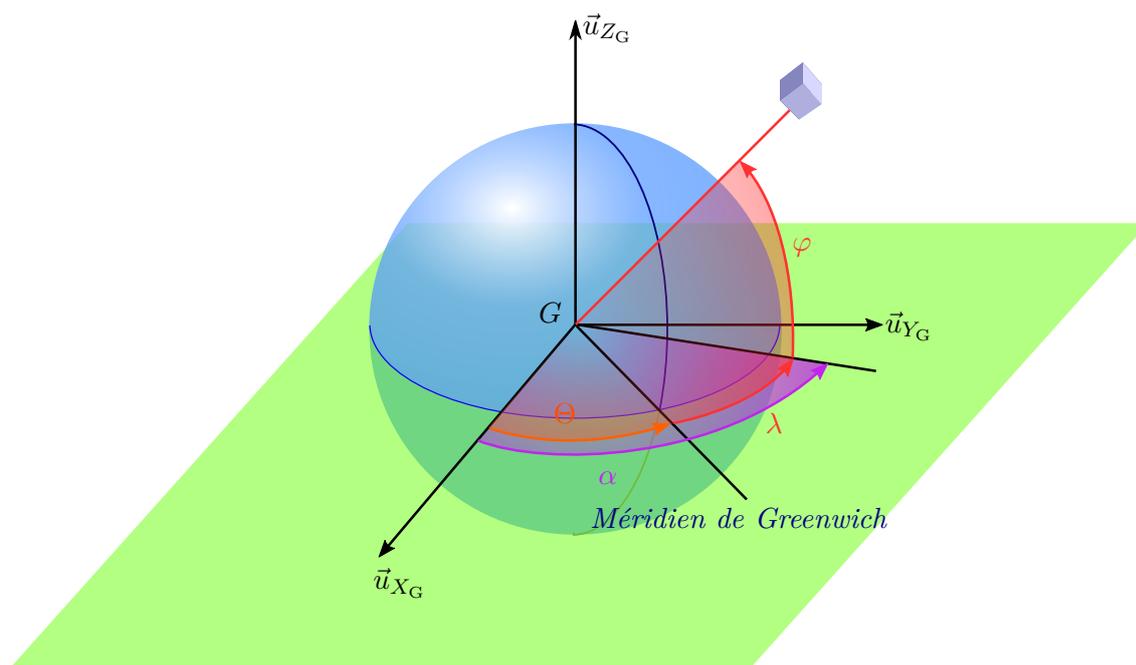


FIGURE A.3 – Repère géocentrique tournant

Il est possible de définir le repère orbital local à partir de trois rotations transformant la base géocentrique inertielle \mathcal{B}_G en une base orbitale locale \mathcal{B}_{OL} . Celle-ci se déduit de la base géocentrique inertielle \mathcal{B}_G par la série de transformations suivantes (voir figure A.5) :

- une rotation autour de l'axe (G, \vec{u}_{Z_G}) d'angle Ω ,
- une rotation autour de l'axe (G, \vec{u}_n) d'angle i ,
- une rotation autour de l'axe (G, \vec{u}_h) d'angle $\omega + \nu$,

où \vec{u}_n est un vecteur unitaire dans la direction de l'intersection entre le plan de l'équateur et le plan de l'orbite et \vec{u}_h est un vecteur directeur perpendiculaire au plan de l'orbite. La figure A.6 montre ces rotations dans l'espace et la figure A.7 présente les rotations planes associées à ces transformations.

Si $\vec{\sigma}$ est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{A.6})$$

dans la base géocentrique inertielle et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}, \quad (\text{A.7})$$

dans la base orbitale locale, la transformation des coordonnées exprimées dans la base orbitale locale en les coordonnées exprimées dans la base géocentrique inertielle est donnée par :

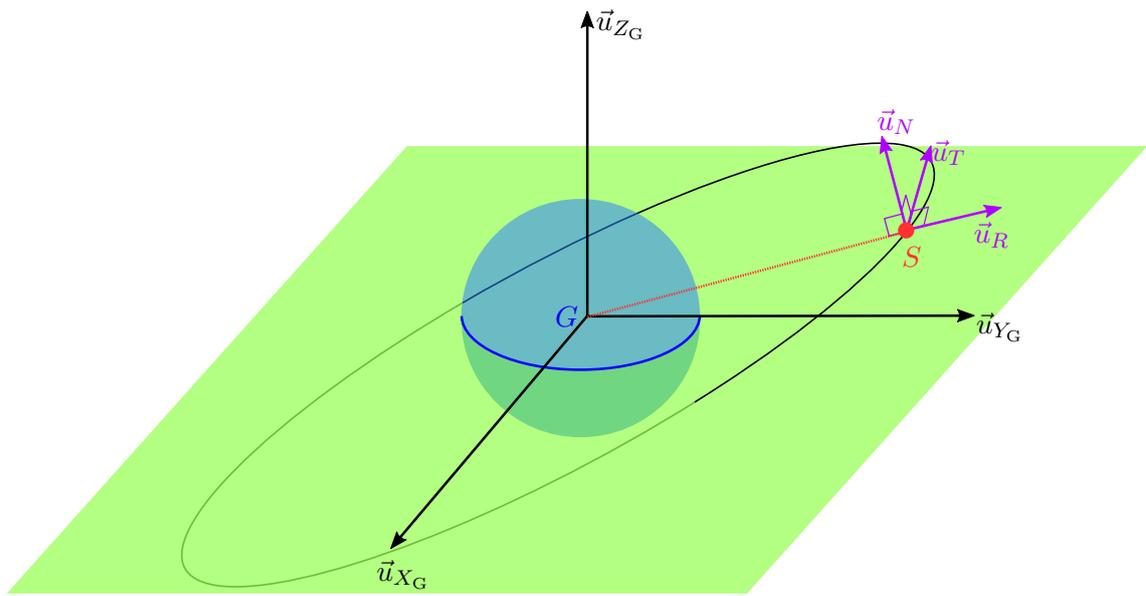


FIGURE A.4 – Repère orbital local

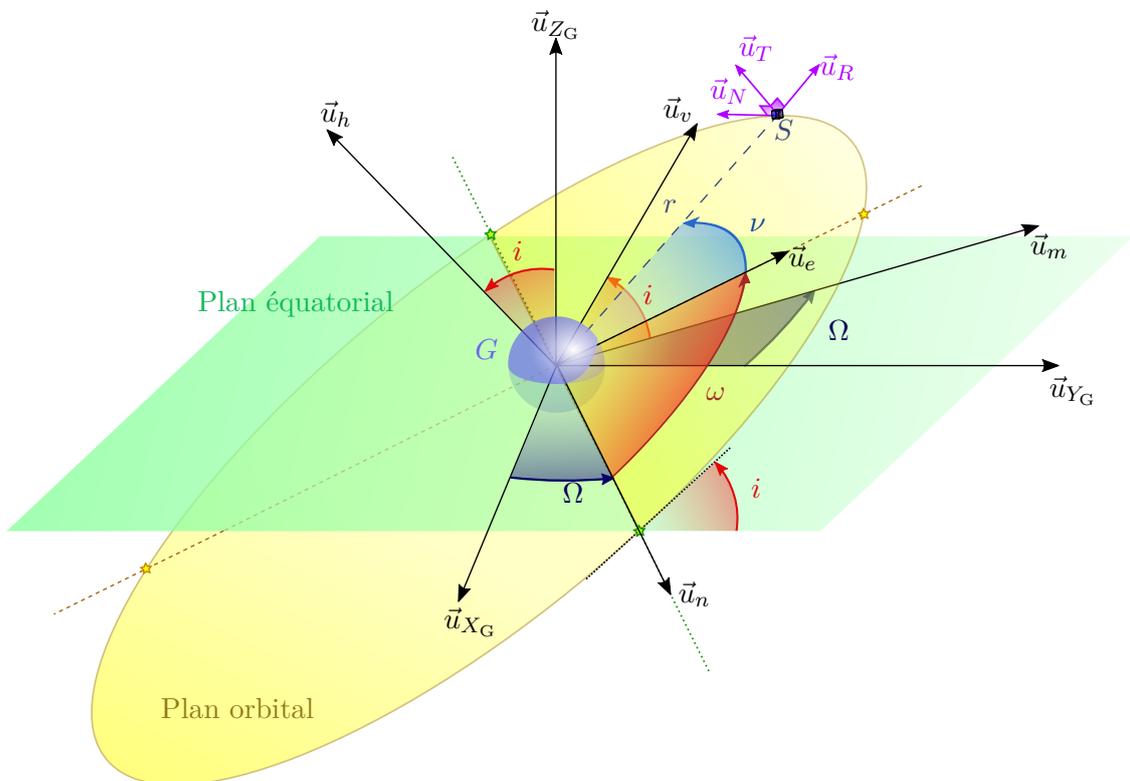


FIGURE A.5 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique inertiel et le repère orbital local. Notons que \vec{u}_T et \vec{u}_h sont colinéaires.

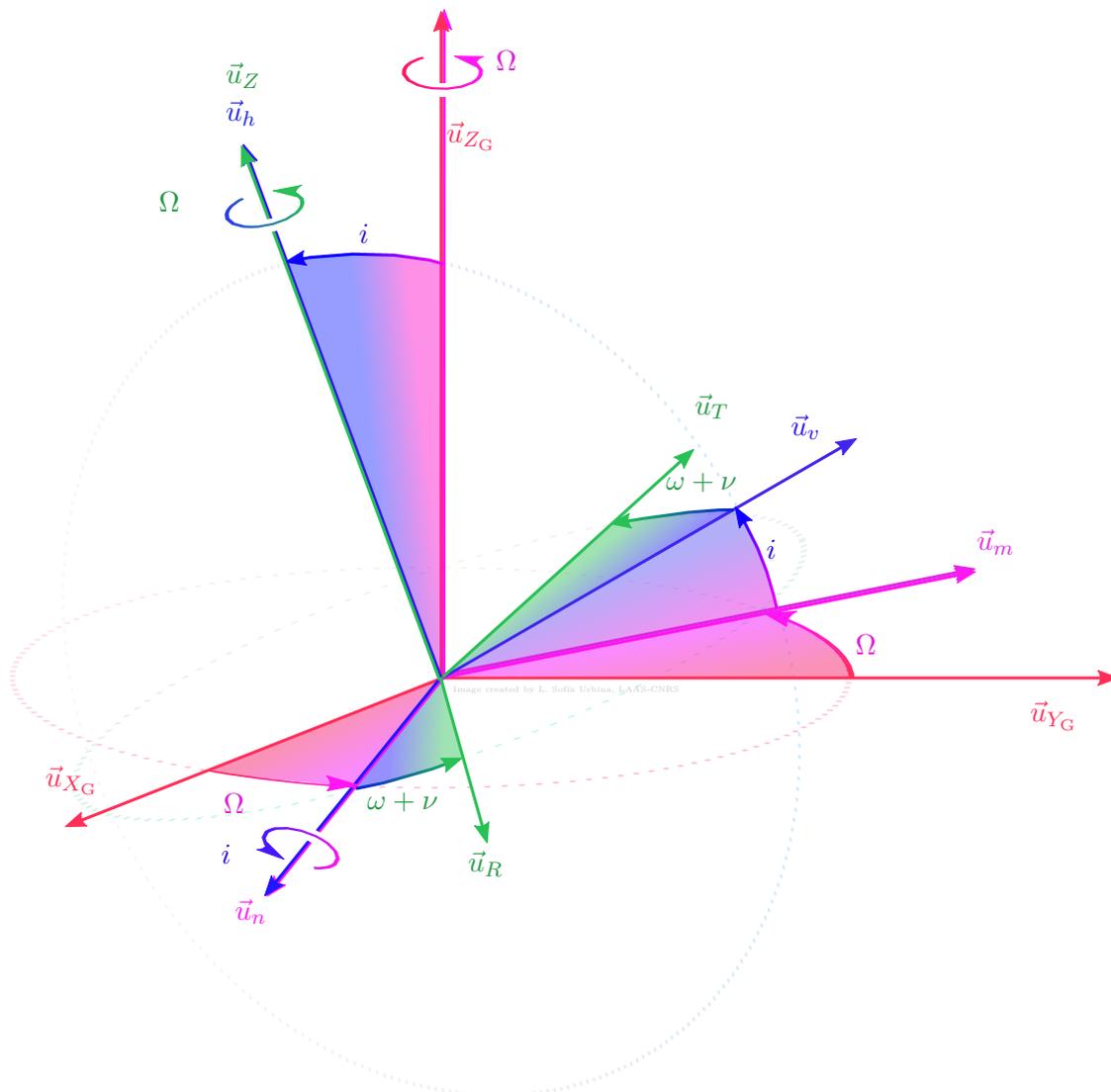


FIGURE A.6 – Rotations dans l'espace entre le base géocentrique inertielle et la base orbitale locale.

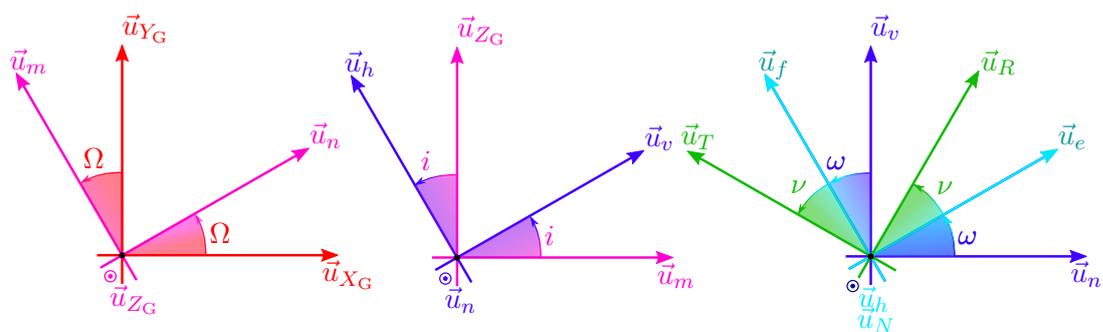


FIGURE A.7 – Rotations planes entre le base géocentrique inertielle et la base orbitale locale.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) & -\sin(\omega + \nu) & 0 \\ \sin(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}, \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + \nu) \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + \nu) \cos \Omega \\ \sin i \sin(\omega + \nu) \\ -\cos i \cos(\omega + \nu) \sin \Omega - \sin(\omega + \nu) \cos \Omega & \sin i \sin \Omega \\ \cos i \cos(\omega + \nu) \cos \Omega - \sin(\omega + \nu) \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega \\ \sin i \cos(\omega + \nu) & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_t \\ \sigma_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Le repère orbital local s'obtient alors par la translation de l'origine du repère géocentrique inertielle telle que : $\vec{GS} = r\vec{u}_R$.

Il est aussi possible de définir un repère orbital local à partir du vecteur tangent à la trajectoire et du vecteur moment cinétique (noté NTW), mais ce repère n'est pas utilisé. On peut néanmoins remarquer que les deux repères coïncident lorsque l'orbite est circulaire.

A.4 REPÈRE ÉQUINOXIAL

La base équinoxiale $\mathcal{B}_{EQX} = (\vec{u}_h, \vec{u}_p, \vec{u}_q)$ est définie de la façon suivante :

- rotation de la base inertielle géocentrique d'un angle Ω autour de l'axe (G, \vec{u}_{z_G}) ,
- rotation d'un angle i autour du nouvel axe (G, \vec{u}_n) (qui pointe dans la direction du nœud ascendant),
- rotation d'un angle $-\Omega$ autour du nouvel axe (G, \vec{u}_h) confondu avec la direction du moment cinétique,

et le repère équinoxial est défini à partir de la base équinoxiale par $\mathcal{R}_{EQX} = (G, \vec{u}_h, \vec{u}_p, \vec{u}_q)$.

La figure A.8 montre le repère orbital équinoxial, la figure A.9 les trois rotations dans l'espace et la figure A.10 les rotations planes transformant la base géocentrique inertielle en la base équinoxiale.

Si $\vec{\sigma}$ est un vecteur de l'espace de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \tag{A.9}$$

dans la base géocentrique inertielle et de coordonnées :

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{EQX}}, \tag{A.10}$$

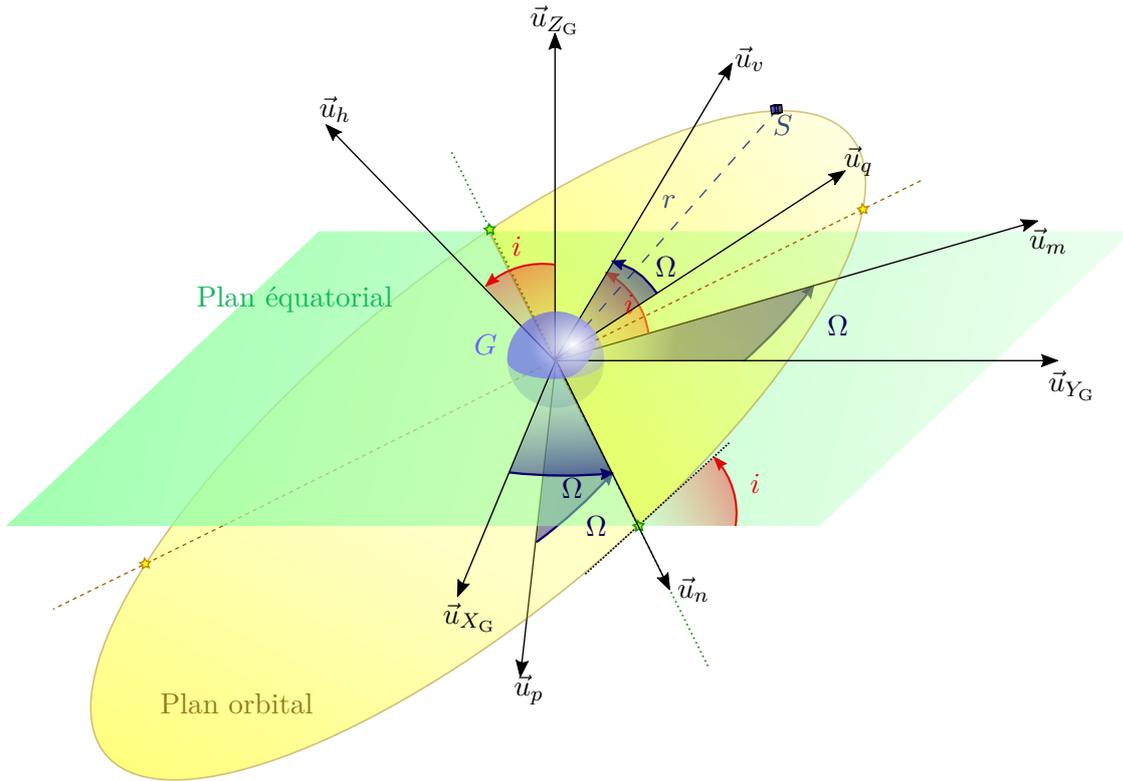


FIGURE A.8 – Représentation des angles de rotation entre le repère géocentrique inertiel et le repère équinoxial.

dans la base équinoxiale, la transformation des coordonnées exprimées dans la base équinoxiale en les coordonnées exprimées dans la base géocentrique inertielle est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G} &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} , \\
 &= \begin{bmatrix} \cos i \sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega & \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & -\sin i \sin \Omega \\ \cos \Omega \sin \Omega (1 - \cos i) & \sin^2 \Omega + \cos i \cos^2 \Omega & \sin i \cos \Omega \\ \sin i \sin \Omega & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} .
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

La matrice de rotation précédente peut être réécrite en utilisant les éléments orbitaux équinoxiaux, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G} &= \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} (1 + i_x^2 - i_y^2) \cos \nu_Q + 2i_x i_y \sin \nu_Q & & \\ 2i_x i_y \cos \nu_Q + (1 - i_x^2 + i_y^2) \sin \nu_Q & & \\ 2(i_x \sin \nu_Q - i_y \cos \nu_Q) & & \\ 2i_x i_y \cos \nu_Q - (1 + i_x^2 - i_y^2) \sin \nu_Q & 2i_y & \\ (1 - i_x^2 + i_y^2) \cos \nu_Q - 2i_x i_y \sin \nu_Q & -2i_x & \\ 2(i_x \cos \nu_Q + i_y \sin \nu_Q) & 1 - i_x^2 - i_y^2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}} .
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Équations d'évolution

B.1 ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION LIBRE

Après avoir décrit les perturbations environnementales qui constituent le modèle physique pour la description du mouvement et choisi un vecteur d'état constitué des éléments orbitaux équinoxiaux, l'objectif de cette section est d'obtenir les équations d'évolution du satellite en orbite autour de la Terre est soumis à la fois au potentiel d'attraction central et aux forces orbitales perturbatrices – le potentiel terrestre dû à une répartition de masse non isotrope, le potentiel d'attraction de la Lune, le potentiel d'attraction du Soleil et le potentiel dont la force de pression de radiation solaire dérive. L'accélération produite par les propulseurs n'est pas prise en compte dans cette section. Dans la suite, l'évolution libre désigne l'évolution du satellite non contrôlé.

B.1.1 MOUVEMENT KÉPLÉRIEN

L'étude de la dynamique képlérien, c'est-à-dire sans la prise en compte des perturbations orbitales, est nécessaire car les stratégies de maintien à poste développées dans cette étude seront testées dans un premier temps sur ce modèle simple avant d'être appliquées sur le modèle dynamique complet – prenant en compte toutes les perturbations orbitales. Après avoir dérivé le modèle dynamique képlérien, le modèle linéarisé est également calculé. En effet, le satellite doit rester à proximité de sa position nominale, si bien que la distance entre le satellite et le point de maintien à poste est très petite par rapport au rayon de l'orbite géostationnaire. C'est pourquoi, le modèle linéaire de Hill-Clohessy-Wiltshire sera utilisé pour décrire l'évolution du satellite soumis uniquement à la force d'attraction centrale à proximité de sa position de maintien à poste.

B.1.1.1 DYNAMIQUE KÉPLÉRIENNE

Dans le cas d'un satellite soumis uniquement à la force d'attraction centrale, le modèle non linéaire d'évolution décrit par l'équation (1.2) peut se réécrire sous la forme :

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} = \vec{v}, \quad \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}. \quad (\text{B.1})$$

avec $\mu_{\oplus} = \mathcal{G}M_{\oplus}$, qu'il est possible de réécrire :

$$\frac{dx_{\text{cart}}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ -\mu_{\oplus} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \\ -\mu_{\oplus} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \\ -\mu_{\oplus} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Avec les éléments orbitaux classiques, qui ont été définis dans la Section 1.3.2.1, page 20, seule l'anomalie est dépendante du temps et rend compte de l'évolution temporelle de l'angle entre la direction du périégée et du rayon vecteur. L'évolution du système est caractérisée par :

$$\frac{dx_{\text{EOC}}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \end{bmatrix}^T = K(x_{\text{EOC}}). \quad (\text{B.3})$$

La dynamique képlérienne du satellite peut également être exprimée en utilisant les éléments orbitaux équinoxiaux. En considérant que la relation de passage entre les éléments orbitaux classiques et les éléments orbitaux équinoxiaux peut s'écrire : $x_{\text{EOE}} = x_{\text{EOE}}(x_{\text{EOC}}, t)$, l'équation différentielle de la dynamique képlérienne exprimée en éléments orbitaux classiques (B.3) est transformée de la façon suivante :

$$\frac{dx_{\text{EOE}}}{dt} = \frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} \frac{dx_{\text{EOC}}}{dt} + \frac{\partial x_{\text{EOC}}}{\partial t} = K(x_{\text{EOE}}) - \omega_T, \quad (\text{B.4})$$

avec

$$\omega_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{\oplus} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.5})$$

et $\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{COE}}}$ la matrice jacobienne de transformation des éléments orbitaux classiques vers les éléments orbitaux équinoxiaux définie par :

$$\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} & 0 & -e_y & -e_y & 0 \\ 0 & \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} & 0 & e_x & e_x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i_x(1 + i_x^2 + i_y^2)}{2\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} & -i_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i_y(1 + i_x^2 + i_y^2)}{2\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} & i_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

On obtient donc :

$$\frac{dx_{\text{EOE}}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} - \omega_{\oplus} \end{bmatrix}^T = K(x_{\text{EOE}}) - \omega_T. \quad (\text{B.7})$$

B.1.1.2 DYNAMIQUE KÉPLÉRIENNE RELATIVE

Le mouvement képlérien relatif fait référence au mouvement d'un satellite appelé chasseur par rapport au mouvement d'un satellite de référence appelé cible pour lequel la distance entre le chasseur et la cible est supposée être très petite par rapport au rayon de l'orbite sur laquelle la cible évolue. Dans ce paragraphe, le mouvement relatif du chasseur est décrit au moyen de la position et de la vitesse cartésienne relatives dans le repère orbital local (voir annexe A.3 page 221 pour la définition du repère orbital local et la figure B.1 pour l'illustration de la position cartésienne relative). Dans le cadre de ce travail le point de maintien à poste est considéré comme la cible et le chasseur est le satellite dont el maintien à poste en orbite géostationnaire doit être effectué.

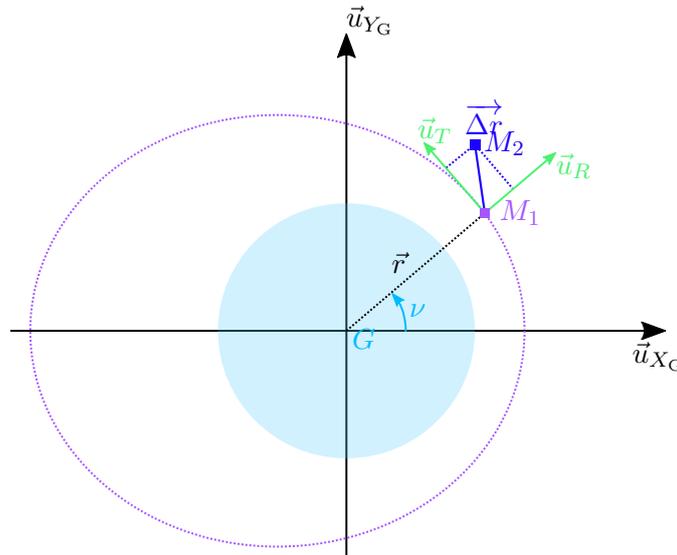


FIGURE B.1 – Illustration de la position relative du satellite chasseur par rapport à la cible.

Le point M_1 représente le satellite cible évoluant sur son orbite de référence avec :

$$\overrightarrow{GM_1} = \vec{r} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}}^T \quad (\text{B.8})$$

$\overrightarrow{GM_1} = \vec{r}$ et le point M_2 le satellite chasseur dont la position relative par rapport à la cible est notée :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{\Delta r} = \begin{bmatrix} x_R & y_R & z_R \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{OL}}}^T. \quad (\text{B.9})$$

La position du chasseur par rapport au centre de la Terre est alors donnée par :

$$\overrightarrow{GM_2} = \vec{r} + \vec{\Delta r}. \quad (\text{B.10})$$

L'hypothèse de mouvement de proximité du chasseur par rapport à la cible se traduit

par :

$$\|\vec{\Delta r}\| \ll \|\vec{r}\|. \quad (\text{B.11})$$

Le mouvement du satellite cible soumis à la force d'attraction centrale est décrit par :

$$\left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}. \quad (\text{B.12})$$

De la même façon, le mouvement du satellite chasseur soumis à la force d'attraction centrale est décrit par :

$$\left. \frac{d^2 (\vec{r} + \vec{\Delta r})}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = -\mu_{\oplus} \frac{(\vec{r} + \vec{\Delta r})}{\|\vec{r} + \vec{\Delta r}\|^3}. \quad (\text{B.13})$$

L'accélération relative dans la base géocentrique inertielle s'exprime alors selon :

$$\left. \frac{d^2 \vec{\Delta r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = \left. \frac{d^2 (\vec{r} + \vec{\Delta r})}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} - \left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = -\mu_{\oplus} \frac{(\vec{r} + \vec{\Delta r})}{\|\vec{r} + \vec{\Delta r}\|^3} + \mu_{\oplus} \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}. \quad (\text{B.14})$$

Par ailleurs, l'accélération relative dans la base inertielle s'exprime en fonction de l'accélération relative dans la base orbitale locale à partir de la loi de composition des accélérations :

$$\left. \frac{d^2 \vec{\Delta r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = \left. \frac{d^2 \vec{\Delta r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_{OL}} + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G} \wedge \left. \frac{d\vec{\Delta r}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_{OL}} + \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_{OL}} \wedge \vec{\Delta r} + \vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G} \wedge \vec{\Delta r} \right), \quad (\text{B.15})$$

où les termes de droite sont respectivement l'accélération relative dans la base orbitale locale, l'accélération de Coriolis, l'accélération d'Euler et l'accélération centrifuge.

$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G}$ est la vitesse angulaire de rotation de la base orbitale locale par rapport à la base géocentrique inertielle et ses coordonnées dans la base orbitale locale sont données par :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\nu} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}^T, \quad (\text{B.16})$$

avec ν l'anomalie vraie du satellite cible.

En utilisant les coordonnées des vecteurs \vec{r} , $\vec{\Delta r}$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{B}_{OL}/\mathcal{B}_G}$ dans la base orbitale locale, l'équation (B.15) devient :

$$\left. \frac{d^2 \vec{\Delta r}}{dt^2} \right|_{\mathcal{B}_G} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_R - 2\dot{\nu}\dot{y}_R - \dot{\nu}y_R - \dot{\nu}^2 x_R \\ \ddot{y}_R + 2\dot{\nu}\dot{x}_R + \dot{\nu}x_R - \dot{\nu}^2 y_R \\ \ddot{z}_R \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}} \quad (\text{B.17})$$

Le développement du membre de droite de l'équation (B.14) permet d'obtenir les

équations de la dynamique relative :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_R - 2\dot{\nu}\dot{y}_R - \ddot{\nu}y_R - \dot{\nu}^2x_R &= -\frac{\mu_{\oplus}(r+x_R)}{\sqrt{\left((x_R+r)^2+y_R^2+y_R^2\right)^3}} + \frac{\mu_{\oplus}}{r^2}, \\ \ddot{y}_R + 2\dot{\nu}\dot{x}_R + \ddot{\nu}x_R - \dot{\nu}^2y_R &= -\frac{\mu_{\oplus}y_R}{\sqrt{\left((x_R+r)^2+y_R^2+y_R^2\right)^3}}, \\ \ddot{z}_R &= -\frac{\mu_{\oplus}z_R}{\sqrt{\left((x_R+r)^2+y_R^2+y_R^2\right)^3}}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Avec l'hypothèse faite de la distance entre les deux satellites plus petite que la distance de la cible au centre de la Terre, les équations (B.18) sont linéarisées pour donner les équations de Tschauner-Hempel (voir [Tschauner, 1967]) :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_R &= 2\dot{\nu}\dot{y}_R + \ddot{\nu}y_R + \dot{\nu}^2x_R + 2\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}x_R, \\ \ddot{y}_R &= -2\dot{\nu}\dot{x}_R - \ddot{\nu}x_R + \dot{\nu}^2y_R - \frac{\mu_{\oplus}}{r^2}y_R, \\ \ddot{z}_R &= -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}z_R. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Dans le cas où l'orbite du satellite cible est circulaire, $\dot{\nu} = n = \text{constante}$, avec n le mouvement moyen de la cible, les équations de Tschauner-Hempel se simplifient pour donner les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire (voir [Clohessy and Wiltshire, 1960]) :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_R &= -2n\dot{y}_R + 3n^2y_R, \\ \ddot{y}_R &= -2n\dot{x}_R, \\ \ddot{z}_R &= -n^2z_R. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Il est possible de remarquer que le système défini par les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire est un système linéaire temps invariant.

B.1.2 MOUVEMENT NON KÉPLÉRIEN

Le mouvement non képlérien fait référence au mouvement du satellite soumis à toutes les perturbations orbitales décrites dans la section 1.2.2.

B.1.2.1 ORBITES OSCULATRICES

Dans le cas où le satellite subit des forces autres que la force centrale, la transformation du vecteur d'état cartésien en le vecteur d'état composé des éléments orbitaux classiques dépend du temps. Des paramètres orbitaux képlériens peuvent alors être définis à chaque instants et sont alors dépendants du temps. Ces paramètres obtenus par la transformation de la position et la vitesse du satellite à la date courante sont appelés éléments orbitaux osculateurs et définissent une ellipse dite osculatrice. Cette dernière est la trajectoire que suivrait le satellite à partir de la date courante si les perturbations étaient immédiatement supprimées ; l'ellipse osculatrice est donc tangente à la trajectoire réelle, mais de courbure différente.

On peut donc continuer à utiliser les paramètres vus précédemment, en les considérant dépendants du temps. Il est alors possible d'écrire :

$$\begin{aligned} x_{\text{COE}}(t) &= \left[a(t) \quad e(t) \quad i(t) \quad \Omega(t) \quad \omega(t) \quad M(t) \right]^T, \\ x_{\text{EOE}}(t) &= \left[a(t) \quad e_x(t) \quad e_y(t) \quad i_x(t) \quad i_y(t) \quad \ell_{M\Theta}(t) \right]^T. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

On cherche alors à écrire l'évolution du vecteur d'état du système à l'aide d'une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \vec{a}_p, t), \quad (\text{B.22})$$

avec \vec{a}_p l'accélération perturbatrice, c'est-à-dire la somme des accélérations dues à toutes les forces autres que la force d'attraction centrale. Toutes les perturbations orbitales subies par le satellite dérivent d'un potentiel. On peut alors écrire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mathcal{E}_p, t), \quad (\text{B.23})$$

où \mathcal{E}_p est le potentiel perturbateur.

La méthode de perturbation de Lagrange (voir [Zarrouati, 1987]) permet d'écrire l'évolution des éléments orbitaux sous l'effet d'un potentiel perturbateur, et conduit aux équations planétaires de Lagrange. Ces équations sont écrites pour les éléments orbitaux classiques et équinoxiaux.

B.1.2.2 ÉQUATIONS DE LAGRANGE

Les équations planétaires de Lagrange servent à calculer le mouvement d'un objet en orbite soumis à des petites perturbations conservatives, ce qui permet d'établir les équations d'évolution du mouvement perturbé. Ces dernières dérivant d'un potentiel, on peut écrire¹ :

$$\vec{a}_p = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x_{\text{EOC}}} \right)^T, \quad (\text{B.24})$$

où \mathcal{E}_p est l'énergie potentielle dont dérivent les forces autres que la force d'attraction centrale.

Les équations du mouvement (B.23) se réécrivent selon la méthode des variations de Lagrange :

$$\frac{dx_{\text{EOC}}}{dt} = K(x_{\text{EOC}}) + L_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t) \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x_{\text{EOC}}} \right)^T, \quad (\text{B.25})$$

1. En toute rigueur, la force s'écrit comme le gradient d'une énergie potentielle, c'est à dire $\vec{F} = \vec{\nabla} \mathcal{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{x}} \right)^T$. En utilisant les transformations entre la position et les éléments orbitaux, on peut généraliser la notion de gradient d'une énergie potentielle par rapport aux éléments orbitaux

Pour exprimer l'équation (B.25) en termes d'éléments orbitaux équinoxiaux, la relation entre les paramètres orbitaux classiques et les paramètres orbitaux équinoxiaux peut être exploitée :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\text{EOE}}}{dt} &= \left(\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} \right) \frac{dx_{\text{EOC}}}{dt} - \frac{\partial x_{\text{EOC}}}{\partial t}, \\ &= K(x_{\text{EOE}}) - \omega_T + \left(\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} \right) L_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t) \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x_{\text{EOE}} \partial x_{\text{EOC}}} \right)^T, \\ &= K(x_{\text{EOE}}) - \omega_T + L_{\text{EOE}}(x_{\text{EOE}}, t) \left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x_{\text{EOE}}} \right)^T. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

La matrice de Lagrange est ainsi exprimée à partir des éléments orbitaux équinoxiaux selon :

$$L_{\text{EOE}}(x_{\text{EOE}}, t) = \left(\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} \right) L_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t) \left(\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{EOC}}} \right)^T. \quad (\text{B.27})$$

La matrice de Lagrange transformée pour les paramètres orbitaux équinoxiaux se calcule avec la matrice jacobienne de changement de variables (B.6) et les équations de conversion de la sous section 1.3.2.2. En notant $p = 1 + i_x^2 + i_y^2$, et en rappelant les notations :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \quad b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad e^2 = e_x^2 + e_y^2, \quad (\text{B.28})$$

on peut écrire :

$$L_{\text{EOE}}(x_{\text{EOE}}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{na} \\ 0 & 0 & \frac{b}{na^3} & \frac{e_y i_x p}{2nab} & \frac{e_y i_y p}{2nab} & \frac{e_x b}{na^2(a+b)} \\ 0 & -\frac{b}{na^3} & 0 & -\frac{e_x i_x p}{2nab} & -\frac{e_x i_y p}{2nab} & \frac{e_y b}{na^2(a+b)} \\ 0 & -\frac{e_y i_x p}{2nab} & \frac{e_x i_x p}{2nab} & 0 & \frac{p^2}{4nab} & \frac{i_x p}{2nab} \\ 0 & -\frac{e_y i_y p}{2nab} & \frac{e_x i_y p}{2nab} & -\frac{p^2}{4nab} & 0 & \frac{i_y p}{2nab} \\ \frac{2}{na} & -\frac{e_x b}{na^2(a+b)} & -\frac{e_y b}{na^2(a+b)} & -\frac{i_x p}{2nab} & -\frac{i_y p}{2nab} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

Remarque B.1.

Dans la suite du travail les éléments orbitaux équinoxiaux et le vecteur d'état associés seront privilégiés. Ainsi, l'indice EOE sera omis pour des raisons de lisibilité, et l'équation

différentielle du mouvement libre s'écrit :

$$\frac{d^{\text{reel}}x}{dt} = K(x) - \omega_T + \sum_{\text{perturbation } i} L(x, t) \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{p_i}}{\partial x} \right)^T = f_L(x, t). \quad (\text{B.30})$$

f_L contient à la fois le terme central et les perturbations orbitales qui dérivent d'un potentiel.

B.1.3 ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION LINÉARISÉES

Dans le cadre du maintien à poste, le satellite reste dans le voisinage de la position de maintien à poste, si bien que la distance entre le satellite et le point de maintien à poste est très petite par rapport au rayon de l'orbite géostationnaire. Il est alors possible de linéariser la dynamique du satellite par rapport à la trajectoire géostationnaire idéale que suit le point de maintien à poste. Le modèle linéarisé dérivé dans cette section est celui qui servira pour la synthèse des lois de commande développées dans les chapitres 3, 4 et 5, alors que le modèle de simulation sera la dynamique non linéaire donnée par l'équation (B.30).

Dans cette section, afin de différencier les matrices et les vecteurs, les matrices seront notées entre crochets droits : $[M(x(t), t)]$ désigne alors la matrice M dépendant du vecteur $x(t)$ et du temps t .

B.1.3.1 POINT DE LINÉARISATION

Dans l'objectif du maintien à poste d'un satellite, les équations du mouvement peuvent être linéarisée autour de la position nominale de maintien à poste :

$$x_{mp} = [a_{mp} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \ell_{M\Theta, mp}]^T, \quad (\text{B.31})$$

avec $a_{mp} = 42\,165,765$ km et $\ell_{M\Theta, mp}$ la longitude moyenne de maintien à poste. Ce point est un point fictif sur une orbite géostationnaire qui évolue donc selon une dynamique képlérienne non perturbée :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mp} &= \left. \frac{d^{\text{kep}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} \\ &= 0 \text{ par construction.} \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Étudions alors les écarts à la position de maintien à poste décrits par :

$$\Delta x = x - x_{mp}. \quad (\text{B.33})$$

En d'autres termes, Δx décrit l'écart à chaque instant entre la position fictive qu'aurait un point qui évoluerait sur une orbite géostationnaire képlérienne (sans perturbations extérieures) et la position sur l'orbite réelle du satellite vérifiant :

$$\dot{x} = \frac{d^{\text{reel}}x}{dt}. \quad (\text{B.34})$$

On suppose que cet écart est petit, si bien qu'il peut être exprimé à l'ordre 1 par rapport au point de maintien à poste x_{mp} . Il en va de même pour sa dérivée temporelle.

B.1.3.2 DÉRIVÉE DE L'ÉCART DU VECTEUR D'ÉTAT À L'ORDRE 1

La dynamique de l'écart entre l'orbite réelle et l'orbite fictive linéarisée par rapport à Δx est calculée selon :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \left. \frac{d^{\text{reel}}x}{dt} - \frac{d^{\text{kep}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} = \left. \frac{d^{\text{reel}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}x}{dt} \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &= f_L(x_{mp}, t) + \left[\frac{\partial}{\partial x} (f_L(x(t), t)) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Avec l'identification :

$$[A(t)] = \left[\frac{\partial}{\partial x} (f_L(x(t), t)) \right]_{x=x_{mp}}, \quad D(t) = f_L(x_{mp}, t), \quad (\text{B.36})$$

nous obtenons le système linéaire :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = [A(t)]\Delta x + D(t). \quad (\text{B.37})$$

Remarque B.2. La dynamique libre est non homogène, ce qui conduit à un dynamique linéarisée représentée sous la forme d'un système temps variant.

B.2 MODÈLE D'ÉVOLUTION FORCÉE

L'objectif de cette section est d'établir les équations d'évolution du satellite en orbite autour de la Terre soumis au potentiel attracteur central et à l'accélération produite par ses propulseurs. Ces équations d'évolution sont distinguées des équations d'évolution libres car l'évolution n'est pas engendrée par des forces naturelles qui s'appliquent sur le satellite mais une force produite par les propulseurs dont l'intensité est contrôlée.

B.2.1 PERTURBATIONS DUES À LA PROPULSION

B.2.1.1 INTRODUCTION

Les opérations de contrôle d'orbite sont réalisées par l'intermédiaire de poussées. Bien que bénéficiant d'un traitement particulier puisqu'elles constituent le contrôle du satellite, ces poussées n'en restent pas moins des accélérations perturbatrices par rapport à l'accélération képlérienne du corps central. Le principe de la poussée est basé sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement totale du système {satellite + carburant} sous la forme :

$$m\dot{v} = \dot{m}c, \quad (\text{B.38})$$

où :

- m est la masse du système {satellite + carburant},
- v est la vitesse du satellite,
- \dot{m} est le taux de variation de masse due à l'éjection de carburant,
- c est la vitesse d'éjection du carburant.

Dans le cas où la vitesse d'éjection c est constante sur la durée d'une poussée, il est possible d'intégrer l'Equation (B.38) sur la durée de la poussée. L'incrément de vitesse est alors exprimé par :

$$\Delta v = c \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right), \quad (\text{B.39})$$

avec m_0 la masse du satellite et du carburant au début de la poussée et m_f la masse à la fin de la poussée. Du point de vue de l'analyse mission, le coût des corrections à effectuer est exprimé en incrément de vitesse totale Δv_{tot} nécessaire pour réaliser la mission.

Cette équation est souvent réécrite sous la forme :

$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{\Delta v}{c}}, \quad (\text{B.40})$$

connue sous le nom d'Equation de Tsiolkovski ou *rocket equation*.

La poussée est calculée par :

$$T = \dot{m}c. \quad (\text{B.41})$$

L'impulsion spécifique est définie par :

$$I_{sp} = \frac{\int_{t_0}^t T dt}{g \int_{t_0}^t \dot{m} dt}, \quad (\text{B.42})$$

où g est l'accélération de la gravité terrestre au niveau de la mer. Il s'agit du ratio de la poussée par le débit d'éjection du carburant. En supposant la poussée constante sur l'intervalle de temps pendant lequel la poussée a lieu, on peut réécrire :

$$I_{sp} = \frac{c}{g}. \quad (\text{B.43})$$

Pour définir l'efficacité du propulseur, il est nécessaire de s'intéresser au rapport de la puissance mécanique de sortie par la puissance d'entrée. La puissance de sortie est la puissance du jet de carburant :

$$P_{\text{sortie}} = \frac{1}{2} \dot{m}c^2 = \frac{1}{2} Tc, \quad (\text{B.44})$$

et en notant $P_{\text{entrée}}$ la puissance fournie en entrée, le rendement du propulseur est exprimée par (voir [Koppel, 1999]) :

$$\eta = \frac{1}{2} g I_{sp} \frac{T}{P_{\text{sortie}}}. \quad (\text{B.45})$$

B.2.1.2 PROPULSION CHIMIQUE ET PROPULSION ÉLECTRIQUE

Les systèmes à propulsion chimique peuvent être décomposés en propulsion chimique solide et propulsion chimique liquide (voir [Sidi, 1997, annexe C2]). Ces derniers peuvent

Type de propulseur	Poussée (N)	I_{sp} (s)
Propulsion solide	260 ~ 488	295,7
Propulsion liquide à un carburant	0.1 ~ 500	235
Propulsion liquide à deux carburants	4210	289
Propulsion électrique	0.13	3000

TABLE B.1 – Types de propulseurs avec valeurs de poussée et d'impulsion spécifique. Les valeurs sont prises de [Sidi, 1997].

utiliser un ou deux types de carburants. La mise en œuvre d'un moteur à deux carburants est technologiquement plus complexe que la mise en œuvre d'un moteur à un carburant.

Les systèmes à propulsion électrique sont divisés en plusieurs catégories (voir [Jahn and Choueiri, 2002]) :

- la propulsion électrothermique : le carburant est chauffé et éjecté à travers une tuyère,
- la propulsion électrostatique : le carburant est accéléré par l'application d'une force électrostatique sur des particules ionisées,
- la propulsion électromagnétique : le carburant est accéléré sous l'action combinée de forces électriques et magnétiques.

Les deux catégories de systèmes de propulsion, électrique et chimique, se distinguent par leur plage d'impulsion spécifique et de niveau de poussée disponible. Le tableau B.1 résume les différentes caractéristiques des différents types de propulseurs. Les propulseurs électriques permettent d'obtenir de grandes valeurs d'impulsion spécifiques, mais au prix d'une poussée très faible comparée à la poussée produite par un propulseur à poussée chimique. Selon [Sidi, 1997], la puissance électrique à fournir est de 1 500 V, ce qui est délicat dans le cadre de technologies spatiales, et en général supérieur à la tension que peut délivrer un générateur solaire classique (voir [Jahn and Choueiri, 2002]), ce qui nécessite la mise en place de sous-systèmes de conversion. La durée de vie de ces propulseurs peut atteindre 15 000 heures, mais le vieillissement des composants entraîne une augmentation de la puissance électrique nécessaire au fonctionnement du propulseurs.

Malgré ces problèmes d'ordre technologiques, le système de propulsion électrique tend à devenir la norme pour les satellites géostationnaire car elle permet d'économiser le moteur d'apogée ainsi que les ergols utilisés par ce moteur pour la phase de mise à poste. Dans le cas de l'utilisation de la propulsion électrique, cette phase dure plusieurs mois. Ce désavantage est compensé par la durée de vie du satellite augmentée et par la diminution de la masse au lancement. Des détails plus techniques peuvent être trouvés dans les références [Sidi, 1997], [Marcuccio et al., 1997], [Martinez-Sanchez and Pollard, 1998a], [Larson and Wertz, 1992], [Lyszyk and Garnero, 2004], [Martinez-Sanchez and Pollard, 1998b] ou encore [Koppel, 1999].

B.2.2 ÉQUATIONS DE GAUSS

Les équations de Gauss permettent de prendre en compte l'effet d'une accélération perturbatrice ne dépendant pas d'un potentiel sur la variation des éléments orbitaux. Dans l'étude menée ici, seuls les propulseurs produisent une accélération ne dérivant pas d'un

potentiel. C'est pourquoi l'accélération ainsi produite est considérée au travers des équations de Gauss.

B.2.2.1 PERTURBATIONS DE POUSSÉE

L'accélération produite par les propulseurs, qu'ils soient électriques ou chimiques, peut être considérée comme une perturbation extérieure. Malgré son caractère artificiel, elle peut s'inscrire dans le cadre de l'étude des perturbations orbitales. Cependant, il n'est pas possible d'écrire cette accélération comme le gradient d'un potentiel et les équations planétaires de Lagrange ne sont pas applicables. On utilise alors les équations de perturbations de Gauss qui permettent de prendre en compte l'effet de petites accélérations non conservatives.

Les équations de Gauss permettent d'établir des équations différentielles d'évolution des éléments orbitaux sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \vec{a}_p, t), \quad (\text{B.46})$$

Les éléments orbitaux $x(t)$ ainsi obtenus définissent de la même façon que précédemment une orbite osculatrice à chaque instant.

B.2.2.2 EQUATIONS DE PERTURBATION DE GAUSS

Il est possible d'exprimer l'accélération perturbatrice provenant de la poussée des propulseurs \vec{a}_p dans la base orbitale locale $(\vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$:

$$\vec{a}_p = a_{pR}\vec{u}_R + a_{pT}\vec{u}_T + a_{pN}\vec{u}_N. \quad (\text{B.47})$$

L'évolution du vecteur d'état est maintenant donnée par les équations de Gauss :

$$\frac{dx_{\text{EOC}}(t)}{dt} = K(x_{\text{EOC}}(t)) + G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}(t), t)\vec{a}_p, \quad (\text{B.48})$$

La matrice de Gauss ci-dessus dépend du vecteur d'état x_{EOC} . Comme l'anomalie moyenne s'obtient à partir de l'anomalie vraie à l'aide des équations (C.10) et (1.14), pour lesquelles il n'existe pas toujours de solution analytique, le modèle obtenu est transcendant.

L'équation perturbée (B.48) peut être exprimée à l'aide des éléments orbitaux équinoxiaux de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\text{EOE}}}{dt} &= \left[\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{COE}}} \right] \frac{dx_{\text{EOC}}}{dt} - \frac{\partial x_{\text{EOC}}}{\partial t}, \\ &= K(x_{\text{EOE}}) - \omega_T + G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t)\vec{a}_p. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

La matrice de Gauss en éléments orbitaux équinoxiaux se déduit donc de la matrice de Gauss en éléments orbitaux classiques selon la formule :

$$G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t) = \left[\frac{\partial x_{\text{EOE}}}{\partial x_{\text{COE}}} \right] G_{\text{EOC}}(x_{\text{EOC}}, t). \quad (\text{B.50})$$

Il est possible de calculer $G_{\text{EOE}}(\mathbf{x}_{\text{EOE}}, t)$ avec l'équation (B.6) et les équations de conversion de l'annexe D.2.

$$G_{\text{EOE}}(x_{\text{EOE}}, t) = \begin{bmatrix} \frac{2a}{nb} p_2 & \frac{2b}{nr} & 0 \\ \frac{b}{na^2} \sin \nu_Q & \frac{r}{nab} \left[e_x + \left(1 + \frac{b^2}{ar} \right) \cos \nu_Q \right] & -\frac{e_y r p_6}{nab} \\ -\frac{b}{na^2} \cos \nu_Q & \frac{r}{nab} \left[e_y + \left(1 + \frac{b^2}{ar} \right) \sin \nu_Q \right] & \frac{e_x r p_6}{nab} \\ 0 & 0 & \frac{r p_5}{2nab} \cos \nu_Q \\ 0 & 0 & \frac{r p_5}{2nab} \sin \nu_Q \\ -\frac{r}{nab} \left[p_1 \frac{b^2}{a+b} + \frac{2b}{a} \right] & \frac{r}{nb(a+b)} p_2 \left(1 + \frac{b^2}{ar} \right) & \frac{r}{nab} p_6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.51})$$

avec les variables p_1 à p_6 définies par :

$$p_1 = e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q, \quad (\text{B.52a})$$

$$p_2 = e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q, \quad (\text{B.52b})$$

$$p_3 = \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}, \quad (\text{B.52c})$$

$$p_4 = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}, \quad (\text{B.52d})$$

$$p_5 = 1 + i_x^2 + i_y^2, \quad (\text{B.52e})$$

$$p_6 = i_x \sin \nu_Q - i_y \cos \nu_Q. \quad (\text{B.52f})$$

Dans la suite, la poussée exercée par les moteurs est considérée comme le contrôle. Les équations de Gauss peuvent alors être réécrites avec $\vec{a}_p = u$ comme vecteur de commande. L'équation différentielle du mouvement contrôlé s'écrit :

$$\frac{d^{\text{reel}} x}{dt} = K(x, t) + f_G(x, t)u, \quad (\text{B.53})$$

où f_L correspond au terme central et f_G correspond à la prise en compte du contrôle (accélérations dues à la poussée des propulseurs).

B.2.3 LINÉARISATION DE LA DYNAMIQUE CONTRÔLÉE

Tout comme pour la section B.1.3 page 236, la dynamique est linéarisée autour de la trajectoire géostationnaire décrite par le point de maintien à poste. Les matrices sont notées entre crochets droits afin de les distinguer des vecteurs.

$$x_{mp} = \left[a_{mp} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ell_{M\Theta, mp} \right]^T. \quad (\text{B.54})$$

On suppose donc que les écarts au vecteur d'état de maintien à poste sont petits et par conséquent que la commande à appliquer pour corriger ces petits écarts par rapport à la position de maintien à poste est petite. Ces écarts et leur dérivée temporelle sont exprimés dans un développement limité à l'ordre 1 par rapport au point de maintien à poste x_{mp} , supposé évoluer selon une dynamique képlérienne, de telle sorte que :

$$\dot{x}_{mp} = \left. \frac{d^{\text{kep}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} = 0 \text{ par construction} \quad (\text{B.55})$$

On cherche à calculer $\frac{d\Delta x}{dt}$ linéarisé par rapport à l'écart entre l'orbite réelle et l'orbite fictive géostationnaire. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{d^{\text{reel}}x}{dt} - \left. \frac{d^{\text{kep}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} = \frac{d^{\text{reel}}x}{dt} = \left. \frac{d^{\text{reel}}x}{dt} \right|_{x=x_{mp}} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}x}{dt} \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &= K(\vec{x}_{mp}, t) + [f_G(\vec{x}_{mp}, t)] u(t) + \left[\frac{\partial}{\partial x} (f_L(x(t), t)) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &\quad + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} ([f_G(x(t), t)]) \right]_{x=x_{mp}}}_{\text{ordre 2}} u(t) \Delta x \\ &= K(x_{mp}, t) + [f_G(x_{mp}, t)] u(t) + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}} (K(x(t), t)) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Avec l'identification :

$$[A(t)] = \left[\frac{\partial}{\partial x} (K(x(t), t)) \right]_{x=x_{mp}}, \quad [B(t)] = [f_G(x_{mp}, t)], \quad D(t) = K(x_{mp}, t), \quad (\text{B.57})$$

le système linéaire suivant peut être écrit :

$$\frac{d\Delta x}{dt} = [A(t)]\Delta x + D(t) + [B(t)]\vec{u}(t). \quad (\text{B.58})$$

En évaluant la matrice de Gauss (B.51) pour $x = x_{mp}$, on peut obtenir la forme suivante pour la matrice $B(t)$:

$$B(t) = \frac{1}{v_{mp}} \begin{bmatrix} 0 & a_{mp} & 0 \\ \sin \kappa_{mp}(t) & 2 \cos \kappa_{mp}(t) & 0 \\ -\cos \kappa_{mp}(t) & 2 \sin \kappa_{mp}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \cos \kappa_{mp}(t) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \sin \kappa_{mp}(t) \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.59})$$

avec $\kappa_{mp}(t) = \ell_{M\Theta, mp} + \Theta(t)$. On définit également $\kappa(t) = \ell_{M\Theta} + \Theta(t)$. La grandeur $\kappa_{mp}(t)$ évaluée au point de maintien à poste conserve sa dépendance temporelle qui est due à la

rotation de la Terre. En effet, $\ell_{M\Theta}$ traduit la position d'un point par rapport à un point situé à la longitude moyenne de référence et du fait de la rotation de la Terre, ce point est en mouvement par rapport au repère géocentrique inertiel. On peut noter que :

$$\dot{\kappa}_{mp}(t) = \omega_{\oplus} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a_{mp}^3}} = n_{mp}, \quad (\text{B.60})$$

où n_{mp} est le mouvement moyen d'un point sur une orbite géostationnaire et est donc égal par définition à la vitesse angulaire de rotation de la Terre sur elle-même.

B.2.4 ANALYSE DES EFFETS DE LA PROPULSION SUR LES ÉLÉMENTS ORBITAUX RELATIFS

A partir de l'expression de la matrice $B(t)$ donnée par l'équation (B.60), il est possible de déterminer analytiquement les variations des éléments orbitaux équinoxiaux relatifs dues à l'action des propulseurs. Après avoir présenté la modélisation mathématique de la poussée forte et de la poussée faible, les variations d'éléments orbitaux induites par ces poussées sont calculées.

B.2.4.1 VARIATION DES PARAMÈTRES ORBITAUX

L'accélération due aux propulseurs \vec{u} peut être exprimée dans le repère orbital local $(\vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ sous la forme

$$\vec{u} = u_R \vec{u}_R + u_T \vec{u}_T + u_N \vec{u}_N \quad (\text{B.61})$$

Le vecteur d'écart entre le vecteur d'état correspondant à la position réelle du satellite et le vecteur d'état du point fictif en orbite géostationnaire devrait être noté :

$$\Delta x = \left[\Delta a \quad \Delta e_x \quad \Delta e_y \quad \Delta i_x \quad \Delta i_y \quad \Delta \ell_{M\Theta} \right]^T, \quad (\text{B.62})$$

cependant, pour alléger les notations de cette partie, les composantes du vecteur d'écart sont notées :

$$\Delta x = \left[a \quad e_x \quad e_y \quad i_x \quad i_y \quad \ell_{M\Theta} \right]^T. \quad (\text{B.63})$$

Avec la simplification introduite, l'effet d'une poussée sur les éléments orbitaux peut se réécrire :

$$\dot{a}(t) = 2 \frac{a_{mp}}{v_{mp}} u_T(t), \quad (\text{B.64a})$$

$$\dot{e}_x(t) = \frac{1}{v_{mp}} \sin(\kappa_{mp}(t)) u_R(t) + \frac{2}{v_{mp}} \cos(\kappa_{mp}(t)) u_T(t), \quad (\text{B.64b})$$

$$\dot{e}_y(t) = -\frac{1}{v_{mp}} \cos(\kappa_{mp}(t)) u_R(t) + \frac{2}{v_{mp}} \sin(\kappa_{mp}(t)) u_T(t), \quad (\text{B.64c})$$

$$\dot{i}_x(t) = \frac{1}{2v_{mp}} \cos(\kappa_{mp}(t)) u_N(t), \quad (\text{B.64d})$$

$$\dot{i}_y(t) = \frac{1}{2v_{mp}} \sin(\kappa_{mp}(t)) u_N(t), \quad (\text{B.64e})$$

$$\dot{\ell}_{M\Theta}(t) = -\frac{3}{2} \frac{n_{mp}}{a_{mp}} a(t) - \frac{2}{v_{mp}} u_R(t) \quad (\text{B.64f})$$

où $v_{mp} = n_{mp} a_{mp}$ est la vitesse sur une orbite keplérienne géostationnaire.

B.2.4.2 CORRECTIONS À POUSSÉE FORTE

Dans le cas d'un satellite équipé de moteurs à poussée forte, l'accélération produite par un propulseur à l'instant t_* est modélisée par une impulsion de durée nulle et d'intégrale finie de la façon suivante :

$$u(t) = \Delta v(t) \delta(t - t_*) \quad (\text{B.65})$$

avec δ l'échelon de Dirac en 0. $\Delta v(t)$ est l'incrément de vitesse fourni à l'instant t de telle sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta v(t) \delta(t - t_*) dt = \Delta v(t_*) \quad (\text{B.66})$$

Comme le décrit la référence [Bainov and Simeonov, 1993], l'idéalisation impulsionnelle de la commande résulte de la différence d'échelle de temps entre l'évolution libre, pour laquelle les éléments orbitaux subissent des variations lentes, et l'évolution contrôlée, pour laquelle les éléments orbitaux subissent des variations rapides sur une courte période de temps.

Dans ce cas, les équations (B.64) s'intègrent très facilement comme cela est fait dans [Campan and Brousse, 1994] et [Soop, 1994]. Pour une grandeur quelconque ρ qui subit un saut en t_* , la notation $\Delta\rho(t_*)$ est définie par :

$$\Delta\rho(t_*) = \rho(t_*^+) - \rho(t_*^-). \quad (\text{B.67})$$

On peut intégrer les équations (B.64) pour une poussée en $t = t_*$ pour $* = \{R, T, N\}$, R désignant une poussée radiale, T une poussée tangentielle² et N une poussée normale. Dans le cas de plusieurs créneaux de poussée, il suffit de faire la somme des contributions de chacune des poussées.

Les variations des éléments orbitaux dues à une poussée suivant les trois axes s'expriment de la façon suivante :

$$\Delta a(t_T) = 2 \frac{a_{mp}}{v_{mp}} \Delta v_T(t_T), \quad (\text{B.68a})$$

$$\Delta e_x(t_R) = \frac{\sin(\kappa_{mp}(t_R))}{v_{mp}} \Delta v_R(t_R), \quad (\text{B.68b})$$

$$\Delta e_x(t_T) = 2 \frac{\cos(\kappa_{mp}(t_T))}{v_{mp}} \Delta v_T(t_T), \quad (\text{B.68c})$$

$$\Delta e_y(t_R) = -\frac{\cos(\kappa_{mp}(t_R))}{v_{mp}} \Delta v_R(t_R), \quad (\text{B.68d})$$

2. L'appellation « tangentielle » est un abus de langage : cette poussée se fait dans une direction perpendiculaire à la direction radiale qui n'est en général pas tangente à l'orbite si le point considéré est différent de l'apogée ou du périégée. Cependant, pour une orbite presque géostationnaire, la perpendiculaire à la direction radiale est presque tangente à l'orbite .

$$\Delta e_y(t_T) = 2 \frac{\sin(\kappa_{mp}(t_T))}{v_{mp}} \Delta v_T(t_T), \quad (\text{B.68e})$$

$$\Delta i_x(t_N) = \frac{\cos(\kappa_{mp}(t_N))}{2v_{mp}} \Delta v_N(t_N), \quad (\text{B.68f})$$

$$\Delta i_y(t_N) = \frac{\sin(\kappa_{mp}(t_N))}{2v_{mp}} \Delta v_N(t_N), \quad (\text{B.68g})$$

$$\Delta \ell_{M\Theta}(t_R) = -\frac{2}{v_{mp}} \Delta v_R(t_R), \quad (\text{B.68h})$$

$$\Delta \dot{\ell}_{M\Theta}(t_T) = -3 \frac{n_{mp}}{v_{mp}} \Delta v_T(t_T). \quad (\text{B.68i})$$

Le système (B.58) étant linéaire en le contrôle, d'après le principe de superposition, les deux variations des composantes du vecteur excentricité peuvent être ajoutée lorsqu'une poussée radiale et une poussée tangentielle se produisent.

Les équations (B.68h) et (B.68i) montrent que la longitude moyenne varie directement grâce à une poussée radiale, mais varie indirectement grâce à une poussée tangentielle. Une poussée tangentielle a pour effet direct de modifier le taux de dérive, ce qui entraîne par intégration une modification de la longitude moyenne. Ainsi, pour contrôler la longitude moyenne par une poussée tangentielle, il faut fixer une valeur de longitude à atteindre au bout d'un certain temps, comme cela est décrit dans [Campan and Brousse, 1994].

Les équations (B.68a) – (B.68i) montrent que les corrections en demi grand axe et en longitude moyenne sont indépendantes de la position du satellite sur l'orbite tandis que les corrections pour le vecteur excentricité et le vecteur inclinaison dépendent de la position sur l'orbite, et donc de l'instant d'allumage des propulseurs. Ces considérations sont à la base des stratégies de maintien à poste qui seront exposées plus loin.

B.2.4.3 CORRECTIONS À POUSSÉE FAIBLE

Dans le cas d'un satellite équipé de moteurs à poussée faible, l'accélération produite par un propulseur entre les instants t_d et t_f est modélisée par un créneau constant tel que :

$$u_*(t) = \begin{cases} \frac{\Delta v_*}{t_{*,f} - t_{*,d}} & \text{si } t_{*,d} \leq t \leq t_{*,f} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{B.69})$$

avec Δv_* l'incrément de vitesse dû à cette poussée.

Que ce soit dans le cas d'une modélisation par une impulsion (poussée forte) ou par un créneau (poussée faible), il est possible de calculer la variation des éléments orbitaux après la poussée. Dans le cas de la poussée forte, on suppose que la variation des éléments orbitaux se fait de façon instantanée. Cependant, dans le cas de la poussée faible, la poussée n'est plus instantanée.

On peut intégrer les équations (B.64) pour une poussée commençant à $t_{*,d}$, se terminant à $t_{*,f}$, de point milieu $t_{*,m}$ et de durée $\Delta T_* = t_{*,f} - t_{*,d}$, pour $* = \{R, T, N\}$. On a par ailleurs : $t_{*,m} = t_{*,d} + \frac{\Delta T_*}{2} = \frac{t_{*,d} + t_{*,f}}{2}$. Dans le cas de plusieurs créneaux de poussée, il suffit de faire la somme des contributions de chacune des poussées.

On note par définition la variation totale du paramètre orbital ρ sur la durée de la

poussée dans la direction * par :

$$\Delta_*\rho = \rho(t_{*,f}) - \rho(t_{*,d}). \quad (\text{B.70})$$

Pour une trajectoire modifiée avec des propulseurs à poussée faible, les t les variations des paramètres orbitaux dues à une poussée faible s'écrivent :

$$\Delta_T a = 2 \frac{a_{mp}}{v_{mp}} \Delta v_T, \quad (\text{B.71a})$$

$$\Delta_R e_x = \frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_R}{2}\right) \sin(\kappa_{mp}(t_{R,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_R}{2} v_{mp}} \Delta v_R, \quad (\text{B.71b})$$

$$\Delta_T e_x = 2 \frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_T}{2}\right) \cos(\kappa_{mp}(t_{T,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_T}{2} v_{mp}} \Delta v_T, \quad (\text{B.71c})$$

$$\Delta_R e_y = -\frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_R}{2}\right) \cos(\kappa_{mp}(t_{R,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_R}{2} v_{mp}} \Delta v_R, \quad (\text{B.71d})$$

$$\Delta_T e_y = 2 \frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_T}{2}\right) \sin(\kappa_{mp}(t_{T,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_T}{2} v_{mp}} \Delta v_T, \quad (\text{B.71e})$$

$$\Delta_N i_x = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_N}{2}\right) \cos(\kappa_{mp}(t_{N,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_N}{2} v_{mp}} \Delta v_N, \quad (\text{B.71f})$$

$$\Delta_N i_y = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{n_{mp}\Delta T_N}{2}\right) \sin(\kappa_{mp}(t_{N,m}))}{\frac{n_{mp}\Delta T_N}{2} v_{mp}} \Delta v_N, \quad (\text{B.71g})$$

$$\Delta_R \ell_{M\Theta} = \frac{2}{v_{mp}} \Delta v_R, \quad (\text{B.71h})$$

$$\Delta_T \dot{\ell}_{M\Theta} = -\frac{3}{a_{mp}} \Delta v_T. \quad (\text{B.71i})$$

Les équations (B.71a) - (B.71h) correspondent aux équations de variations des éléments orbitaux équinoxiaux présentées par les références [Eckstein, 1978] et [Eckstein and Hechler, 1981] en fonction de l'accélération produite par les propulseurs.

Pour les variations de paramètres orbitaux ne dépendant pas de la position sur l'orbite, les expressions dans le cas de la poussée forte et dans le cas de la poussée faible sont identiques, seule change donc la valeur de l'accélération produite. Pour les variations des paramètres dépendant de la position sur l'orbite, on peut observer dans le cas de la poussée faible ce que [Soop, 1994] nomme une perte d'efficacité de correction due à l'étalement de la poussée. Cette perte d'efficacité se traduit dans les équations (B.71b) à (B.71g) par la présence d'un terme en sinus cardinal $\text{sinc}\left(\frac{n\Delta T}{2}\right) \leq 1$. C'est pourquoi, [Eckstein, 1978] préconise d'effectuer plusieurs poussées courtes par orbite plutôt qu'une seule longue poussée. On peut tout de même remarquer que ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus pour la poussée forte : en effet, lorsque la durée de la poussée tend vers 0, on retrouve les expressions (B.68a)-(B.68i).

B.3 POSITION GÉOGRAPHIQUE

B.3.1 POSITION GÉOGRAPHIQUE LINÉARISÉE

De la même façon que le vecteur d'état a été linéarisé par rapport au vecteur d'état d'un point fictif se déplaçant sur une orbite géostationnaire képlérienne, il est possible de linéariser l'expression des paramètres géographiques par rapport au vecteur de paramètres géographiques d'un point fictif se déplaçant sur une orbite géostationnaire. Ce point fictif est noté :

$$y_{mp} = \begin{bmatrix} r_{mp} & 0 & \lambda_{mp} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.72})$$

où $r_{mp} = 35\,787,628$ km et λ_{mp} est la longitude géographique de maintien à poste. L'écart entre la position du satellite et la position géographique de maintien à poste est noté :

$$\Delta y = y - y_{mp}, \quad (\text{B.73})$$

avec :

$$\dot{y} = \frac{d^{\text{reel}}y}{dt}, \quad \dot{y}_{mp} = \frac{d^{\text{kep}}y}{dt} \Big|_{x=x_{mp}}. \quad (\text{B.74})$$

Pour des raisons de lisibilité, l'indice EOE est omis pour le vecteur d'état. On peut calculer $\Delta y(x(t), t)$ à l'ordre 1 en Δx :

$$\Delta y = y - y_{mp} \quad (\text{B.75})$$

$$= g(x, t) - g(x_{mp}, t) \quad (\text{B.76})$$

$$= g(x_{mp}, t) + \left[\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right]_{\vec{x}=x_{mp}} \Delta x - g(x_{mp}, t) \quad (\text{B.77})$$

$$= \left[\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \quad (\text{B.78})$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} ([T(x(t), t)]x(t)) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \quad (\text{B.79})$$

$$= \left[\left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} x(t) \right]_{x=x_{mp}} + [T(x(t), t)]_{x=x_{mp}} \right] \Delta x \quad (\text{B.80})$$

$[T(x(t), t)]$ est remplacé par son expression dans l'équation précédente :

$$\left[\left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} x(t) \right]_{x=x_{mp}} \right] = \mathbf{0}_{3 \times 6} \quad (\text{B.81})$$

En posant :

$$[C(t)] = [T(x(t), t)]_{x=x_{mp}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a_{mp} \cos(\kappa_{mp}(t)) & -a_{mp} \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \sin(\kappa_{mp}(t)) & -2 \cos(\kappa_{mp}(t)) & 0 \\ 0 & 2 \sin(\kappa_{mp}(t)) & -2 \cos(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.82})$$

en rappelant $\kappa_{mp}(t) = \ell_{M\Theta,mp} + \Theta(t)$, il vient :

$$\Delta y = C(t)\Delta x \quad (\text{B.83})$$

B.3.2 DÉRIVÉE DE L'ÉCART EN POSITION GÉOGRAPHIQUE

B.3.2.1 NOTATIONS

Dans cette annexe, des vecteurs, des matrices, des tenseurs d'ordre 3 et d'ordre 4 sont utilisés pour dériver les équations d'évolution linéarisées. Pour éviter les confusions dans les notations, les conventions suivantes sont adoptées dans cette section uniquement :

- $x(t)$ est un vecteur dépendant du temps t ,
- $[D(\vec{x}(t), t)]$ est une matrice qui dépend du vecteur $\vec{x}(t)$ et du temps t ,
- $\{T(\vec{x}(t), t)\}$ est un tenseur d'ordre 3 qui dépend du vecteur \vec{x} et du temps t
- $\langle Q(\vec{x}(t), t) \rangle$ est un tenseur d'ordre 4 qui dépend du vecteur \vec{x} et du temps t .

B.3.2.2 CALCUL FORMEL

Dans cette annexe, l'évolution temporelle de l'écart en position géographique calculé dans la section B.3.1 est dérivée et exprimée en fonction de l'écart en éléments orbitaux à l'ordre 1. La linéarisation s'effectue par rapport à la position géographique de maintien à poste $y_{mp} = y(x_{mp})$ soumis à la dynamique réelle :

$$\frac{d\Delta y}{dt} = \frac{d^{\text{reel}}y}{dt} - \frac{d^{\text{kep}}y_{mp}}{dt}, \quad (\text{B.84})$$

$$= \frac{d^{\text{reel}}g(x(t), t)}{dt} - \frac{d^{\text{kep}}g(x_{mp}, t)}{dt}, \quad (\text{B.85})$$

$$= \frac{d^{\text{reel}}g(x(t), t)}{dt} \Big|_{x=x_{mp}} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}g(\vec{x}(t), t)}{dt} \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x - \frac{d^{\text{kep}}g(x_{mp}, t)}{dt}, \quad (\text{B.86})$$

$$= \frac{d^{\text{reel}}}{dt} \left([T(x(t), t)]x(t) \right) \Big|_{x=x_{mp}}, \quad (\text{B.87})$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}}{dt} ([T(x(t), t)]x(t)) \right) \right]_{x=\vec{x}_{mp}} \Delta x \quad (\text{B.88})$$

$$- \frac{d^{\text{kep}}}{dt} ([T(x_{mp}, t)]x_{mp}). \quad (\text{B.89})$$

Les trois termes précédents (B.87), (B.88) et (B.89) peuvent être calculés séparément.

Le terme (B.89) se réécrit :

$$\frac{d^{\text{kep}}}{dt}([T(x_{mp}, t)]x_{mp}) = \frac{\partial}{\partial t}([T(x_{mp}, t)]x_{mp}) + \left[\frac{\partial}{\partial x}([T(x_{mp}, t)]x_{mp}) \right] \frac{d^{\text{kep}}x}{dt}, \quad (\text{B.90})$$

$$= \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} x_{mp}. \quad (\text{B.91})$$

Le terme (B.87) se réécrit :

$$\left. \frac{d^{\text{reel}}}{dt}([T(x(t), t)]x(t)) \right|_{x_{mp}} = \left[\frac{\partial}{\partial x}([T(x(t), t)]x(t)) \right]_{x_{mp}} \left. \frac{d^{\text{reel}}x(t)}{dt} \right|_{x_{mp}} + \left. \frac{\partial}{\partial t}([T(x(t), t)]x(t)) \right|_{x_{mp}}, \quad (\text{B.92})$$

$$= [C(t)](D(t) + [B(t)]u(t)) + \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} x_{mp}. \quad (\text{B.93})$$

Le terme (B.88) se réécrit :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}}{dt}([T(x(t), t)]x(t)) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}([T(x(t), t)]x(t)) \right] \frac{d^{\text{reel}}x(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}([T(x(t), t)]x(t)) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}([T(x(t), t)]x(t)) \right] f_L(\vec{x}(t), t) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}([T(x(t), t)]x(t)) \right] [f_G(x(t), t)] \right) \right]_{x=x_{mp}} \underbrace{u(t)\Delta x}_{\text{ordre 2}} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] x(t) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} \vec{x}(t) \right] \vec{f}_L(x(t), t) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left([T(x(t), t)] f_L(x(t), t) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &\quad + \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\} x(t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\ &\quad + \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\ &= \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} x \right] \right\} f_L(x(t), t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} x(t) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \vec{f}_L(\vec{x}(t), t) \right]}_{\text{ordre 2 (deux dérivées)}} \Big|_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} f_L(x(t), t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[T(x(t), t) \left[\frac{\partial}{\partial x} f_L(x(t), t) \right] \right]_{\vec{x}=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\} x(t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\
= & \left[\left\{ \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\rangle}_{\text{ordre 2 (dérivée seconde)}} x(t) \right\} f_L(x(t), t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + 2 \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} f_L(x(t), t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[T(x(t), t) \left[\frac{\partial}{\partial x} f_L(x(t), t) \right] \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\} x(t) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
& + \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right]_{x=x_{mp}} \Delta x, \\
= & 2 \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} f_L(x_{mp}, t) \right] \Delta x \\
& + \left[T(x_{mp}, t) \left[\frac{\partial}{\partial x} f_L(x(t), t) \right]_{x=x_{mp}} \right] \Delta x \\
& + \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\}_{x=x_{mp}} x_{mp} \right] \Delta x \\
& + \left[\frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} \right] \Delta x, \\
= & \left[2 \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} D(t) + [C(t)][A(t)] + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\}_{\vec{x}=x_{mp}} x_{mp} \right. \\
& \left. + \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} \right] \Delta x.
\end{aligned}$$

En rassemblant les trois parties, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta y}{dt} &= \frac{d^{\text{reel}}}{dt} \left([T(x(t), t)]x(t) \right) \Big|_{x=x_{mp}} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^{\text{reel}}}{dt} ([T(x(t), t)]x(t)) \right) \right]_{x=x_{mp}} \Delta x \\
&\quad - \frac{d^{\text{kep}}}{dt} ([T(x_{mp}, t)]x_{mp}), \\
&= [C(t)](D(t) + [B(t)]u(t)) + \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} x_{mp} \\
&\quad + \left[2 \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} D(t) + [C(t)][A(t)] + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right] \right\}_{x=x_{mp}} x_{mp} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} \right] \Delta x - \frac{\partial [T(x_{mp}, t)]}{\partial t} x_{mp} \tag{B.94}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le calcul de la dérivée temporelle totale de la matrice $[C(t)]$ donne :

$$\begin{aligned}
[\dot{C}(t)] &= \left[\frac{d[T(x_{mp}, t)]}{dt} \right] + \left[\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{\bar{x}=x_{mp}} x_{mp} \right], \\
&= \left[\frac{d[T(x_{mp}, t)]}{dt} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} x_{mp} \right], \tag{B.95} \\
&= \left[\frac{d[T(x_{mp}, t)]}{dt} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial t} \right\}_{x=x_{mp}} x_{mp} \right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en posant :

$$[H(t)] = \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} D(t) \right], \tag{B.96}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta y}{dt} &= \left[2 \left[\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} D(t) \right] + [C(t)][A(t)] + [\dot{C}(t)] \right] \Delta x \\
&\quad + [C(t)]D(t) + [C(t)][B(t)]u(t) \\
&= [E(t)]\Delta x + [C(t)]D(t) + [C(t)][B(t)]u(t), \tag{B.97}
\end{aligned}$$

avec :

$$[E(t)] = \left[2[H(t)] + [C(t)][A(t)] + [\dot{C}(t)] \right]. \tag{B.98}$$

B.3.2.3 CALCUL EXPLICITE

Pour calculer explicitement la matrice $[E(t)]$, il suffit de calculer $[H(t)]$ et $[\dot{C}(t)]$.
 $\left\{ \frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}$ est un tenseur d'ordre 3 qui s'écrit :

$$\left\{ \frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial a} \right] \\ \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial e_x} \right] \\ \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial e_y} \right] \\ \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial i_x} \right] \\ \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial i_y} \right] \\ \left[\frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial \ell_{M\Theta}} \right] \end{array} \right\}. \quad (\text{B.99})$$

Avec l'expression de $[T(x(t), t)]$ donnée par l'équation (1.39), on a :

$$\left\{ \frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial x} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\kappa(t)) & -\sin(\kappa(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & a(t) \sin(\kappa(t)) & -a(t) \cos(\kappa(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos(\kappa(t)) & 2 \sin(\kappa(t)) & 0 \\ 0 & 2 \cos(\kappa(t)) & 2 \sin(\kappa(t)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\}. \quad (\text{B.100})$$

Les colonnes de la matrice $[H(t)]$ sont les produits de chacune des matrices de $\left\{ \frac{\partial[T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}}$ par le vecteur $D(t)$, c'est à dire :

$$[H(t)] = [H_1(t) \ H_2(t) \ H_3(t) \ H_4(t) \ H_5(t) \ H_6(t)],$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\kappa_{mp}(t)) & -\sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} D(t), \\ H_2(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ H_3(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ H_4(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ H_5(t) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \\ H_6(t) = \begin{bmatrix} 0 & a_{mp} \sin(\kappa_{mp}(t)) & -a_{mp} \cos(\kappa_{mp}(t)) & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 2 \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2 \sin(\kappa_{mp}(t)) & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2 \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} D(t). \end{array} \right. \quad (\text{B.101})$$

Tous calculs fait, avec $D(t) = [D_1(t) \ D_2(t) \ D_3(t) \ D_4(t) \ D_5(t) \ D_6(t)]^t$, on obtient :

$$[H(t)] = \begin{bmatrix} -D_2(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) - D_3(t) \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{mp} (D_2(t) \sin(\kappa_{mp}(t)) - D_3(t) \cos(\kappa_{mp}(t))) \\ 0 & 0 & 2 (D_4(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) + D_5(t) \sin(\kappa_{mp}(t))) \\ 0 & 0 & 2 (D_2(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) + D_3(t) \sin(\kappa_{mp}(t))) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.102})$$

Comme écrit précédemment :

$$[\dot{C}(t)] = \left[\frac{d[T(x_{mp}, t)]}{dt} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{mp}} \quad x_{mp} \right]. \quad (\text{B.103})$$

Le premier terme s'écrit :

$$\left[\frac{d[T(x_{mp}, t)]}{dt} \right] = \begin{bmatrix} 0 & a_{mp} \omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & -a_{mp} \omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2 \omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 \omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2 \omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 \\ & & & 2 \omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.104})$$

Le tenseur $\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}$ est multiplié par le vecteur x_{mp} dont seules la première et la dernière composantes sont non nulles. Ainsi, il suffit de s'occuper uniquement des premières

et dernières colonnes des matrices du tenseur $\left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}$, qui sont nulles, et dont la dérivée temporelle est donc également nulle. On en déduit donc :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial [T(x(t), t)]}{\partial x} \right\}_{x=x_{\vec{m}p}} \right] = [\mathbf{0}_{3 \times 6}]. \quad (\text{B.105})$$

En résumé, on obtient pour la dérivée de Δy :

$$\frac{d\Delta y}{dt} = [E(t)]\Delta x + [C(t)]D(t) + [C(t)][B(t)]u(t), \quad (\text{B.106})$$

avec :

$$[E(t)] = [2[H(t)] + [C(t)][A(t)] + [\dot{C}(t)]], \quad (\text{B.107a})$$

$$[H(t)] = \begin{bmatrix} -D_2(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) - D_3(t) \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{mp} (D_2(t) \sin(\kappa_{mp}(t)) - D_3(t) \cos(\kappa_{mp}(t))) \\ 0 & 0 & 2 (D_4(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) + D_5(t) \sin(\kappa_{mp}(t))) \\ 0 & 0 & 2 (D_2(t) \cos(\kappa_{mp}(t)) + D_3(t) \sin(\kappa_{mp}(t))) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.107b})$$

$$[\dot{C}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & a_{mp}\omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & -a_{mp}\omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2\omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\omega_{\oplus} \cos(\kappa_{mp}(t)) & 2\omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 \\ 2\omega_{\oplus} \sin(\kappa_{mp}(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.107c})$$

Annexe C

Calculs et conversions avec les éléments orbitaux classiques

Cette annexe présente les formules de conversion entre la position et la vitesse du satellite exprimée dans le repère inertiel géocentrique. Les formules sont déterminées à partir de [Battin, 1999], de [Vallado, 1997] et [Lyon, 2004].

Le vecteur position est noté :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{C.1})$$

et sa norme est notée r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (\text{C.2})$$

Le vecteur vitesse est noté :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{C.3})$$

et sa norme est notée v :

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (\text{C.4})$$

C.1 INTÉGRALES DU MOUVEMENT KÉPLÉRIEN

A partir de l'équation différentielle du mouvement, il est possible d'établir des constantes du mouvement.

Le vecteur moment cinétique :

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}, \quad (\text{C.5})$$

reste constant. Sa norme est notée h :

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \\ &= \sqrt{(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

D'après la définition du moment cinétique (C.5), ce vecteur est toujours perpendiculaire à la position et à la vitesse. Puisque le moment cinétique est constant, la trajectoire reste dans un même plan, appelé plan orbital. Le vecteur unitaire perpendiculaire au plan orbital \vec{u}_h est alors défini par :

$$\vec{u}_h = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}, \quad (\text{C.7})$$

La conservation de l'énergie mécanique permet d'obtenir l'intégrale du mouvement suivante :

$$-\frac{\mu}{2a} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (\text{C.8})$$

Le vecteur excentricité est défini par :

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}, \quad (\text{C.9})$$

et est orienté dans la direction du vecteur unitaire \vec{u}_e dirigé de la Terre vers le périégée. Sa norme e est l'excentricité de l'orbite.

C.2 RAPPELS DES TRANSFORMATIONS ENTRE LES ANOMALIES

Le calcul de l'anomalie excentrique à partir de la l'anomalie vraie est effectué selon :

$$\sin E = \frac{\sin \nu \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \nu}, \quad (\text{C.10a})$$

$$\cos E = \frac{e + \cos \nu}{1 + e \cos \nu}, \quad (\text{C.10b})$$

$$\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan\left(\frac{\nu}{2}\right). \quad (\text{C.10c})$$

Ces équations sont inversées de la façon suivante :

$$\sin \nu = -\frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{e \cos E - 1}, \quad (\text{C.11a})$$

$$\cos \nu = \frac{e - \cos E}{e \cos E - 1}, \quad (\text{C.11b})$$

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (\text{C.11c})$$

L'anomalie moyenne est obtenue avec l'équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E. \quad (\text{C.12})$$

C.3 CALCUL DES ÉLÉMENTS ORBITAUX À PARTIR DE LA POSITION ET DE LA VITESSE

L'équation (C.8) permet d'obtenir :

$$a = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mu}}. \quad (\text{C.13})$$

L'équation (C.9) permet d'obtenir :

$$e = \sqrt{\left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu}\right)^2}. \quad (\text{C.14})$$

De plus, le vecteur \vec{u}_e est défini comme le vecteur directeur dans la direction de \vec{e} .

L'inclinaison est l'angle entre le plan de l'équateur et le plan de l'orbite, ou encore l'angle entre le vecteur moment cinétique et le vecteur \vec{u}_{Z_G} . En notant \vec{u}_h le vecteur unitaire perpendiculaire au plan de l'orbite, c'est-à-dire dans la direction du vecteur moment cinétique \vec{h} , il vient :

$$\cos i = \vec{u}_{Z_G} \cdot \vec{u}_h = \frac{h_z}{h}. \quad (\text{C.15})$$

Comme l'inclinaison est comprise entre 0 et π , l'inclinaison s'obtient en inversant l'équation (C.15) :

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right) \quad (\text{C.16})$$

L'angle Ω est l'angle entre la direction (G, \vec{u}_{X_G}) et la direction de l'intersection entre le plan de l'orbite et le plan de l'équateur. Le vecteur \vec{n} est alors défini tel que :

$$\vec{n} = \vec{u}_{Z_G} \wedge \vec{h} = \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}, \quad (\text{C.17})$$

ainsi que le vecteur directeur :

$$\vec{u}_n = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \begin{bmatrix} -h_y \\ h_x \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}, \quad (\text{C.18})$$

dans la direction du vecteur \vec{n} .

Il est ainsi possible de calculer :

$$\cos \Omega = \vec{u}_{X_G} \cdot \vec{u}_n = -\frac{h_y}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}. \quad (\text{C.19})$$

Comme $\Omega \in [0, 2\pi]$, il est nécessaire de calculer $\sin \Omega$ pour retrouver la valeur de l'ascension droite du nœud ascendant. En définissant le vecteur :

$$\vec{u}_m = \vec{u}_{Z_G} \wedge \vec{u}_n = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \begin{bmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{C.20})$$

illustré sur les figures A.6 et A.7, il vient :

$$\sin \Omega = -\vec{u}_{X_G} \cdot \vec{u}_m = \frac{h_x}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \quad (\text{C.21})$$

Puisque ω est l'angle entre \vec{n} et \vec{e} , il est possible d'obtenir obtenir :

$$\cos \omega = \vec{u}_e \cdot \vec{u}_n = \frac{-h_x \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right) + h_y \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right)}{e \sqrt{h_y^2 + h_x^2}} \quad (\text{C.22})$$

Comme $\omega \in [0, 2\pi]$, il faut calculer $\sin \omega$. Avec la définition de \vec{u}_f donnée par :

$$\vec{u}_f = \vec{u}_h \wedge \vec{u}_e, \quad (\text{C.23})$$

illustré sur les A.6 et A.7, il vient :

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \vec{u}_e \cdot \vec{u}_v \\ &= \frac{1}{he \sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \left(h_y \left[-h_y \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) + h_z \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - h_x \left[-h_z \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right) + h_y \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

La base orbitale locale $(\vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ est définie telle que :

$$\begin{aligned} \vec{u}_R &= \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{u}_Z &= \vec{u}_h, \\ \vec{u}_T &= \vec{u}_Z \wedge \vec{u}_R = \vec{u}_h \wedge \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

L'anomalie vraie ν est l'angle entre le vecteur \vec{e} et le vecteur \vec{u}_R . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \cos \nu &= \vec{u}_e \cdot \vec{u}_R = \vec{u}_e \cdot \frac{\vec{r}}{r} \\ &= -\frac{1}{er} \left[x \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right) + y \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right) + z \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Comme $\nu \in [0, 2\pi]$, il faut calculer $\sin \nu$. Il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \sin \nu &= -\vec{u}_e \cdot \vec{u}_T = -\vec{u}_e \cdot (\vec{u}_Z \wedge \vec{u}_R) = -\vec{u}_e \cdot \left(\vec{u}_h \wedge \frac{\vec{r}}{r} \right), \\ &= \frac{1}{rhe} \left[(h_y z - h_z y) \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right) + (h_z x - h_x z) \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + (h_x y - h_y x) \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

A partir de l'expression de ν obtenu grâce aux équations (C.26) et (C.27), l'anomalie excentrique est calculée avec l'équation (C.10) et l'anomalie moyenne est obtenue avec l'équation de Kepler.

C.4 CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE À PARTIR DES ÉLÉMENTS ORBITAUX

C.4.1 EXPRESSION DE LA POSITION

Le vecteur position du satellite a pour coordonnées dans la base orbitale locale :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{OL}}. \quad (\text{C.28})$$

En appliquant la formule de rotation donnée par l'équation (A.8), on obtient :

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G} = r \begin{bmatrix} \cos(\omega + \nu) \cos(\Omega) - \cos(i) \sin(\omega + \nu) \sin(\Omega) \\ \cos(\omega + \nu) \sin(\Omega) + \cos(i) \sin(\omega + \nu) \cos(\Omega) \\ \sin(i) \sin(\omega + \nu) \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}. \quad (\text{C.29})$$

En remplaçant r par son expression en termes d'éléments orbitaux classiques, les formules de calcul des composantes de la position dans le repère inertiel géocentrique sont :

$$x = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} (\cos(\omega + \nu) \cos(\Omega) - \cos(i) \sin(\omega + \nu) \sin(\Omega)) \quad (\text{C.30a})$$

$$y = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} (\cos(\omega + \nu) \sin(\Omega) + \cos(i) \sin(\omega + \nu) \cos(\Omega)) \quad (\text{C.30b})$$

$$z = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} (\sin(i) \sin(\omega + \nu)) \quad (\text{C.30c})$$

C.4.2 EXPRESSION DE LA VITESSE

La vitesse dans le repère géocentrique inertiel s'obtient en dérivant la position dans le repère géocentrique inertiel :

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} \quad (\text{C.31})$$

Pour faciliter le calcul, on peut décomposer la dérivée temporelle totale en somme des dérivées partielles par rapports aux éléments orbitaux :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} \dot{i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} \dot{\Omega} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega} \dot{\omega} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \dot{\nu}. \quad (\text{C.32})$$

Or, les éléments orbitaux classiques définissent une ellipse osculatrice, c'est-à-dire l'ellipse que le satellite suivrait dans le cas où les perturbations disparaissent instantanément. Comme la trajectoire et son ellipse osculatrice sont tangentes au point de contact, calculer la vitesse du satellite sur sa trajectoire revient à calculer la vitesse à l'instant considéré sur son ellipse osculatrice. Ainsi, les éléments orbitaux ci-dessus sont à considérer dans le cas képlérien, et seul ν est à dérivée temporelle non-nulle. On peut alors réécrire :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \dot{\nu}, \quad (\text{C.33})$$

avec la dérivée temporelle de l'anomalie moyenne (voir [Battin, 1999]) :

$$\dot{\nu} = \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)} (1 + e \cos(\nu))^2}{a^2 (1 - e^2)^2}. \quad (\text{C.34})$$

Ainsi, la vitesse dans le repère géocentrique inertiel s'exprime selon :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \left[(\cos(\omega + \nu) + e \cos \omega) \sin \Omega \cos i + (\sin(\omega + \nu) + e \sin \omega) \cos \Omega \right], \quad (\text{C.35a})$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \left[(\sin(\omega + \nu) + e \sin \omega) \sin \Omega - (\cos(\omega + \nu) + e \cos \omega) \cos \Omega \cos i \right], \quad (\text{C.35b})$$

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \left[\cos(\omega + \nu) + e \cos \omega \right] \sin i. \quad (\text{C.35c})$$

Conversions avec les éléments orbitaux équinoxiaux

D.1 DÉFINITION DES ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX À PARTIR DES ÉLÉMENTS ORBITAUX CLASSIQUES

La définition des éléments orbitaux équinoxiaux présentée dans la section [1.3.2.2](#) page [23](#) est rappelée ici :

$$\begin{cases} a \\ e_x = e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y = e \sin(\omega + \Omega) \\ i_x = \tan(i/2) \cos(\Omega) \\ i_y = \tan(i/2) \sin(\Omega) \\ \text{anomalie équinoxiale} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Trois anomalies sont définies :

- anomalie équinoxiale vraie : $\nu_Q = \Omega + \omega + \nu$;
- anomalie équinoxiale moyenne : $M_Q = \Omega + \omega + M$;
- anomalie équinoxiale excentrique : $E_Q = \Omega + \omega + E$

D.2 CALCUL DES ÉLÉMENTS ORBITAUX CLASSIQUES À PARTIR DES ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX

L'excentricité est calculée de la façon suivante à partir du vecteur excentricité :

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}. \quad (\text{D.2})$$

De la définition du vecteur inclinaison, il est possible d'écrire :

$$\tan^2\left(\frac{i}{2}\right) = i_x^2 + i_y^2. \quad (\text{D.3})$$

Il vient alors :

$$\cos i = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{i}{2}\right)} = \frac{1 - i_x^2 - i_y^2}{1 + i_x^2 + i_y^2} \quad (\text{D.4})$$

De la même façon :

$$\sin i = \frac{2 \tan\left(\frac{i}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{i}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}{1 + i_x^2 + i_y^2}. \quad (\text{D.5})$$

Puisque $i \in [0, \pi]$, l'équation précédente peut être inversée pour donner :

$$i = \arccos\left(\frac{1 - i_x^2 - i_y^2}{1 + i_x^2 + i_y^2}\right). \quad (\text{D.6})$$

L'ascension droite du nœud ascendant est calculée de la façon suivante à partir du vecteur inclinaison :

$$\cos \Omega = \frac{i_x}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}, \quad (\text{D.7a})$$

$$\sin \Omega = \frac{i_y}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}. \quad (\text{D.7b})$$

Si l'inclinaison est nulle, i_x et i_y le sont aussi et l'ascension droite du nœud ascendant n'est pas définie.

Il vient à partir de la définition du vecteur excentricité :

$$\cos(\Omega + \omega) = \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.8a})$$

$$\sin(\Omega + \omega) = \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.8b})$$

puis en développant les fonctions trigonométriques des équations précédentes :

$$\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega = \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.9a})$$

$$\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega = \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}. \quad (\text{D.9b})$$

Le système (D.9) d'inconnus $\cos \omega$ et $\sin \omega$ possède une unique solution puisque son déterminant est : $\cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega = 1$. Il vient alors :

$$\cos \omega = \frac{e_x \cos \Omega + e_y \sin \Omega}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} = \frac{e_x i_x + e_y i_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \sqrt{i_x^2 + i_y^2}}, \quad (\text{D.10a})$$

$$\sin \omega = \frac{e_y \cos \Omega - e_x \sin \Omega}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} = \frac{e_y i_x - e_x i_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \sqrt{i_x^2 + i_y^2}}. \quad (\text{D.10b})$$

Si l'excentricité est nulle, e_x et e_y le sont aussi et l'argument du périégée n'est pas défini.

Il vient à partir de la définition de l'anomalie équinoxiale vraie :

$$\begin{aligned} \cos \nu_Q &= \cos(\Omega + \omega) \cos \nu - \sin(\Omega + \omega) \sin \nu, \\ &= \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \sin \nu - \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \cos \nu, \end{aligned} \quad (\text{D.11a})$$

$$\begin{aligned} \sin \nu_Q &= \sin(\Omega + \omega) \cos \nu + \cos(\Omega + \omega) \sin \nu, \\ &= \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \cos \nu + \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \sin \nu. \end{aligned} \quad (\text{D.11b})$$

Il vient ainsi si l'excentricité est non nulle :

$$\cos \nu = \frac{e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.12a})$$

$$\sin \nu = \frac{e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}. \quad (\text{D.12b})$$

Dans le cas où l'excentricité est nulle l'argument du périégée n'est pas défini. Si l'inclinaison est non nulle, la position du satellite sur l'orbite peut être définie par l'angle $\omega + \nu$. La définition de l'anomalie équinoxiale vraie permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \cos \nu_Q &= \cos \Omega \cos(\omega + \nu) - \sin \Omega \sin(\omega + \nu), \\ &= \frac{i_x}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \cos(\omega + \nu) - \frac{i_y}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \sin(\omega + \nu), \end{aligned} \quad (\text{D.13a})$$

$$\begin{aligned} \sin \nu_Q &= \sin \Omega \cos(\omega + \nu) + \cos \Omega \sin(\omega + \nu), \\ &= \frac{i_y}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \cos(\omega + \nu) + \frac{i_x}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}} \sin(\omega + \nu). \end{aligned} \quad (\text{D.13b})$$

$$(\text{D.13c})$$

Si l'inclinaison n'est pas nulle, le système précédent se résout de la façon suivante :

$$\cos(\omega + \nu) = \frac{i_x \cos \nu_Q + i_y \sin \nu_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}, \quad (\text{D.14a})$$

$$\sin(\omega + \nu) = \frac{i_x \sin \nu_Q - i_y \cos \nu_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}. \quad (\text{D.14b})$$

Les mêmes calculs appliqués à l'anomalie équinoxiale moyenne et l'anomalie équinoxiale moyenne permettent d'obtenir :

$$\cos E = \frac{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.15a})$$

$$\sin E = \frac{e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}. \quad (\text{D.15b})$$

$$\cos(\omega + E) = \frac{i_x \cos E_Q + i_y \sin E_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}, \quad (\text{D.16a})$$

$$\sin(\omega + E) = \frac{i_x \sin E_Q - i_y \cos E_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}. \quad (\text{D.16b})$$

$$\cos M = \frac{e_x \cos M_Q + e_y \sin M_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, \quad (\text{D.17a})$$

$$\sin M = \frac{e_x \sin M_Q - e_y \cos M_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}. \quad (\text{D.17b})$$

$$\cos(\omega + M) = \frac{i_x \cos M_Q + i_y \sin M_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}, \quad (\text{D.18a})$$

$$\sin(\omega + M) = \frac{i_x \sin M_Q - i_y \cos M_Q}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}. \quad (\text{D.18b})$$

En utilisant l'équation (D.12) dans l'équation (C.10), il vient :

$$\cos E = \frac{e + \frac{e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}}{1 + e \frac{e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}} = \frac{e_x^2 + e_y^2 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}(1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q)}, \quad (\text{D.19a})$$

$$\sin E = \frac{\frac{e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{1 + e \frac{e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}} = \frac{(e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}(1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q)}. \quad (\text{D.19b})$$

Après identification de $\cos E$ et $\sin E$ avec l'équation (D.15), il vient :

$$e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q = \frac{e_x^2 + e_y^2 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}{1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}, \quad (\text{D.20a})$$

$$e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q = \frac{(e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}. \quad (\text{D.20b})$$

Il vient alors :

$$\cos E_Q = \frac{e_x (e_x^2 + e_y^2 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q) - e_y (e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{(e_x^2 + e_y^2)(1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q)}, \quad (\text{D.21a})$$

$$\sin E_Q = \frac{e_x (e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2} + e_y (e_x^2 + e_y^2 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q)}{(e_x^2 + e_y^2)(1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q)}. \quad (\text{D.21b})$$

En utilisant l'équation (D.15) dans l'équation (C.11), il vient :

$$\cos \nu = \frac{e - \frac{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}}{e \frac{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} - 1} = \frac{e_x^2 + e_y^2 - e_x \cos E_Q - e_y \sin E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2} (e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1)}, \quad (\text{D.22a})$$

$$\sin \nu = -\frac{\frac{e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}} \sqrt{1 - e^2}}{e \frac{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}} = -\frac{(e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2} (e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1)}. \quad (\text{D.22b})$$

Après identification de $\cos \nu$ et $\sin \nu$ avec l'équation (D.12), il vient :

$$e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q = \frac{e_x^2 + e_y^2 - e_x \cos E_Q - e_y \sin E_Q}{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1}, \quad (\text{D.23a})$$

$$e_x \sin \nu_Q - e_y \cos \nu_Q = -\frac{(e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1}. \quad (\text{D.23b})$$

Il vient alors :

$$\cos \nu_Q = \frac{e_x (e_x^2 + e_y^2 - e_x \cos E_Q - e_y \sin E_Q) + e_y (e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2}}{(e_x^2 + e_y^2)(e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1)}, \quad (\text{D.24a})$$

$$\sin \nu_Q = \frac{-e_x (e_x \sin E_Q - e_y \cos E_Q) \sqrt{1 - e_x^2 - e_y^2} + e_y (e_x^2 + e_y^2 - e_x \cos E_Q - e_y \sin E_Q)}{(e_x^2 + e_y^2)(e_x \cos E_Q + e_y \sin E_Q - 1)}. \quad (\text{D.24b})$$

L'anomalie équinoxiale moyenne est calculée à partir de l'anomalie équinoxiale excentrique au moyen de l'équation de Kepler exprimée en termes d'éléments orbitaux équinoxiaux :

$$E_Q + e_y \cos E_Q - e_x \sin E_Q = M_Q. \quad (\text{D.25})$$

D.3 CALCUL DES ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX À PARTIR DE LA POSITION ET LA VITESSE

De la même façon que pour le calcul des éléments orbitaux classiques, l'équation (C.8) permet d'obtenir :

$$a = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mu}} \quad (\text{D.26})$$

La matrice de transformation entre les coordonnées dans la base équinoxiale et les coordonnées dans le repère géocentrique inertiel explicitée par l'équation (A.11) peut se réécrire en utilisant les transformations entre les éléments orbitaux classiques et les éléments orbitaux équinoxiaux de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G} = \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 & 2i_x i_y & -2i_y \\ 2i_x i_y & 1 - i_x^2 + i_y^2 & 2i_x \\ 2i_y & -2i_x & 1 - i_x^2 - i_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_q \\ \sigma_h \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{EQX}} \quad (\text{D.27})$$

Cette matrice de transformation permet de donner les coordonnées des vecteurs de la base équinoxiale dans la base inertielle géocentrique. Il vient ainsi écrire particulier :

$$\vec{u}_h = \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} -2i_y \\ 2i_x \\ 1 - i_x^2 - i_y^2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{D.28})$$

ce qui permet d'établir les égalités suivantes :

$$u_{h_x} = \vec{u}_h \cdot \vec{u}_{X_G} = \frac{-2i_y}{1 + i_x^2 + i_y^2}, \quad (\text{D.29a})$$

$$u_{h_y} = \vec{u}_h \cdot \vec{u}_{Y_G} = \frac{2i_x}{1 + i_x^2 + i_y^2}, \quad (\text{D.29b})$$

$$u_{h_z} = \vec{u}_h \cdot \vec{u}_{Z_G} = \frac{1 - i_x^2 - i_y^2}{1 + i_x^2 + i_y^2}, \quad (\text{D.29c})$$

avec le vecteur \vec{u}_h défini par l'équation (C.7).

L'équation D.28 permet de calculer le vecteur inclinaison de la façon suivante :

$$i_x = \frac{u_{h_y}}{1 + u_{h_z}} = \frac{h_y}{h_z + h}, \quad (\text{D.30a})$$

$$i_y = -\frac{u_{h_x}}{1 + u_{h_z}} = -\frac{h_x}{h_z + h}, \quad (\text{D.30b})$$

où h désigne la norme de \vec{h} .

L'équation de transformation (D.27) permet également d'écrire :

$$\vec{u}_p = \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2i_x i_y \\ -2i_y \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}, \quad (\text{D.31a})$$

$$\vec{u}_q = \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{bmatrix} 2i_x i_y \\ 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2i_x \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G}. \quad (\text{D.31b})$$

En combinant la rotation autour du vecteur \vec{u}_h de la transformation de la base géocentrique inertielle en la base orbitale locale (voir figure A.7) d'une part et la rotation autour du vecteur \vec{u}_h de la transformation de la base géocentrique inertielle en la base équinoxiale (voir figure A.10), l'angle $\Omega + \omega$ apparaît être l'angle entre les vecteurs \vec{u}_p et \vec{u}_e d'une part et entre les vecteurs \vec{u}_q et \vec{u}_f d'autre part (voir la figure D.1).

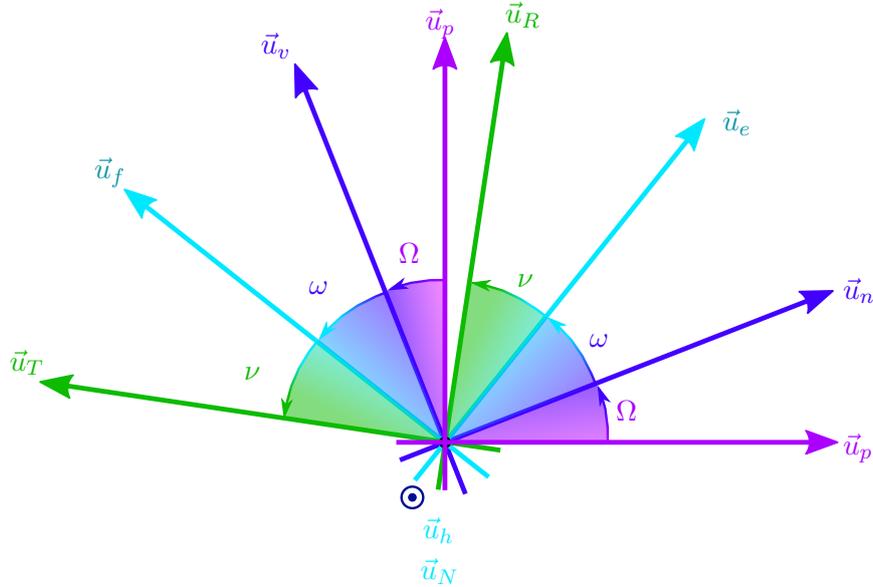


FIGURE D.1 – Rotations planes dans le plan orbital autour du vecteur \vec{u}_h .

Il vient alors :

$$\cos(\Omega + \omega) = \vec{u}_e \cdot \vec{u}_p, \quad \sin(\Omega + \omega) = \vec{u}_e \cdot \vec{u}_q, \quad (\text{D.32a})$$

de telle sorte qu'il est possible de calculer les composantes du vecteur excentricité selon :

$$e_x = e\vec{u}_e \cdot \vec{u}_p = \vec{e} \cdot \vec{u}_p, \quad (\text{D.33a})$$

$$e_y = e\vec{u}_e \cdot \vec{u}_q = \vec{e} \cdot \vec{u}_q. \quad (\text{D.33b})$$

Ces équations se développent en :

$$e_x = \frac{1}{1 + \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} + \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2}} \left[-\left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right) \left(1 + \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2} - \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} \right) \right]$$

$$+ \frac{2h_x \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) - \frac{2h_x h_y \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right)}{h_z + h} \Big] \quad (\text{D.34a})$$

$$e_y = - \frac{1}{1 + \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} + \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2}} \left[+ \left(\frac{y}{r} + \frac{h_z \dot{x} - h_x \dot{z}}{\mu} \right) \left(1 - \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2} - \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} \right) + \frac{2h_y \left(\frac{z}{r} + \frac{h_x \dot{y} - h_y \dot{x}}{\mu} \right) + \frac{2h_x h_y \left(\frac{x}{r} + \frac{h_y \dot{z} - h_z \dot{y}}{\mu} \right)}{(h_z+h)^2} \right] \quad (\text{D.34b})$$

La figure D.1 permet d'interpréter l'anomalie équinoxiale vraie $\nu_Q = \Omega + \omega + \nu$ comme l'angle entre les vecteurs \vec{u}_p et \vec{u}_R d'une part et les vecteurs \vec{u}_q et \vec{u}_T d'autre part. Cette remarque permet d'obtenir :

$$\cos \nu_Q = \vec{u}_R \cdot \vec{u}_p, \quad (\text{D.35a})$$

$$\sin \nu_Q = \vec{u}_R \cdot \vec{u}_q. \quad (\text{D.35b})$$

Ces équations se développent en :

$$\cos \nu_Q = \frac{1}{r \left(1 + \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} + \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2} \right)} \left[x \left(1 + \frac{h_y^2 - h_x^2}{(h_z+h)^2} \right) - \frac{2h_x z}{h_z+h} + \frac{2h_x h_y y}{(h_z+h)^2} \right], \quad (\text{D.36a})$$

$$\sin \nu_Q = \frac{1}{r \left(1 + \frac{h_x^2}{(h_z+h)^2} + \frac{h_y^2}{(h_z+h)^2} \right)} \left[y \left(1 - \frac{h_y^2 + h_x^2}{(h_z+h)^2} \right) + \frac{2h_y z}{h_z+h} + \frac{2h_x h_y x}{(h_z+h)^2} \right]. \quad (\text{D.36b})$$

D.4 CALCUL DE LA POSITION ET DE LA VITESSE À PARTIR DES ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX

Le calcul de la transformation des éléments orbitaux équinoxiaux en la position et la vitesse dans le référentiel inertiel s'appuie sur l'expression du vecteur position dans le repère équinoxial (voir section A.4). La matrice de rotation entre le repère équinoxial et le repère géocentrique inertiel (équation A.11) permet d'obtenir le résultat.

D'après [McClain, 1977], le rayon s'exprime en fonction des éléments orbitaux équinoxiaux :

$$r = \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{1 + e_x \cos \nu_Q + e_y \sin \nu_Q}, \quad (\text{D.37})$$

où ν_Q a été définie comme étant l'anomalie équinoxiale vraie (voir Tableau 1.1 page 24). Comme les éléments orbitaux équinoxiaux considérés font intervenir la longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$ calculée à partir de l'anomalie équinoxiale moyenne, il est nécessaire de transformer l'équation (D.37) en utilisant l'équation de Kepler exprimée avec l'anomalie vraie. L'utilisation de la méthode décrite dans l'annexe E permet d'exprimer l'anomalie

vraie en fonction de l'anomalie moyenne dans le cas des petites excentricités. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
 \nu_Q &= \Omega + \omega + \nu, \\
 &= \Omega + \omega + M + 2e \sin(M), \\
 &= M_Q + 2e \sin(M), \\
 &= \ell_{M\Theta} + \Theta + 2e \sin(M).
 \end{aligned} \tag{D.38}$$

Il vient alors à l'ordre 0 en excentricité :

$$\cos \nu_Q = \cos M_Q = \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta), \tag{D.39a}$$

$$\sin \nu_Q = \sin M_Q = \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta), \tag{D.39b}$$

si bien que le rayon se réécrit :

$$r = \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)}. \tag{D.40}$$

Il est également possible d'exprimer le rayon en fonction de l'anomalie équinoxiale excentrique de la façon suivante :

$$r = a(1 - e_x \cos E_Q - e_y \sin E_Q), \tag{D.41}$$

Selon la figure de rotation plane [D.1](#), il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_R &= \cos(\Omega + \omega + \nu) \vec{u}_p + \sin(\Omega + \omega + \nu) \vec{u}_q, \\
 &= \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \vec{u}_p + \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \vec{u}_q.
 \end{aligned} \tag{D.42}$$

Il vient alors :

$$\vec{r} = \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)} \begin{bmatrix} \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \\ \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}}. \tag{D.43}$$

Les coordonnées du vecteur position exprimées dans le repère équinoxial sont transformées grâce à la matrice de rotation ([D.27](#)) pour être exprimées dans le repère géocentrique inertiel :

$$\begin{aligned}
 \vec{r} &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_G} \\
 &= \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)} \frac{1}{1 + i_x^2 + i_y^2} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 & 2i_x i_y & -2i_y \\ 2i_x i_y & 1 - i_x^2 + i_y^2 & 2i_x \\ 2i_y & -2i_x & 1 - i_x^2 - i_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \\ \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{\text{EQX}}}.
 \end{aligned} \tag{D.44}$$

Développer le produit matriciel précédent permet d'obtenir :

$$x = \frac{[a(1 - e_x^2 - e_y^2)] [(1 + i_x^2 - i_y^2) \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + 2i_x i_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)]}{[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)] [1 + i_x^2 + i_y^2]}, \quad (\text{D.45a})$$

$$y = \frac{[a(1 - e_x^2 - e_y^2)] [2i_x i_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + (1 - i_x^2 + i_y^2) \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)]}{[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)] [1 + i_x^2 + i_y^2]}, \quad (\text{D.45b})$$

$$z = \frac{2[a(1 - e_x^2 - e_y^2)] [i_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - i_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)]}{[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)] [1 + i_x^2 + i_y^2]}. \quad (\text{D.45c})$$

La vitesse dans le repère géocentrique inertiel s'obtient en dérivant la position dans le repère géocentrique inertiel :

$$\vec{v} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_G} \quad (\text{D.46})$$

Pour faciliter le calcul, on peut décomposer la dérivée temporelle totale en somme des dérivées partielles par rapports aux éléments orbitaux :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e_x} \dot{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e_y} \dot{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i_x} \dot{i}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i_y} \dot{i}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial (\ell_{M\Theta} + \Theta)} \frac{d(\ell_{M\Theta} + \Theta)}{dt}. \quad (\text{D.47})$$

Cependant, comme $\ell_{M\Theta} + \Theta = M_Q$, le calcul de la vitesse se réécrit :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e_x} \dot{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial e_y} \dot{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i_x} \dot{i}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial i_y} \dot{i}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial M_Q} \dot{M}_Q. \quad (\text{D.48})$$

De la même façon que pour le calcul de la vitesse à partir des éléments orbitaux classiques, les éléments orbitaux ci-dessus sont à considérer dans le cas képlérien, et seul M_Q est à dérivée temporelle non-nulle. On peut alors réécrire :

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial M_Q} \dot{M}_Q, \quad (\text{D.49})$$

avec

$$\dot{M}_Q = n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}. \quad (\text{D.50})$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)]^2 [1 + i_x^2 + i_y^2]} \\ &\times \left(\left[-(1 + i_x^2 - i_y^2) \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) + 2i_x i_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] [1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta)] \right) \end{aligned}$$

$$- \left[e_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - e_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \left[(1 + i_x^2 - i_y^2) \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + 2i_x i_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right], \quad (\text{D.51a})$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{\left[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right]^2 \left[1 + i_x^2 + i_y^2 \right]} \\ & \times \left(\left[(1 - i_x^2 + i_y^2) \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - 2i_x i_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \left[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \right. \\ & \left. - \left[e_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - e_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \left[(1 - i_x^2 + i_y^2) \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) + 2i_x i_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \right), \quad (\text{D.51b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} = & \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{a(1 - e_x^2 - e_y^2)}{\left[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right]^2 \left[1 + i_x^2 + i_y^2 \right]} \\ & \times \left(\left[-2i_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - 2i_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \left[1 + e_x \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) + e_y \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \right. \\ & \left. - \left[e_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) - e_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \left[-2i_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta) + 2i_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta) \right] \right). \quad (\text{D.51c}) \end{aligned}$$

Méthode approchée de résolution de l'équation de Kepler

Le sixième paramètre du vecteur d'état exprimé en paramètres orbitaux classiques est une des trois anomalies, vraie ν , moyenne M ou excentrique E . L'anomalie moyenne M a été choisie pour exprimer le vecteur d'état. Cependant, les équations de Gauss et de Lagrange sont exprimées avec l'anomalie vraie. Le calcul de ν en fonction de M peut se faire de deux façons :

- résolution de l'équation de Kepler :

$$E - e \sin E = M, \tag{E.1}$$

pour obtenir E puis calcul de ν à partir de la transformation :

$$\nu = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \right); \tag{E.2}$$

- résolution directe de l'équation de Kepler exprimée en anomalie vraie :

$$2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - e \sin \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) \right] = M. \tag{E.3}$$

Pour aucune de ces deux méthodes, l'équation de Kepler ne peut être résolue analytiquement. Plusieurs méthodes de résolution existent dans la littérature. Les sections suivantes en présentent quelques unes.

E.1 ALGORITHME DE NEWTON

E.1.1 ÉQUATION DE KEPLER EN E

La méthode de Newton est une méthode itérative qui permet de trouver une solution approchée de l'équation :

$$f(x) = 0, \tag{E.4}$$

à partir d'une estimation de départ de la solution x_0 . Une suite de solutions approchées $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers la solution \tilde{x} est construite. Chaque solution approchée x_{n+1} se calcule à partir de la solution précédente x_n selon :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (\text{E.5})$$

Dans le cas de l'équation de Kepler en E , l'algorithme s'écrit :

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e \sin E_n - M}{1 - e \cos E_n}. \quad (\text{E.6})$$

Une fois E obtenue, ν est calculée avec l'équation (E.2).

Un moyen de faire converger l'algorithme plus rapidement est de choisir un point initial proche de la solution. [Battin, 1999] propose un choix basé sur l'interpolation linéaire. Si on considère une fonction f monotone et continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ telle que $f(x_1)f(x_2) \leq 0$, alors le point initial de l'algorithme peut être choisi comme l'intersection entre l'axe des abscisses et la droite qui passe par $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$.

Pour l'équation de Kepler, $f : E \mapsto E - e \sin E - M$ est croissante, et [Battin, 1999] propose les deux points d'évaluations :

$$\begin{aligned} f(M) &= -e \sin M \leq 0, \quad \forall M \in [0, \pi], \\ f(M + e) &= e(1 - \sin(M + e)) \geq 0, \quad \forall M. \end{aligned}$$

Le point initial est donc l'intersection avec l'axe des abscisses :

$$E_0 = M + \frac{e \sin M}{1 - \sin(M + E) + \sin M}. \quad (\text{E.7})$$

E.1.2 ÉQUATION DE KEPLER EN ν

L'équation de Kepler peut être résolue en ν directement avec la méthode de Newton pour les fonctions :

$$f(\nu) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - e \sin \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) \right] - M, \quad (\text{E.8a})$$

$$f'(\nu) = \left(1 - e \cos \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) \right] \right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \left(1 + \tan^2 \frac{\nu}{2} \right)}{1 + \frac{1-e}{1+e} \tan^2 \frac{\nu}{2}}, \quad (\text{E.8b})$$

et :

$$\nu_{n+1} = \nu_n - \frac{f(\nu_n)}{f'(\nu_n)}. \quad (\text{E.9})$$

E.2 MÉTHODE DE HULL

E.2.1 AVEC LES ÉQUATIONS (E.1) ET (E.2)

L'équation (E.1) est une équation transcendante pour laquelle e est petit (dans notre cas où les orbites considérées sont des orbites presque géostationnaires). On peut trouver dans [Hull, 2003] une technique pour résoudre l'équation de Kepler.

Considérons la fonction :

$$f : (E; e) \mapsto f(E; e) = E - e \sin E - M. \quad (\text{E.10})$$

L'équation à résoudre est l'équation :

$$f(E; e) = 0, \quad (\text{E.11})$$

d'inconnue E , pour e proche de 0. La solution E_* de cette équation sera une fonction de e qui peut donc être développée en série de puissances de e :

$$\begin{aligned} E_* &= E_0 + E_1 e + \frac{1}{2} E_2 e^2 \\ &= E_0 + \Delta E. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

On peut ensuite développer $f(E; e) = f(E_0 + \Delta E; e)$ autour de $(E_0; 0)$ jusqu'à l'ordre 2. Par soucis de simplicité d'écriture, les notations suivantes seront adoptées :

$$\begin{aligned} f(E_0; 0) &\longrightarrow f, & \frac{\partial f(E; e)}{\partial e} \Big|_{(E_0; 0)} &\longrightarrow f_e, \\ \frac{\partial f(E; e)}{\partial E} \Big|_{(E_0; 0)} &\longrightarrow f_E, & \frac{\partial^2 f(E; e)}{\partial e^2} \Big|_{(E_0; 0)} &\longrightarrow f_{ee}, \\ \frac{\partial^2 f(E; e)}{\partial E^2} \Big|_{(E_0; 0)} &\longrightarrow f_{EE}, & \frac{\partial^2 f(E; e)}{\partial e \partial E} \Big|_{(E_0; 0)} &\longrightarrow f_{eE}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(E; e) &= f(E_0 + \Delta E; e), \\ &= f + f_E \Delta E + f_e e + \frac{1}{2} f_{EE} \Delta E^2 + \frac{1}{2} f_{ee} e^2 + f_{eE} e \Delta E, \\ &= f + f_E \left(E_1 e + \frac{1}{2} E_2 e^2 \right) + f_e e + \frac{1}{2} f_{EE} E_1^2 e^2 + \frac{1}{2} f_{ee} e^2 + f_{eE} E_1 e^2. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

En identifiant terme à terme les différents ordres de e pour obtenir (E.21), on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} f = 0, \\ f_E E_1 + f_e = 0, \\ \frac{1}{2} f_E E_2 + \frac{1}{2} f_{EE} E_1^2 + \frac{1}{2} f_{ee} + f_{eE} E_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Résoudre ce système permet d'obtenir les solutions suivantes :

$$\begin{cases} E_0 = M, \\ E_1 = \sin(M), \\ E_2 = \sin(2M), \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

et finalement,

$$E_{\text{hull}} = M + e \sin M + \frac{1}{2}e^2 \sin(2M). \quad (\text{E.16})$$

A partir de là, (E.2) donne ν .

La figure E.1 montre l'écart entre l'anomalie vraie obtenue à partir des équations (E.1) et (E.2) avec la méthode de Newton et la méthode de Hull. L'écart maximal est de 10^{-5} ° , ce qui permet de conclure que l'anomalie vraie peut être calculée avec les deux méthodes tant que la précision angulaire requise est supérieure à 10^{-5} ° .

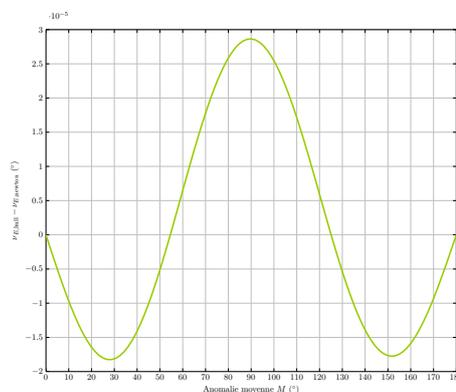


FIGURE E.1 – Écart entre l'anomalie vraie calculée avec (E.3) par la méthode de Hull et l'anomalie vraie calculée avec (E.1) et (E.2) par la méthode de Newton en fonction de l'anomalie moyenne.

E.2.2 AVEC L'ÉQUATION (E.3)

Il est possible d'appliquer la technique développée dans [Hull, 2003] pour résoudre l'équation transcendante (E.3). La méthode est appliquée à la fonction :

$$f(\nu; e) = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) - e \sin \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\nu}{2} \right) \right] - M. \quad (\text{E.17})$$

Avec un développement similaire à celui de l'équation (E.23), il est possible d'obtenir :

$$\nu = M + 2e \sin M + \frac{5}{2}e^2 \sin(2M). \quad (\text{E.18})$$

L'écart par rapport au cas de référence est présenté sur la figure E.2. L'écart maximal atteint ici 10^{-3} ° . La méthode de Hull est donc moins précise pour une utilisation directe avec l'équation de Kepler exprimée en anomalie vraie. Il est donc préférable d'utiliser l'équation de Kepler en anomalie excentrique et de calculer l'anomalie vraie avec (E.2).

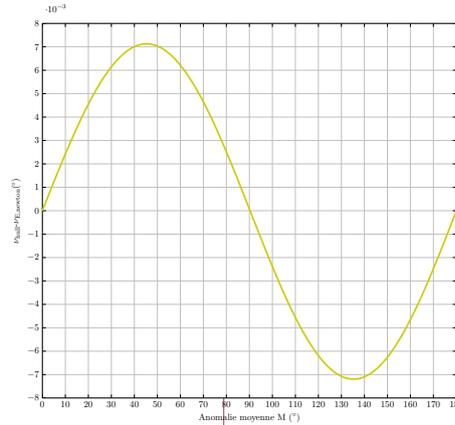


FIGURE E.2 – Écart entre l’anomalie vraie calculée avec (E.3) par la méthode de Hull et l’anomalie vraie calculée avec (E.1) et (E.2) par la méthode de Newton en fonction de l’anomalie moyenne.

E.2.3 ÉQUATION DE KEPLER EN ÉLÉMENTS ORBITAUX ÉQUINOXIAUX

L’équation de Kepler en paramètres orbitaux équinoxiaux :

$$E_Q + e_y \cos E_Q - e_x \sin E_Q = \ell_{M\Theta} + \Theta(t), \quad (\text{E.19})$$

est transcendante et doit être résolue dans le cas général par des méthodes itératives.

Dans le cas d’une orbite quasi-circulaire, l’excentricité est très petite et cette équation transcendante peut être résolue en E_Q à l’aide de la méthode présentée dans [Hull, 2003].

Considérons la fonction :

$$f : (E_Q; e_x, e_y) \mapsto f(E_Q; e_x, e_y) = E_Q + e_y \cos E_Q - e_x \sin E_Q - \ell_{M\Theta} + \Theta(t). \quad (\text{E.20})$$

L’équation à résoudre est :

$$f(E_Q; e_x, e_y) = 0, \quad (\text{E.21})$$

d’inconnue E_Q , pour e_x et e_y proches de 0. La solution E_{Q*} de cette équation sera une fonction de e_x et e_y qui peut donc être développée en série de puissances de e_x et e_y :

$$\begin{aligned} E_{Q*} &= E_{Q_0} + E_{Q_x} e_x + E_{Q_y} e_y + \frac{1}{2} E_{Q_{xx}} e_x^2 + \frac{1}{2} E_{Q_{yy}} e_y^2 + E_{Q_{xy}} e_x e_y, \\ &= E_{Q_0} + \Delta E_Q. \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

On peut ensuite développer $f(E_Q; e_x, e_y) = f(E_{Q_0} + \Delta E_Q; e_x, e_y)$ autour de $(E_{Q_0}; 0, 0)$ jusqu’à l’ordre 2. Par soucis de simplicité de notation, les notations suivantes seront adoptées :

$$f(E_{Q_0}; 0, 0) \longrightarrow f, \quad \left. \frac{\partial f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_x} \right|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} \longrightarrow f_{e_x},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_y} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_y}, & \frac{\partial f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial E_Q} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{E_Q}, \\
\frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_x^2} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_x e_x}, & \frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_y^2} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_y e_y}, \\
\frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial E_Q^2} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{E_Q E_Q}, & \frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_x \partial e_y} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_x e_y}, \\
\frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_x \partial E_Q} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_x E_Q}, & \frac{\partial^2 f(E_Q; e_x, e_y)}{\partial e_y \partial E_Q} \Big|_{(E_{Q_0}; 0, 0)} &\longrightarrow f_{e_y E_Q}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(E_Q; e_x, e_y) &= f(E_{Q_0} + \Delta E_Q; e_x, e_y), \\
&= f + f_{E_Q} \Delta E_Q + f_{e_x} e_x + f_{e_y} e_y + \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{E_Q E_Q} \Delta E_Q^2 + \frac{1}{2} f_{e_x e_x} e_x^2 + \frac{1}{2} f_{e_y e_y} e_y^2 \\
&\quad + f_{E_Q e_x} \Delta E_Q e_x + f_{E_Q e_y} \Delta E_Q e_y + f_{e_x e_y} e_x e_y, \\
&= f + f_{E_Q} \left(E_{Q_x} e_x + E_{Q_y} e_y + \frac{1}{2} E_{Q_{xx}} e_x^2 + \frac{1}{2} E_{Q_{yy}} e_y^2 + E_{Q_{xy}} e_x e_y \right) + f_{e_x} e_x + f_{e_y} e_y \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{E_Q E_Q} \left(E_{Q_x}^2 e_x^2 + E_{Q_y}^2 e_y^2 + 2 E_{Q_x} E_{Q_y} e_x e_y \right) + \frac{1}{2} f_{e_x e_x} e_x^2 + \frac{1}{2} f_{e_y e_y} e_y^2 \\
&\quad + f_{E_Q e_x} \left(E_{Q_x} e_x + E_{Q_y} e_y \right) e_x + f_{E_Q e_y} \left(E_{Q_x} e_x + E_{Q_y} e_y \right) e_y + f_{e_x e_y} e_x e_y.
\end{aligned} \tag{E.23}$$

L'identification terme à terme en les différents ordres de e_x et e_y pour obtenir (E.21) permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{aligned}
f &= 0, \\
f_{E_Q} E_{Q_x} + f_{e_x} &= 0, \\
f_{E_Q} E_{Q_y} + f_{e_y} &= 0, \\
\frac{1}{2} f_{E_Q} E_{Q_{xx}} + \frac{1}{2} f_{E_Q E_Q} E_{Q_x}^2 + \frac{1}{2} f_{e_x e_x} + f_{E_Q e_x} E_{Q_x} &= 0, \\
\frac{1}{2} f_{E_Q} E_{Q_{yy}} + \frac{1}{2} f_{E_Q E_Q} E_{Q_y}^2 + \frac{1}{2} f_{e_y e_y} + f_{E_Q e_y} E_{Q_y} &= 0, \\
f_{E_Q E_Q} E_{Q_x} E_{Q_y} + f_{E_Q e_x} E_{Q_y} + f_{E_Q e_y} E_{Q_x} + f_{e_x e_y} + f_{E_Q} E_{Q_{xy}} &= 0.
\end{aligned} \right. \tag{E.24}$$

Résoudre ce système permet d'obtenir les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
E_{Q_0} &= \ell_{M\Theta} + \Theta(t), \\
E_{Q_x} &= \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \\
E_{Q_y} &= -\cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \\
E_{Q_{xx}} &= \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \\
E_{Q_{yy}} &= -\cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \\
E_{Q_{xy}} &= \cos^2(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) - \sin^2(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)).
\end{aligned} \right. \tag{E.25}$$

L'anomalie équinoxiale excentrique s'exprime donc en fonction de la longitude moyenne

de la façon suivante :

$$E_Q = \ell_{M\Theta} + \Theta(t) + e_x \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) - e_y \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)) \\ + \sin\left(\frac{\ell_{M\Theta} + \Theta(t)}{2}\right) (e_x^2 - e_y^2) + \cos\left(\frac{\ell_{M\Theta} + \Theta(t)}{2}\right) e_x e_y. \quad (\text{E.26})$$

A l'ordre 0 en e_x et e_y il vient :

$$\cos E_Q = \cos(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)), \quad (\text{E.27a})$$

$$\sin E_Q = \sin(\ell_{M\Theta} + \Theta(t)). \quad (\text{E.27b})$$

Stratégies de maintien à poste existantes

Cette annexe présente les stratégies de maintien à poste à poussée forte et à poussée faible qu'il est possible de trouver dans la littérature dédiée.

F.1 CORRECTIONS À POUSSÉE FORTE

D'après les équations de correction (B.68b), (B.68c), (B.68d) et (B.68e), une poussée radiale est deux fois moins efficace qu'une poussée tangentielle pour corriger le vecteur excentricité. C'est pourquoi [Campan et al., 1995] ne considère que des corrections du vecteur excentricité au moyen de poussées tangentielles.

D'après les références [Soop, 1994], [Sidi, 1997] et [Campan et al., 1995], il est possible de déterminer une stratégie de correction à poussée forte en supposant les correction dans le plan découplées des corrections hors plan. C'est pourquoi, l'analyse du maintien à poste par des poussées normales est réalisable indépendamment de l'analyse du maintien à poste par des poussées tangentielles.

F.1.1 MAINTIEN À POSTE HORS PLAN

La référence [Campan et al., 1995] n'utilise que l'évolution séculaire du vecteur inclinaison pour planifier sa stratégie de maintien à poste. Cette évolution séculaire est donnée par :

$$\begin{cases} i_x(t) = i_x(t_0) + D_{i_x}(t - t_0), \\ i_y(t) = i_y(t_0) + D_{i_y}(t - t_0), \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

avec D_{i_x} (et D_{i_y} supposés constants sur une courte période de temps, l'extrémité du vecteur inclinaison parcourt dans le plan (i_x, i_y) une droite faisant avec l'axe (G, \vec{u}_{X_G}) un angle Ω_D tel que :

$$\begin{cases} \cos(\Omega_D) = \frac{D_{i_x}}{\sqrt{D_{i_x}^2 + D_{i_y}^2}}, \\ \sin(\Omega_D) = \frac{D_{i_y}}{\sqrt{D_{i_x}^2 + D_{i_y}^2}}. \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

La stratégie proposée par [Campan and Brousse, 1994] consiste à attendre que l'inclinaison atteigne sa valeur limite pour effectuer une seule poussée telle que $\vec{\Delta i}$ est dans la direction définie par Ω_D , dans le sens opposé à la dérive, et d'intensité suffisante pour atteindre l'intersection entre la droite de dérive et le cercle défini par l'inclinaison maximale autorisée, comme cela est représenté sur la figure F.1. Afin d'avoir une correction dans le sens de la dérive, il est possible d'effectuer une poussée à l'ascension droite $\kappa(t_N) \approx \Omega_D$ ou $\kappa(t_N) \approx \Omega_D + \pi$. Puisqu'il est nécessaire de pousser dans le sens opposé à la dérive, la poussée devra être positive à l'ascension droite $\kappa(t_N) \approx \Omega_D + \pi$ et négative en $\kappa(t_N) \approx \Omega_D$. Ceci définit l'instant t_N à laquelle la correction doit être faite, tel que :

$$\Theta(t_N) = \Omega_D - \ell_{M\Theta,mp}. \quad (\text{F.3})$$

Dans le cas de cette stratégie, la poussée n'est donc pas à réaliser aux nœuds de l'orbite, comme cela est généralement conseillé, afin d'agir non seulement sur le module du vecteur inclinaison mais aussi sur son argument.

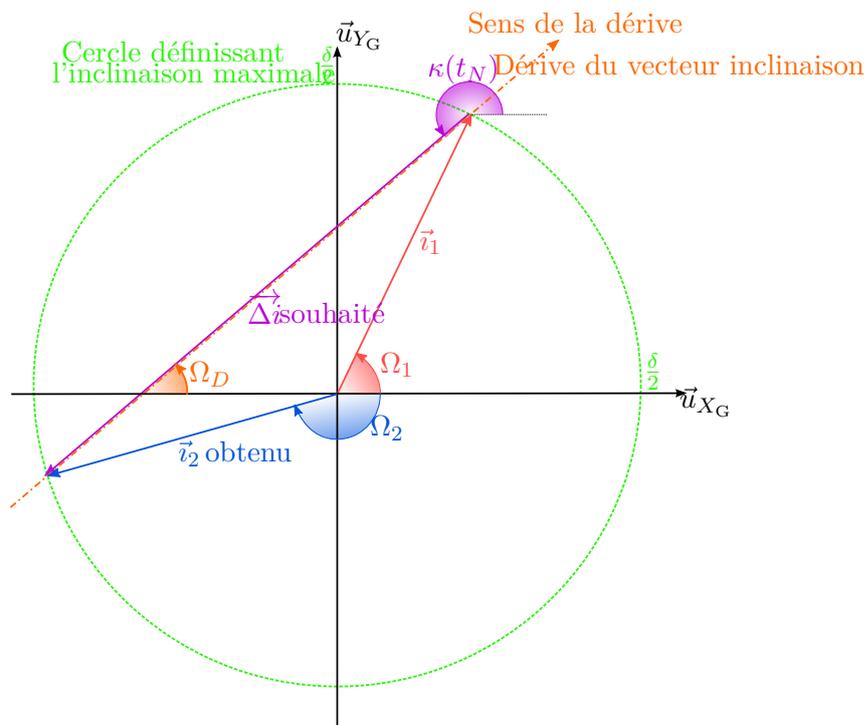


FIGURE F.1 – Besoin en Δi pour une stratégie d'attente

F.1.2 MAINTIEN À POSTE DANS LE PLAN DE L'ORBITE

Si les corrections hors plan permettent de maintenir la latitude du satellite dans les bornes fixées par la mission, les manœuvres dans le plan permettent de maintenir la longitude géographique dans les bornes fixées par la mission. La longitude géographique dépend certes de la longitude moyenne, mais également de l'excentricité, et dans une seconde mesure du

demi-grand axe. En effet, la longitude géographique s'exprime comme :

$$\lambda(t) = \ell_{M\Theta}(t) + 2e_x \sin(\ell_{M\Theta}(t) + \Theta(t)) - 2e_y \cos(\ell_{M\Theta}(t) + \Theta(t)), \quad (\text{F.4})$$

où la dépendance envers le vecteur excentricité se voit explicitement. L'explication physique est la suivante : si l'orbite est elliptique, le satellite va plus lentement que la Terre pendant une demi-révolution et rattrape son retard en allant plus vite que la Terre pour la demi-révolution suivante.

Le demi-grand axe influence le mouvement en longitude à travers la dérive $d(t) = -\frac{3}{2} \frac{a(t)}{a_{mp}}$. Si le demi-grand axe de la trajectoire est plus grand que le demi-grand axe de maintien à poste, la trajectoire a une altitude plus élevée que la trajectoire géostationnaire. Le satellite avance donc plus lentement que la Terre sur son orbite, ce qui conduit à une dérive temporelle de la longitude du satellite. Il semble donc nécessaire de corriger le demi-grand axe également. Or, les références [Soop, 1994] et [Campan et al., 1995] ne proposent aucune stratégie de correction de cet élément orbital. L'explication de cette absence de stratégie et du fait qu'aucune borne n'existe sur le rayon r sera donnée un peu plus loin. On suppose donc que les manœuvres dans le plan de l'orbite sont effectuées pour corriger à la fois le vecteur excentricité $\vec{e} = (e_x, e_y)$ de l'orbite et la longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$ du satellite.

Les équations (B.68b) à (B.68e) et (B.68h) à (B.68i) montrent que des poussées radiales (dans la direction satellite - Terre) et des poussées tangentielles (dans la direction Est - Ouest) permettent de réaliser ces corrections. On peut observer que corriger l'excentricité avec une poussée radiale en $\kappa(t_R)$ est deux fois moins efficace que corriger l'excentricité avec une poussée tangentielle en $\kappa(t_T) = \kappa(t_R) + \frac{\pi}{2}$. C'est pourquoi, il est proposé dans les références [CNES, 1995] et [Soop, 1994] d'appliquer uniquement des poussées tangentielles pour la correction dans le plan de l'orbite.

Cependant, si aucune poussée radiale n'est utilisée, les stratégies de corrections de la longitude moyenne deviennent plus compliquées. En effet, une poussée tangentielle n'a d'effet que sur la dérive d et sur le vecteur excentricité, ce qui n'a qu'une influence indirecte sur la longitude moyenne.

F.1.2.1 CONTRÔLE DE L'EXCENTRICITÉ

Deux méthodes différentes pour contrôler l'excentricité sont présentées dans la littérature (voir par exemple les références [Gartrell, 1981], [Kamel and Wagner, 1981], [Soop, 1994], [Kelly et al., 1994], [Campan and Brousse, 1994] et [Emma and Pernicka, 2003]).

La première méthode est la méthode de circularisation. La pression de radiation solaire a pour effet d'augmenter le vecteur excentricité dans une direction perpendiculaire à la direction Terre-Soleil. Comme le montre le schéma de la figure F.2, la pression de radiation solaire agit comme une poussée tangentielle positive au point A et tend à placer le périégée dans cette direction tandis que la poussée tangentielle engendrée en C est négative et tend à placer l'apogée dans cette direction. Aux points B et D , la pression de radiation solaire agit comme une poussée radiale, et contribue à augmenter l'excentricité dans une direction perpendiculaire à l'axe (BD). Afin de corriger cet effet, il est possible d'effectuer des manœuvres tangentielles à l'apogée et au périégée de l'orbite afin de rendre l'orbite circulaire.

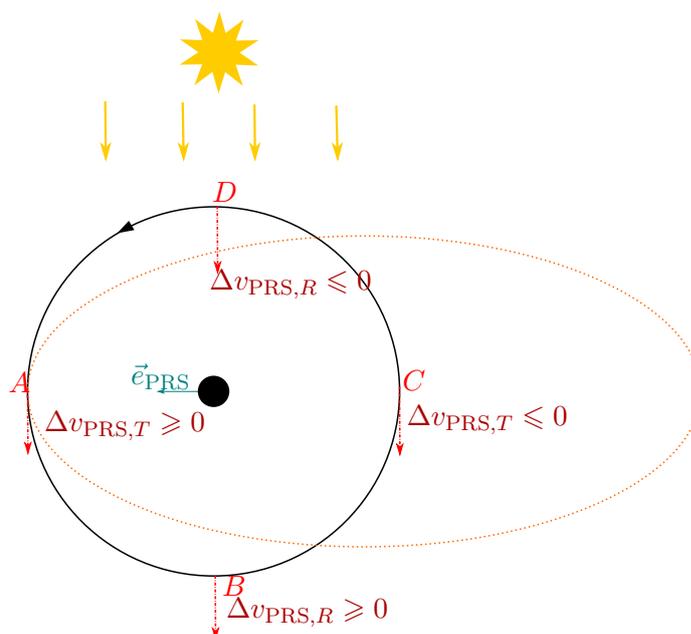


FIGURE F.2 – Effet de la pression de radiation solaire sur l'orbite.

La deuxième méthode est appelée « Sun Pointing Perigee » dans la littérature anglo-saxonne. Cette stratégie provient de l'analyse de l'évolution du vecteur excentricité moyen dans le plan (e_x, e_y) . La référence [Campan et al., 1995] montre que si l'on considère l'orbite apparente du Soleil comme circulaire dans le plan de l'équateur terrestre, l'équation d'évolution du vecteur excentricité soumis à la pression de radiation solaire est donnée par :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = R_e \begin{pmatrix} -\sin \lambda_S(t) \\ \cos \lambda_S(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{F.5})$$

où R_e est un paramètre qui dépend du flux solaire ainsi que des caractéristiques du satellite, et λ_S est la longitude apparente du Soleil. En intégrant, il vient :

$$\vec{e}(t) = \vec{e}_0 + \frac{R_e}{\omega_S} \begin{pmatrix} \cos \lambda_S(t) \\ \sin \lambda_S(t) \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

où \vec{e}_0 est une constante d'intégration et $\omega_S = \dot{\lambda}_S(t)$ est la vitesse de révolution du Soleil sur son orbite, supposée constante. Il s'ensuit que le vecteur $\vec{e}(t) - \vec{e}_0$ décrit dans le plan (e_x, e_y) un cercle de rayon R_e en un an et pointe tout le temps dans la direction du Soleil (voir figure F.3).

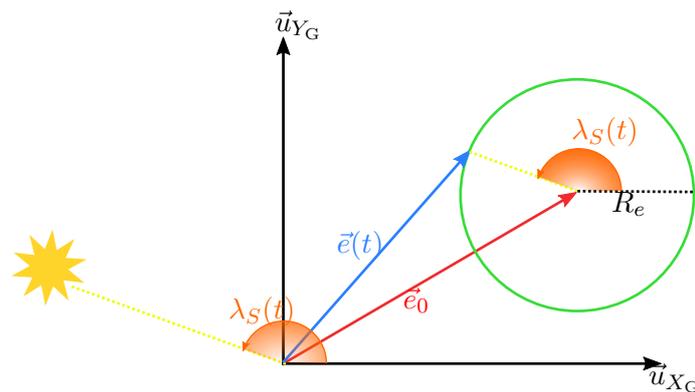


FIGURE F.3 – Effet de la pression de radiation solaire sur le mouvement moyen du vecteur excentricité. Le vecteur \vec{e}_0 est la constante d'intégration, le vecteur $\vec{e}(t)$ est le vecteur excentricité moyen.

Le principe de la méthode est de forcer le périgéee de l'orbite à rester orienté dans la direction du Soleil. En début de cycle de maintien à poste, le vecteur excentricité est orienté dans une direction proche de celle du Soleil, puis dérive naturellement ; en fin de cycle, le vecteur excentricité est corrigé afin de le ramener en position du début de cycle, de telle sorte que le vecteur excentricité pointe toujours, en moyenne, dans la direction du Soleil (voir le schéma de la figure F.4). Cette méthode est en général utilisée lorsque le besoin en correction est important, mais présente l'inconvénient de conserver des excentricités grandes, comme le fait remarquer la référence [Emma and Pernicka, 2003]. Il faut donc définir une valeur de l'excentricité e_c qu'on souhaite ne pas dépasser pour que les oscillations en longitude ne soient pas trop élevées.

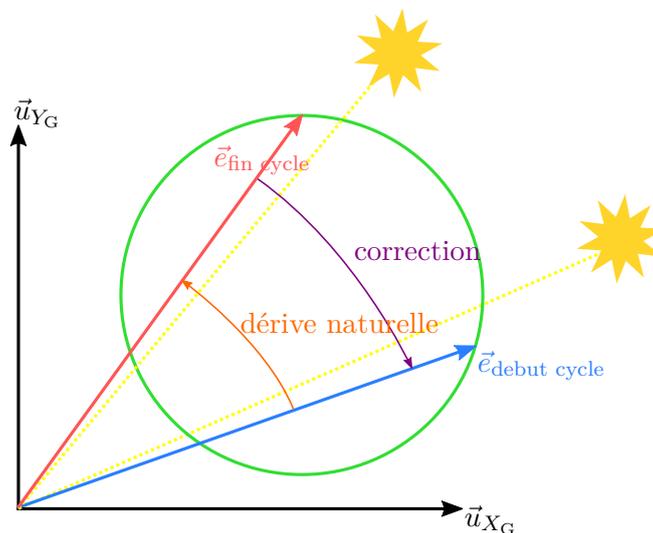


FIGURE F.4 – Principe de la méthode du *Sun Pointing Perigee*.

F.1.2.2 CONTRÔLE DE LA LONGITUDE

Dans le cas où l'erreur d'excentricité maximale est telle que le cercle d'évolution annuelle du vecteur excentricité est compris dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon égal à la valeur

maximale autorisée dans le plan (e_x, e_y) , alors l'excentricité n'a pas besoin d'être corrigée. Les impulsions effectuées servent à corriger la longitude moyenne et sa dérivée. Dans ce cas, il est nécessaire de retirer à l'intervalle admissible pour la longitude une marge pour tenir compte des oscillations dues au caractère excentrique de l'orbite.

Les références [Campan et al., 1995], [Soop, 1994], [Emma and Pernicka, 2003] et [Romero and Gambi, 2004] supposent que la longitude moyenne est principalement affectée par la non circularité de l'équateur terrestre (coefficients d'ordre 2 du développement du potentiel d'attraction terrestre en harmoniques sphériques). En première approximation, on peut écrire :

$$\frac{d^2 \ell_{M\Theta}}{dt^2} = \Gamma_\ell, \quad (\text{F.7})$$

avec Γ_ℓ constant. La longitude moyenne décrit donc en première approximation une parabole.

La référence [Soop, 1994] propose une méthode de correction de la longitude moyenne basée sur cette approximation, et qui a également été utilisée par [Chao and Bernstein, 1994]. En intégrant l'équation (F.7) par rapport au temps, on obtient :

$$\ell_{M\Theta}(t) = \ell_{M\Theta}(t_0) + \dot{\ell}_{M\Theta}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\Gamma_\ell(t - t_0)^2. \quad (\text{F.8})$$

Pour effectuer un cycle de correction en longitude moyenne, on suppose que l'on se trouve sur un des bords de la fenêtre au début du cycle (voir figure F.5 et l'équation (1.70), page 33 qui impose que la longitude moyenne soit bornée). On peut alors choisir le taux de dérive, c'est-à-dire la dérivée de la longitude moyenne afin que la parabole soit tangente à l'autre extrémité de la fenêtre et revienne en fin de cycle au même niveau que le point de départ. Si τ est la durée d'un cycle, non fixée à l'avance, et en supposant que la longitude moyenne se confond avec la longitude géographique, on peut écrire les conditions suivantes pour assurer le contrôle de la longitude moyenne (dans le cas où $\Gamma_\ell \geq 0$) :

$$\begin{cases} \ell_{M\Theta}(t_0) = \lambda_{mp} + \delta, \\ \dot{\ell}_{M\Theta}(t_0) = \dot{\ell}_{M\Theta,0}, \\ \ell_{M\Theta}(t_0 + \frac{\tau}{2}) = \lambda_{mp} - \delta, \\ \dot{\ell}_{M\Theta}(t_0 + \frac{\tau}{2}) = 0. \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

Ce système permet de trouver :

$$\begin{cases} \dot{\ell}_{M\Theta}(t_0) = -2\sqrt{\Gamma_\ell\delta} \\ \tau = 4\sqrt{\frac{\delta}{\Gamma_\ell}} \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

Dans le cas où $\Gamma_\ell \leq 0$, le signe de $\dot{\ell}_{M\Theta}(t_0)$ doit être inversé.

Ces équations ne prennent pas en compte l'effet de l'excentricité. En effet, une excentricité non nulle produit des oscillations en longitude d'amplitude $2e$. Il faut alors réduire la taille de la fenêtre précédente de l'amplitude de ces oscillations. Les conditions à vérifier en début

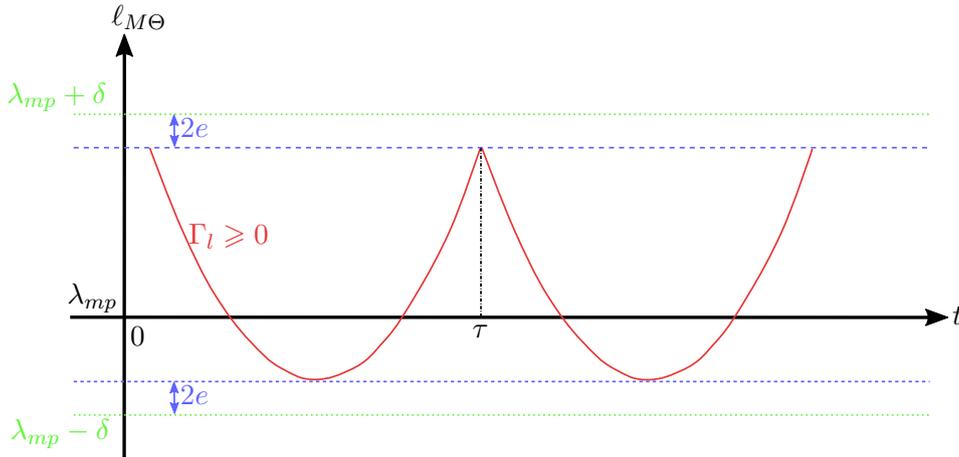


FIGURE F.5 – Stratégie de maintien à poste pour la longitude moyenne.

de cycle sont alors données par :

$$\begin{cases} \dot{l}_{M\Theta}(t_0) = -2\sqrt{\Gamma_l(\delta - 2e)}, \\ \tau = 4\sqrt{\frac{\delta - 2e}{\Gamma_l}}. \end{cases} \quad (\text{F.11})$$

Ainsi, le maintien à poste en longitude est réalisé grâce au contrôle de $\dot{l}_{M\Theta}$ par des poussées tangentielles au début de chaque cycle. Comme la correction ne dépend pas de la position sur l'orbite, il est possible de répéter la même stratégie indéfiniment.

F.1.2.3 CONTRÔLE DU RAYON

Le rayon relatif peut être écrit à partir des équations (1.46), page 28 et (B.82), page 248 :

$$r = a - e_x a_{mp} \cos(\kappa_{mp}(t)) - e_y a_{mp} \sin(\kappa_{mp}(t)). \quad (\text{F.12})$$

En y associant les transformations trigonométriques décrites dans l'annexe G, page 297 :

$$r = a - a_{mp} \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \sin\left(\kappa_{mp}(t) + \arctan\left(\frac{e_x}{e_y}\right)\right), \quad (\text{F.13})$$

si $e_y \neq 0$.

En remarquant que :

$$r - a = -a_{mp} \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \sin\left(\kappa_{mp}(t) + \arctan\left(\frac{e_x}{e_y}\right)\right), \quad (\text{F.14})$$

et :

$$-a_{mp} \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq -a_{mp} \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \sin\left(\kappa_{mp}(t) + \arctan\left(\frac{e_x}{e_y}\right)\right) \leq a_{mp} \sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \quad (\text{F.15})$$

il vient :

$$-a_{mp}\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq r - a \leq a_{mp}\sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \quad (\text{F.16})$$

puis :

$$a - a_{mp}\sqrt{e_x^2 + e_y^2} \leq r \leq a + a_{mp}\sqrt{e_x^2 + e_y^2}. \quad (\text{F.17})$$

Dans le cas où $e_y = 0$, l'encadrement (1.67), page 33 permet de retrouver la contrainte sur le rayon.

Avec les bornes sur le vecteur excentricité de l'équation (1.69), page 33, l'équation précédente devient :

$$\begin{cases} a - \frac{a_{mp}}{2}(\delta + \ell_{M\Theta}) \\ a - \frac{a_{mp}}{2}(\delta - \ell_{M\Theta}) \end{cases} \leq r \leq \begin{cases} a + \frac{a_{mp}}{2}(\delta + \ell_{M\Theta}) \\ a + \frac{a_{mp}}{2}(\delta - \ell_{M\Theta}) \end{cases}. \quad (\text{F.18})$$

Il est possible de donner une borne au demi-grand axe. Comme seules des poussées tangentielles sont réalisées, l'équation liant la dérivée de la longitude et du demi-grand axe permet de réécrire :

$$a = -\frac{2}{3} \frac{a_{mp}}{n_{mp}} \dot{\ell}_{M\Theta}. \quad (\text{F.19})$$

Comme cela a été évoqué dans la partie sur le contrôle de la longitude à la section F.1.2.2, page 285, une modélisation simple de la perturbation due à la non sphéricité du potentiel terrestre permet d'établir une stratégie simple permettant de borner la longitude moyenne $\ell_{M\Theta}$. L'équation (F.10) permet de déterminer la dérivée de la longitude à l'instant initial. Comme la trajectoire est parabolique et convexe (car $\Gamma_l \geq 0$), on peut écrire sur le cycle de correction :

$$-2\sqrt{\Gamma_l \delta} \leq \dot{\ell}_{M\Theta}(t) \leq 0, \quad (\text{F.20})$$

et dans le cas où $\Gamma_l \leq 0$, la parabole est concave et :

$$0 \leq \dot{\ell}_{M\Theta}(t) \leq 2\sqrt{|\Gamma_l| \delta}. \quad (\text{F.21})$$

On peut réunir ces contraintes sous la forme :

$$-2\sqrt{|\Gamma_l| \delta} \leq \dot{\ell}_{M\Theta}(t) \leq 2\sqrt{|\Gamma_l| \delta}, \quad (\text{F.22})$$

et borner le demi-grand axe comme :

$$-\frac{4}{3} \frac{a_{mp}}{n_{mp}} \sqrt{|\Gamma_l| \delta} \leq a \leq \frac{4}{3} \frac{a_{mp}}{n_{mp}} \sqrt{|\Gamma_l| \delta}. \quad (\text{F.23})$$

L'équation (1.70) assurant : $-\delta \leq \ell_{M\Theta} \leq \delta$, il est possible de borner le rayon relatif sous la forme :

$$-\left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{|\Gamma_l| \delta}}{n_{mp}} + \delta\right) a_{mp} \leq r \leq \left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{|\Gamma_l| \delta}}{n_{mp}} + \delta\right) a_{mp} \quad (\text{F.24})$$

En utilisant les conditions de début de cycle prenant en compte le caractère non nul de l'excentricité (voir l'équation (F.11)) tel que :

$$|\ell_{M\Theta}| \leq \delta - e, \quad (\text{F.25})$$

le rayon relatif est borné sous la forme :

$$|r| \leq \left(\frac{4}{3} \frac{\sqrt{|\Gamma_l|(\delta - 2e)}}{n_{mp}} + \delta - e \right) a_{mp} \quad (\text{F.26})$$

F.1.3 CONCLUSION

Les stratégies de corrections à poussées fortes peuvent donc être analysées en séparant les corrections dans le plan et hors plan.

Les corrections hors plan étant les plus coûteuses, elles sont déterminées en premier. L'étude de l'effet d'une poussée normale montre que les corrections optimales sont réalisées aux nœuds de l'orbite initiale. Cependant, une correction aux nœuds ne permet pas de corriger l'ascension droite du nœud ascendant. Ainsi, si le plan de l'orbite doit tourner autour de l'axe (G, \vec{u}_{Z_G}) , il est nécessaire de réaliser une poussée non optimale en inclinaison, mais qui corrige l'ascension droite du nœud ascendant.

Une fois les poussées hors plan calculées, les poussées dans le plan doivent être déterminées. Cette détermination est plus laborieuse car les corrections doivent porter à la fois sur le vecteur excentricité et sur la longitude moyenne. Puisque la correction en longitude moyenne est indépendante de la position du satellite lors de la correction, la correction du vecteur excentricité est calculée en premier. Deux stratégies existent à cette fin : la méthode de circularisation et la méthode de *Sun Pointing Perigee*. La méthode de circularisation consiste en la correction progressive de l'augmentation de l'excentricité due à la pression de radiation solaire. Elle présente l'avantage de conserver l'excentricité petite. La méthode de *Sun Pointing Perigee* consiste à faire bouger le vecteur excentricité de telle sorte qu'il suive le mouvement de révolution annuel du Soleil. Cette méthode présente l'inconvénient de conserver de grandes excentricités.

Le choix d'une méthode de correction du vecteur excentricité peut être guidé par le besoin en correction de la longitude moyenne. Comme un écart en longitude moyenne conduit à un mouvement de libration de l'excentricité, le besoin de correction en longitude contraint le besoin de correction en excentricité. Le calcul du besoin de correction en longitude moyenne est effectué grâce à une modélisation simple à un degré de liberté, qui considère que la longitude moyenne décrit une parabole en fonction du temps. Imposer que cette parabole reste dans la fenêtre de maintien à poste permet de calculer les corrections à apporter.

F.2 CORRECTIONS À POUSSÉE FAIBLE

F.2.1 PERTE D'EFFICACITÉ

Puisque la poussée des propulseurs électriques est plus faible, les références [Soop, 1994], [Campan et al., 1995] et [Sidi, 1997] proposent de réaliser des stratégies de maintien à poste identiques aux stratégies à poussée forte, mais en compensant la faible poussée par une durée d'activation des propulseurs plus grande (étalement de poussée). Cependant, étendre la durée de la poussée conduit à une perte d'efficacité de la correction qui est soulignée en comparant les équations (B.71a) - (B.71i) avec les équations (B.68a) - (B.68i).

La poussée étant considérée non impulsionnelle, le propulseur continue à être actif alors que le satellite continue sa révolution autour de la Terre. Ainsi, la direction de

poussée change en fonction du temps. La somme vectorielle de toutes ces poussées selon des directions différentes conduit à une poussée résultante plus faible. C'est pourquoi les références [Campan et al., 1995] et [Eckstein et al., 1981] proposent de réaliser des stratégies pour lesquelles les poussées sont courtes et effectuées souvent. Cependant, la référence [Eckstein and Hechler, 1981] propose de conserver une stratégie où les poussées doivent être effectuées le moins souvent possible, lorsque l'évolution séculaire des éléments orbitaux amène ces derniers à sortir de la fenêtre admissible.

F.2.2 MAINTIEN À POSTE HORS PLAN

Dans la référence [Campan and Brousse, 1994, page 1000], cette dérive est exprimée numériquement :

$$\begin{cases} \left. \frac{di_x}{dt} \right|_{sec} = (-3,6 \sin \Omega_M) 10^{-4} \text{ deg/j}, \\ \left. \frac{di_y}{dt} \right|_{sec} = (23,4 + 2,7 \cos \Omega_M) 10^{-4} \text{ deg/j}, \end{cases} \quad (\text{F.27})$$

avec Ω_M la longitude écliptique du nœud ascendant de l'orbite lunaire qui peut être considérée comme constante pour un intervalle de temps suffisamment petit. La référence [Anzel, 1988] obtient un résultat similaire pour lequel il apparaît que l'essentiel des contributions des accélérations perturbatrices modifie la composante i_y du vecteur excentricité.

Pour corriger cette évolution séculaire, la stratégie est d'effectuer une poussée normale telle que $\vec{\Delta i}$ n'ait qu'une composante selon $-\vec{u}_{Y_G}$ pour compenser la dérive séculaire, c'est-à-dire avec l'analyse faite dans le cas de la poussée forte et renforcée par [?], à une ascension droite de $\kappa_A = \kappa(t_A) = 90^\circ$ qui est atteinte pour t_A tel que :

$$\Theta(t_A) = \kappa_A - \ell_{M\Theta,mp}. \quad (\text{F.28})$$

D'après les équations (B.71f) et (B.71g), page 246, effectuer une poussée en un point d'ascension droite κ_A de l'orbite équivaut à effectuer une poussée de sens opposé en un point $\kappa_B = K(t_B) = \kappa_A + \pi$. Ainsi, les corrections peuvent être effectuées non pas dès que le vecteur inclinaison sort de la fenêtre admissible, mais toutes les demi-orbitales, en deux points espacés d'une ascension droite de 180° .

F.2.3 MAINTIEN À POSTE DANS LE PLAN

En utilisant l'interprétation donnée dans la section F.1.2.1, page 283 et par la figure F.2 pour l'effet de la pression de radiation solaire sur l'orbite, l'effet de cette pression sur le vecteur excentricité sur une période d'un an peut être analysé selon la méthode employée dans [Anzel, 1988].

Le schéma de la figure F.6 montre l'orbite dans le plan de l'équateur ($\vec{u}_{X_G}, \vec{u}_{Y_G}$). On peut remarquer que sous l'effet de la pression de radiation solaire :

- lorsque le Soleil se trouve entre le solstice d'hiver et le solstice d'été, c'est-à-dire pour une ascension droite solaire $\kappa_\odot \in [-90^\circ, 90^\circ]$, e_y augmente et l'orbite s'allonge vers $-\vec{u}_{Y_G}$,

- lorsque le Soleil se trouve entre le solstice d'été et le solstice d'hiver, c'est-à-dire pour une ascension droite solaire $\kappa_{\odot} \in [90^{\circ}, 270^{\circ}]$, e_y diminue et l'orbite s'allonge vers $+\vec{u}_{Y_G}$,
- lorsque le soleil se trouve entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne, c'est-à-dire pour une ascension droite solaire $\kappa_{\odot} \in [0^{\circ}, 180^{\circ}]$, e_x diminue et l'orbite s'allonge vers $+\vec{u}_{X_G}$,
- lorsque le soleil se trouve entre l'équinoxe d'automne et l'équinoxe de printemps, c'est-à-dire pour une ascension droite solaire $\kappa_{\odot} \in [180^{\circ}, 360^{\circ}]$, e_x augmente et l'orbite s'allonge vers $-\vec{u}_{X_G}$

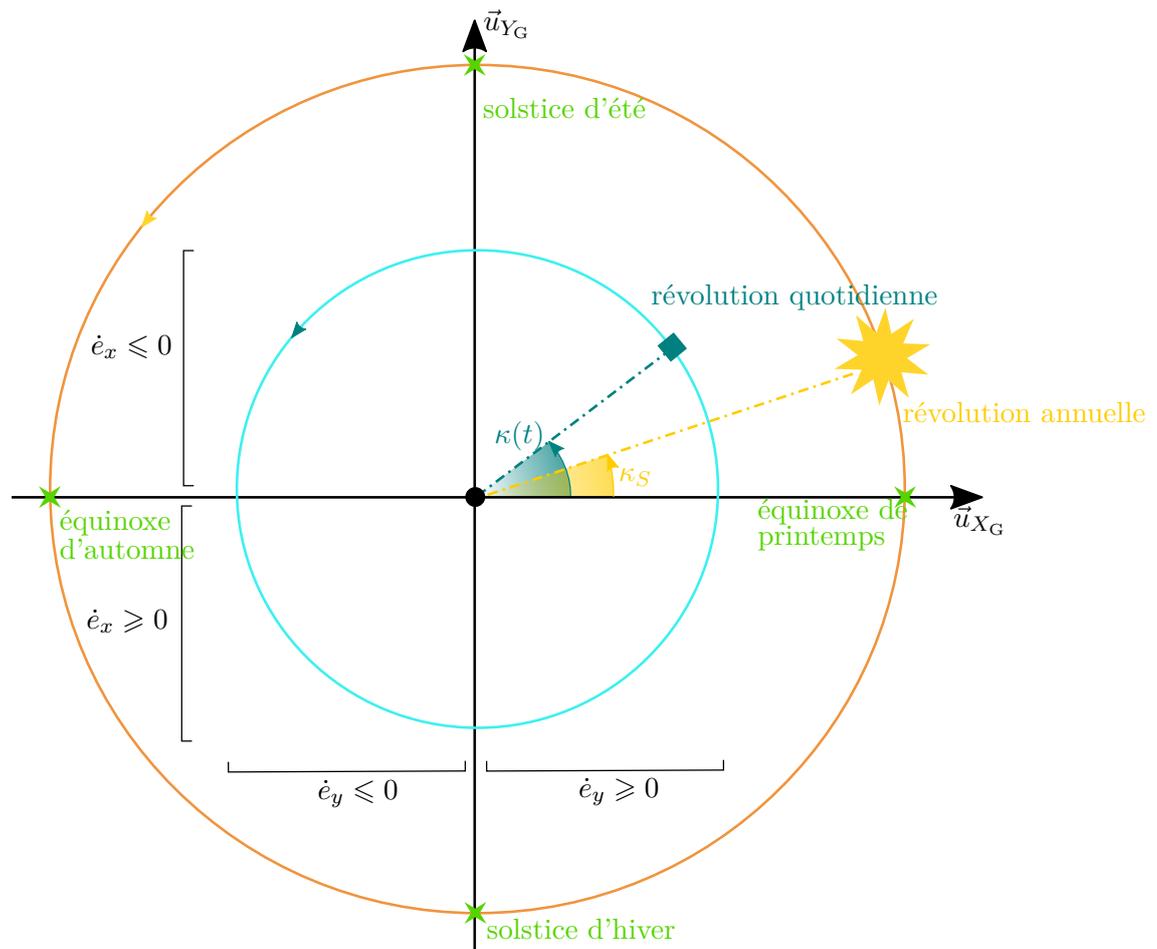


FIGURE F.6 – Effet de la PRS sur l'orbite en fonction de la position du Soleil.

F.2.4 COUPLAGE DES POUSSÉES

La référence [Eckstein et al., 1981] propose la première stratégie de maintien à poste avec un propulseur sur la face Est et un sur la face Ouest, inclinés dans la direction perpendiculaire à l'équateur afin de corriger l'orbite dans la direction Nord-Sud alors que la référence [Anzel, 1988] propose une configuration avec quatre propulseurs montés sur la face anti nadir et dépose un brevet ([Anzel, 1995]). Il s'agit de la configuration décrite

dans la section 1.4.2.1, page 34 avec quatre moteurs orientés dans les directions Nord-Est, Nord-Ouest, Sud-Est, Sud-Ouest. [Gopinath and Srinivasamuthy, 2003] propose également une stratégie de contrôle avec une configuration identique des propulseurs.

Si les moteurs sont inclinés, il n'est plus possible de supposer que les poussées hors plan sont réalisables indépendamment des poussées dans le plan. De plus, les stratégies de [Campan and Brousse, 1994] qui supposaient une absence de poussées radiales ne sont plus possibles car chaque propulseur produit une force disposant d'une composante radiale. Les stratégies développées jusqu'ici doivent alors être adaptées.

Comme le préconisent les références [Campan and Brousse, 1994] et [Sidi, 1997], les poussées Nord-Sud doivent être planifiées dans un premier temps, et la stratégie du contrôle hors plan de la section précédente reste possible. Il faut ainsi effectuer deux poussées par orbite, une au nœud ascendant et l'autre au nœud descendant avec les propulseurs orientés dans l'autre direction.

Dans le cas considéré, deux propulseurs ne peuvent pas pousser en même temps. Ainsi, les poussées des deux propulseurs Nord doivent être séparées, de même pour les poussées des deux propulseurs Sud. La référence [Anzel, 1995] propose d'utiliser cette séparation des poussées afin de créer un différentiel de poussée tangentielle et corriger le mouvement dans le plan de l'équateur. L'intervalle de temps entre ces deux poussées doit être suffisamment faible pour empêcher que la vitesse tangentielle ainsi introduite n'induisse de sortie de la fenêtre. Par ailleurs, l'incrément de vitesse radiale introduit lors des poussées à un nœud pourra être compensé une demi-orbite plus tard.

D'après ce qui a été fait précédemment, les deux points de poussée choisis sur l'orbite sont le point $\kappa(t_A) = \kappa_A = 90^\circ$ et $\kappa(t_B) = \kappa_B = 270^\circ$. Avec l'analyse de l'effet des poussées normales et tangentielles sur le vecteur excentricité, on peut conclure qu'il faut en A et B une poussée tangentielle pour obtenir un vecteur $\vec{\Delta e}$ colinéaire à \vec{u}_{Y_G} pour corriger l'évolution de e_y ainsi qu'une poussée radiale pour avoir un vecteur $\vec{\Delta e}$ colinéaire à \vec{u}_{X_G} pour corriger l'évolution de e_x .

Puisque les corrections de longitude moyenne sont indépendantes de l'ascension droite du satellite, il peut en théorie être possible de les réaliser à n'importe quel instant et la durée du cycle de correction est libre. Cependant, dans le cas considéré ici, la durée du cycle de correction est fixée par les instants des deux poussées t_A et t_B avec une durée du cycle $\tau = 1$ jour¹. Pour établir les contraintes à vérifier, on suppose les valeurs du demi-grand axe et de l'excentricité connues juste avant le début du cycle, donc juste avant la poussée au point A d'ascension droite 90° (voir figure F.7).

1. On pourrait aussi considérer un cycle de durée $\tau = \frac{1}{2}$ jour, mais [Anzel, 1988] préconise une journée.

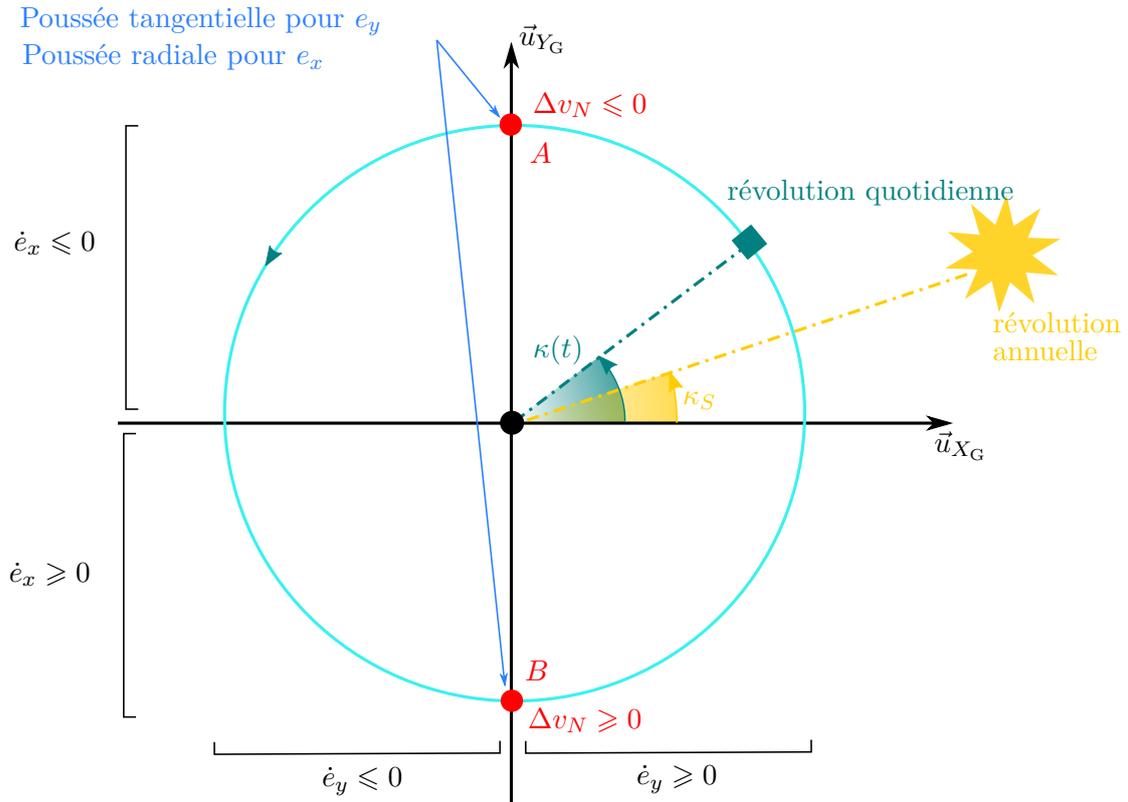


FIGURE F.7 – Effet de la PRS sur l’orbite en fonction de la position du Soleil

Dans le cas où Γ_l est positif, on impose au point de départ du cycle de se situer dans la partie supérieure de la fenêtre avec une dérivée négative mais suffisamment grande pour que la longitude moyenne ne sorte pas de la fenêtre et au point d’arrivée, de se situer dans la partie supérieure de la fenêtre avec une dérivée pas trop élevée.

F.3 VALEURS NUMÉRIQUES

La stratégie à poussée forte décrite dans la section F.1 peut être analysée numériquement à partir des valeurs données dans les tableaux de la référence [Soop, 1994]. D’après les équations (B.68f) et (B.68g), une poussée ΔV_N en $t = t_N$ produit une correction d’inclinaison donnée par :

$$\Delta i = \sqrt{(\Delta i_x)^2 + (\Delta i_y)^2} = \frac{\Delta V_N}{2v_{mp}}. \quad (\text{F.29})$$

D’après l’équation (1.59), le maintien à poste est assuré lorsque :

$$\Delta i \leq \frac{\delta}{2}. \quad (\text{F.30})$$

Il est donc nécessaire de réaliser une poussée normale pour ramener l’inclinaison à la valeur $\frac{\delta}{2}$.

Le tableau 3 page 150 de la référence [Soop, 1994] donne la variation d’inclinaison sur un

an due aux perturbations ainsi que le besoin en correction pour ramener la composante i_x du vecteur inclinaison à 0. Dans le cas qui nous intéresse pour cette étude, il est nécessaire de calculer l'incrément de vitesse pour corriger les deux composantes i_x et i_y . Le calcul de la poussée normale est effectuée dans le cas où l'inclinaison atteinte au bout d'un an est la plus grande et la plus petite :

- si $\Delta i_{1 \text{ an}} = 0,957^\circ$, la poussée normale totale à appliquer sur un an est :

$$\Delta V_N = 2v_{mp} \left(\Delta i_{1 \text{ an}} - \frac{\delta}{2} \right) = 99,4 \text{ m/s} , \quad (\text{F.31})$$

- si $\Delta i_{1 \text{ an}} = 0,758^\circ$, la poussée normale totale à appliquer sur un an est :

$$\Delta V_N = 2v_{mp} \left(\Delta i_{1 \text{ an}} - \frac{\delta}{2} \right) = 78,67 \text{ m/s} , \quad (\text{F.32})$$

avec $\delta = 0,05^\circ$ et :

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a_{mp}}} = 3,075 \text{ km/s} \text{ et } a_{mp} = 42164 \text{ km}. \quad (\text{F.33})$$

En supposant que les corrections dans le plan sont effectuées seulement au moyen de poussées tangentielles, la correction du mouvement de longitude moyenne est effectuée à travers la dérivée de la longitude moyenne $\dot{\ell}_{M\Theta}$. Il vient ainsi à partir de l'équation (B.68i) :

$$\Delta \dot{\ell}_{M\Theta} = -3 \frac{n_{mp}}{v_{mp}} \Delta V_T \quad (\text{F.34})$$

Or, d'après l'approximation effectuée, le mouvement en longitude moyenne en fonction du temps est assimilé à une parabole. A la fin de chaque cycle, l'équation (F.11) permet de calculer la valeur de la pente de la parabole, et la poussée tangentielle effectuée à cet instant a pour but de changer le signe de la pente en fin de cycle pour commencer le cycle suivant. Il vient alors :

$$\Delta \dot{\ell}_{M\Theta} = -4 \sqrt{\Gamma_l(\delta - e)}, \quad (\text{F.35})$$

ce qui permet de calculer la poussée tangentielle requise :

$$\Delta V_T = \frac{4v_{mp}}{3n_{mp}} \sqrt{\Gamma_l(\delta - e)}. \quad (\text{F.36})$$

Dans la formule précédente, il est nécessaire de tenir compte de la valeur de l'excentricité car une excentricité non nulle entraîne un mouvement d'oscillation de la longitude. La valeur moyenne de l'excentricité \bar{e} se calcule selon la formule donnée par la référence [Soop, 1994] :

$$\bar{e} = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{3}{2} P_\odot \sigma - |\vec{a}_{\text{pot}}| \right), \quad (\text{F.37})$$

où :

- T correspond à la durée pour laquelle la valeur moyenne doit être calculée, ici 1 an,
- P_\odot est la pression de radiation solaire sur une surface orthogonale à la direction Terre-Soleil,

- $\sigma = \frac{S}{m}$ est le rapport de la surface projetée dans la direction Terre-Soleil par la masse du satellite,
- $|\vec{a}_{\text{pot}}|$ est l'accélération perturbatrice produite par le potentiel terrestre non sphérique.

Le tableau 2, page 287 de la référence [Soop, 1994] donne pour une longitude de maintien à poste de 118° une accélération $|\vec{a}_{\text{pot}}| = -4,68.10^{-15}$ rad/s². Avec un rapport surface sur masse $\sigma = 0,0227$ km/m², il vient $\bar{e} = 3,931.10^{-5}$, puis pour une fenêtre de maintien à poste de demi-largeur $\delta = 0,05^\circ$, la correction à apporter à la fin de chaque cycle est $\Delta V_T = 0,11$ m/s.

Avec ces données, la durée d'un cycle est $\tau = 19,54$ jours, ce qui a conduit à 19 cycles par an. La correction en poussée tangentielle à apporter sur un an est donc $\Delta V_{T,1 \text{ an}} = 2,11$ m/s.

En ce qui concerne la correction à poussée faible, la référence [Eckstein, 1978] a étudié des stratégies dans le cas où aucune contrainte n'est prise en compte sur les poussées et dans le cas où les instants d'allumage des moteurs sont contraints. Les résultats pour une stratégie de maintien à poste sur 10 jours sont :

- dans le cas où aucune contrainte sur les poussées n'est prise en compte : $\Delta V_{10 \text{ jours}} = 2,929$ m/s,
- dans le cas où les instants de poussée sont contraints, il vient : $\Delta V_{10 \text{ jours}} = 3,204$ m/s,

ce qui peut être extrapolé pour une stratégie sur un an :

- dans le cas où aucune contrainte sur les poussées n'est prise en compte : $\Delta V_{1 \text{ an}} = 106,91$ m/s,
- dans le cas où les instants de poussée sont contraints, il vient : $\Delta V_{1 \text{ an}} = 116,95$ m/s.

Les valeurs données dans cette section permettront de comparer les résultats des stratégies de maintien à poste développées dans cette étude.

Annexe **G**

Transformation des fonctions trigonométriques

On cherche à écrire :

$$a \cos(nt) + b \sin(nt) \tag{G.1}$$

sous la forme :

$$c \sin(nt + K) \tag{G.2}$$

En développant cette dernière équation, on obtient :

$$c \sin(nt + K) = c \sin(nt) \cos(K) + c \cos(K) \sin(nt). \tag{G.3}$$

Par identifications des termes en $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$, il vient :

$$a = c \sin(K), \quad b = c \cos(K). \tag{G.4}$$

On obtient donc pour $b \neq 0$:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \tan(K) = \frac{a}{b}. \tag{G.5}$$

En supposant $c \geq 0$, on peut écrire :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad K = \arctan\left(\frac{a}{b}\right), \tag{G.6}$$

et ainsi :

$$a \cos(nt) + b \sin(nt) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\left(nt + \arctan\left(\frac{a}{b}\right)\right), \quad b \neq 0 \tag{G.7}$$

De la même façon, on peut écrire :

$$a \cos(nt) - b \sin(nt) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos\left(nt + \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right), \quad a \neq 0 \tag{G.8}$$

Annexe H

Calcul des dérivées du problème à commutation

Cette annexe décrit le calcul des dérivées de la fonction objectif des problèmes 3.11 et 3.12, page 123. Les notations utilisées ici sont identiques à celles définies dans le chapitre 3.

Il vient pour $l = 1, \dots, P$,

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ}{ds_{2l-1}} &= -1 + 2Qx(2P + 1) + \mu_3 \int_{2l-2}^{2l-1} \psi(t(s), x(s)) ds - \mu_3 \int_{2l-1}^{2l} \psi(t(s), x(s)) ds \\
 &+ \mu_3 (s_{2l-1} - s_{2l-2}) \int_{2l-2}^{2l-1} \left[(s - 2l + 2) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t(s), x(s)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{\partial x(s)}{\partial s_{2l-1}} \right] ds \\
 &+ \mu_3 (s_{2l} - s_{2l-1}) \int_{2l-1}^{2l} \left[(-s + 2l + 2) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t(s), x(s)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{\partial x(s)}{\partial s_{2l-1}} \right] ds,
 \end{aligned} \tag{H.1a}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \frac{dJ}{ds_{2l}} &= 1 + 2Qx(2P + 1) - \mu_3 \int_{2l}^{2l+1} \psi(t(s), x(s)) ds + \mu_3 \int_{2l-1}^{2l} \psi(t(s), x(s)) ds \\
 &+ \mu_3 (s_{2l+1} - s_{2l}) \int_{2l}^{2l+1} \left[(-s + 2l + 1) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t(s), x(s)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{\partial x(s)}{\partial s_{2l-1}} \right] ds \\
 &+ \mu_3 (s_{2l} - s_{2l-1}) \int_{2l-1}^{2l} \left[(s - 2l + 1) \frac{\partial \psi}{\partial t}(t(s), x(s)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)) \frac{\partial x(s)}{\partial s_{2l-1}} \right] ds.
 \end{aligned} \tag{H.1b}$$

Si ψ est donnée par les équations (3.16) et (3.18), page 108, il est possible de calculer :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_k}(t(s), x(s)) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(s)) \frac{\partial t(s)}{\partial s_k} + \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(s)) \frac{\partial x(s)}{\partial s_k}. \tag{H.2}$$

La définition de ψ permet d'écrire sa dérivée partielle par rapport à x d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x(s)) &= C_2(t) [C_2(t)x(s) - \delta] [\text{sign}(C_2(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_2(t) [C_2(t)x(s) + \delta] [\text{sign}(-C_2(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_3(t) [C_3(t)x(s) - \delta] [\text{sign}(C_3(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + C_3(t) [C_3(t)x(s) + \delta] [\text{sign}(-C_3(t)x(s) - \delta) + 1], \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

et par rapport à t d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(s)) &= \frac{dC_2(t)}{dt} x [C_2(t)x(s) - \delta] [\text{sign}(C_2(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + \frac{dC_2(t)}{dt} x [C_2(t)x(s) + \delta] [\text{sign}(-C_2(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + \frac{dC_3(t)}{dt} x [C_3(t)x(s) - \delta] [\text{sign}(C_3(t)x(s) - \delta) + 1] \\ &\quad + \frac{dC_3(t)}{dt} x [C_3(t)x(s) + \delta] [\text{sign}(-C_3(t)x(s) - \delta) + 1]. \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

Si la pénalisation est exprimée en fonction des éléments orbitaux relatifs – voir équation (3.22), page 109 – les dérivées partielles sont calculées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} &= 16x_2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\psi}_2(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_2(x(s)))] + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_3(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_3(x(s)))] \right), \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} &= 16x_3 \left(\frac{1}{2} \tilde{\psi}_2(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_2(x(s)))] + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_3(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_3(x(s)))] \right), \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_4} &= 4x_4 \frac{1}{2} \tilde{\psi}_1(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_1(x(s)))] , \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_5} &= 4x_5 \frac{1}{2} \tilde{\psi}_1(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_1(x(s)))] , \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} &= 4x_6 \left(-\frac{1}{2} \tilde{\psi}_2(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_2(x(s)))] + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_3(x(s)) [1 + \text{sign}(\tilde{\psi}_3(x(s)))] \right). \end{aligned} \quad (\text{H.5})$$

L'expression de $\frac{\partial t(s)}{\partial s_k}$ diffère selon que l'instant de commutation s_k par rapport auquel la dérivée est calculée est la borne inférieure ou supérieure de l'intervalle sur lequel la dérivée est évaluée. Il vient alors :

$$\begin{aligned} s \in [k-1, k] &\Rightarrow t(s) = s_{k-1} + (s_k - s_{k-1})(s - k + 1) \Rightarrow \frac{\partial t(s)}{\partial s_k} = s - k + 1, \\ s \in [k, k+1] &\Rightarrow t(s) = s_k + (s_{k+1} - s_k)(s - k) \Rightarrow \frac{\partial t(s)}{\partial s_k} = 1 - s + k. \end{aligned} \quad (\text{H.6})$$

Le calcul des $\frac{\partial x(s)}{\partial s_k}$ repose sur la remarque suivante :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x(s)}{\partial s_k} \right) = \frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{dx(s)}{ds} \right). \quad (\text{H.7})$$

En effet, on peut écrire la différentielle de x sous la forme :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \sum_{k=1}^{2P} \frac{\partial x}{\partial s_k} ds_k, \quad (\text{H.8})$$

et les paramètres s_k étant indépendants de la variable temporelle s , la dérivée totale de x par rapport à s s'écrit :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial s}. \quad (\text{H.9})$$

De la même façon, la différentielle de $\frac{\partial x}{\partial s_k}$ pour $k = 1, \dots, 2P$ s'écrit sous la forme :

$$d \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) ds + \sum_{i=1}^{2P} \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) ds_i, \quad (\text{H.10})$$

et il vient :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right). \quad (\text{H.11})$$

En supposant que la trajectoire $(s, \{s_k\}) \mapsto x(s, \{s_k\})$ est de la classe \mathcal{C}^2 par rapport à tous ses arguments, il vient alors :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) \stackrel{(\text{H.11})}{=} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial x}{\partial s_k} \right) = \frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right) \stackrel{(\text{H.9})}{=} \frac{\partial}{\partial s_k} \left(\frac{dx}{ds} \right). \quad (\text{H.12})$$

Il est alors possible de calculer $\frac{\partial x}{\partial s_k}$ comme solution de l'équation différentielle (H.7). Cette dernière peut être développée de la façon suivante :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x(s)}{\partial s_{2l-1}} \right) =$$

Intégration des équations de Hill-Clohessy-Wiltshire

Les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire établies dans la section [B.1.1.2](#) page [231](#) peuvent être intégrées analytiquement pour être utilisées pour la résolution du problème de maintien à poste en nombres entiers (voir la section [4.3](#)).

Le modèle dynamique choisi étant un modèle képlérien relatif décrit par les équations de Hill-Clohessy-Wiltshire, le système considéré est un système temps-invariant (LTI). L'équation de la dynamique ([4.71](#)) peut donc être intégrée analytiquement. Il vient alors :

$$X(t) = \Phi_{\text{HCW}}(t, t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_{\text{HCW}}(t, s)B_{\text{HCW}}U(s)ds, \quad (\text{I.1})$$

avec :

$$\Phi_{\text{HCW}}(t_b, t_a) = e^{A_{\text{HCW}}(t_b - t_a)}. \quad (\text{I.2})$$

Puisque l'expression de A_{HCW} est donné par :

$$A_{\text{HCW}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.3})$$

où n le mouvement moyen du satellite sur son orbite, la matrice de transition est exprimée

selon :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{HCW}}(t_b, t_a) &= e^{A_{\text{HCW}}(t_b - t_a)}, \\ &= \begin{bmatrix} 4 - 3 \cos(n(t_b - t_a)) & 0 & 0 \\ 6(\sin(n(t_b - t_a)) - n(t_b - t_a)) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n(t_b - t_a)) \\ 3n \sin(n(t_b - t_a)) & 0 & 0 \\ 6(\cos(n(t_b - t_a)) - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n \sin(n(t_b - t_a)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin(n(t_b - t_a))}{n} & \frac{2(1 - \cos(n(t_b - t_a)))}{n} & 0 \\ \frac{2(\cos(n(t_b - t_a)) - 1)}{n} & \frac{4 \sin(n(t_b - t_a)) - 3n(t_b - t_a)}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin(n(t_b - t_a))}{n} \\ \cos(n(t_b - t_a)) & 2 \sin(n(t_b - t_a)) & 0 \\ -2 \sin(n(t_b - t_a)) & -3 + 4 \cos(n(t_b - t_a)) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n(t_b - t_a)) \end{bmatrix}.$$

Considérons le découpage de l'intervalle de résolution décrit par l'équation (4.2). L'intégration formelle de la dynamique se réécrit alors :

$$X(t) = \Phi_{\text{HCW}}(t, t_0)X(t_0) + \sum_{i=1}^{N_t} \Phi_{\text{HCW}}(t, \tau_i) \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi_{\text{HCW}}(\tau_i, s) ds \right) B_{\text{HCW}} U_i \quad (\text{I.5})$$

où N_t est l'entier tel que $\tau_{N_t} \leq t < \tau_{N_t+1}$ et $U(\tau_i) = U_i$. La matrice constante B_{HCW} a pu être sortie de l'intégrale. Évaluer cette équation en chacun des τ_j permet d'écrire :

$$X(\tau_j) = X_j = \Phi_{\text{HCW}}(\tau_j, t_0)x(t_0) + \sum_{i=1}^j \Phi_{\text{HCW}}(\tau_j, \tau_i) \left(\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi_{\text{HCW}}(\tau_i, s) ds \right) B_{\text{HCW}} U_i \quad (\text{I.6})$$

Le second membre de l'équation (I.6) peut également être intégré analytiquement. En adoptant les notations :

$$\begin{cases} \chi_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \\ \chi_{j,i} = \tau_j - \tau_i, \\ \chi_{j,i-1} = \tau_j - \tau_{i-1}, \\ \chi_i^{(2)} = \tau_i^2 - \tau_{i-1}^2, \\ I_{j,i}(\Phi) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Phi(\tau_j, s) ds \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

il vient :

$$I_{j,i}(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{4n\chi_i + 3(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1}))}{n} & 0 & 0 \\ 3 \frac{2(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}) - n^2\tau_j\chi_i) + n^2\chi_i^{(2)}}{n} & \chi_i & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1})}{n} \\ 3(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})) & 0 & 0 \\ -6(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1}) + n\chi_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})) \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} \frac{\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})}{n^2} & \frac{2(n\chi_i + \sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1}))}{n^2} & 0 \\ -2 \frac{(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1}) + n\chi_i)}{n^2} & \frac{-6\tau_j n^2\chi_i + 8(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})) + 3n^2\chi_i^{(2)}}{2n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})}{n^2} \\ -\frac{\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1})}{n} & \frac{-2(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}))}{n} & 0 \\ 2 \frac{\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})}{n} & \frac{-4(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1})) - 3n\chi_i}{n} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j,i-1})}{n} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.8})$$

Alors :

$$I_{j,i}(\Phi) B_{\text{HCW}} = \frac{1}{n^2} \begin{bmatrix} \cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}) & 2(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i}) + n\chi_i) & 0 \\ -2(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i}) + n\chi_i) - \frac{1}{2}(8(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}) - 6n^2\tau_j\chi_i + 3n^2\chi_i^{(2)})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}) \\ -n(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i})) & 2n(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j-1,i})) & 0 \\ -2n(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j-1,i})) & -n(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i}) + 3n\chi_i) & 0 \\ 0 & 0 & -n(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i})) \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} -(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})) & -2(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i}) + n\chi_i) & 0 \\ 2(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i}) + n\chi_i) - \frac{1}{2}(8(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1}) - 6n^2\tau_j\chi_i + 3n^2\chi_i^{(2)})) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j,i-1})) \\ n(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i})) & -2n(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j-1,i})) & 0 \\ 2n(\cos(n\chi_{j,i}) - \cos(n\chi_{j-1,i})) & n(4(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i})) + 3n\chi_i) & 0 \\ 0 & 0 & n(\sin(n\chi_{j,i}) - \sin(n\chi_{j-1,i})) \end{bmatrix}. \quad (\text{I.9})$$

Avec la notation $\Phi_{j,0} = \Phi(\tau_j, t_0)$, l'équation (I.6) se réécrit plus simplement sous la forme :

$$\forall j = 0, \dots, N, \quad X_j = \Phi_{j,0} X_0 + U_{\max} \sum_{i=1}^j I_{j,i}(\Phi) B_{\text{HCW}} U_i, \quad (\text{I.10})$$

puis sous forme matricielle :

$$X = \mathfrak{b}_x X_0 + \mathfrak{B} \bar{U}, \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$\mathbf{b}_x = [\Phi_{0,0} \quad \Phi_{1,0} \quad \vdots \quad \Phi_{N,0}]^T, \quad (\text{I.12a})$$

$$\mathfrak{B} = U_{\max} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ I_{11}(\Phi)B_{\text{HCW}} & \mathbf{0}_{6 \times 6} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ I_{21}(\Phi)B_{\text{HCW}} & I_{22}(\Phi)B_{\text{HCW}} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_{N1}(\Phi)B_{\text{HCW}} & I_{N2}(\Phi)B_{\text{HCW}} & \dots & I_{NN}(\Phi)B_{\text{HCW}} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.12b})$$

Annexe J

Transformation entre les positions et vitesse cartésiennes relatives et les positions et vitesses géographiques relatives

Le problème de maintien à poste est formulé avec les paramètres de position géographiques relatifs par rapport à la position géographique du point de maintien à poste de référence, le rayon relatif Δr , la latitude relative $\Delta\varphi$ et la longitude relative $\Delta\lambda$, supposés petits. (r, φ, λ) désigne le rayon, la latitude et la longitude géographique absolu du satellite respectivement. Les contraintes de maintien à poste sont exprimées par :

$$\begin{cases} |\Delta\varphi| \leq \delta, \\ |\Delta\lambda| \leq \delta. \end{cases} \quad (\text{J.1})$$

Puisque les contraintes terminales de cycle court sont dérivées au moyen de la position et de la vitesse cartésiennes relatives dans la section 5.2, il est nécessaire de déterminer les relations entre les positions et vitesses dans le repère RTN et les positions et vitesses géographiques relatives. Les relations sont linéarisées en supposant que la position et la vitesse du satellite sont proches de la position et de la vitesse du point de référence.

r_{mp} le rayon du point géostationnaire de référence, λ_{mp} la longitude géographique de maintien à poste et $\varphi_{geo} = 0$ la latitude de maintien à poste.

Soient :

- $X_G = [x_G \ y_G \ z_G \ \dot{x}_G \ \dot{y}_G \ \dot{z}_G]^T_{\mathcal{R}_G}$ les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse du satellite dans le repère inertiel géocentrique,
- $\Delta X_G = [\Delta x_G \ \Delta y_G \ \Delta z_G \ \Delta \dot{x}_G \ \Delta \dot{y}_G \ \Delta \dot{z}_G]^T_{\mathcal{R}_G}$ les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse du satellite relativement à la position de maintien à poste dans le repère inertiel géocentrique,
- $X = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T_{\mathcal{R}_{OL}}$ les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse du satellite relativement à la position de maintien à poste dans le repère orbital local,
- $Y = [r \ \varphi \ \lambda \ \dot{r} \ \dot{\varphi} \ \dot{\lambda}]$ la position et la vitesse géographiques du satellite,

- $\Delta Y = [\Delta r \ \Delta \varphi \ \Delta \lambda \ \Delta \dot{r} \ \Delta \dot{\varphi} \ \Delta \dot{\lambda}]$ la position et la vitesse géographiques du satellite relatives à la position et à la vitesse géographique de maintien à poste,
- $Y_{mp} = [r_{mp} \ 0 \ \lambda_{mp} \ \dot{r}_{mp} \ 0 \ \dot{\lambda}_{mp}]$ la position et la vitesse géographiques de maintien à poste.

J.1 POSITION GÉOGRAPHIQUE

La transformation entre la position géographique et la position cartésienne dans le repère inertiel géocentrique est donnée par :

$$\begin{aligned} X_G &= f(Y), \\ \begin{cases} x = r \cos \varphi \cos(\lambda + \Theta(t)), \\ y = r \cos \varphi \sin(\lambda + \Theta(t)), \\ z = r \sin \varphi. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{J.2})$$

La transformation entre les positions relatives est alors donnée grâce à la jacobienne de la transformation f :

$$\Delta X_G = \left. \frac{\partial f(Y)}{\partial Y} \right|_{Y_G=Y_{mp}} \Delta Y, \quad (\text{J.3})$$

avec :

$$\frac{\partial f(Y)}{\partial Y} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos(\lambda + \Theta(t)) & -r \sin \varphi \cos(\lambda + \Theta(t)) & -r \cos \varphi \sin(\lambda + \Theta(t)) \\ \cos \varphi \sin(\lambda + \Theta(t)) & -r \sin \varphi \sin(\lambda + \Theta(t)) & r \cos \varphi \cos(\lambda + \Theta(t)) \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{J.4})$$

Cette matrice évaluée en Y_{mp} devient :

$$\left. \frac{\partial f(Y)}{\partial Y} \right|_{Y_G=Y_{mp}} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & -r_{mp} \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & r_{mp} \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ 0 & r_{mp} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{J.5})$$

La relation entre la position cartésienne relative exprimée dans le repère inertiel géocentrique et la position géographique relative est ainsi donnée par :

$$\begin{cases} \Delta x_G = \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \Delta r - r_{mp} \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \Delta \lambda, \\ \Delta y_G = \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \Delta r + r_{mp} \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \Delta \lambda, \\ \Delta z_G = r_{mp}, \end{cases} \quad (\text{J.6})$$

ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Delta x_G \\ \Delta y_G \\ \Delta z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & -\sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ r_{mp} \Delta \varphi \\ r_{mp} \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{J.7})$$

La position cartésienne relative exprimée dans le repère orbital local s'obtient par la rotation de la position cartésienne relative dans le repère inertiel géocentrique d'un angle

$\lambda + \Theta(t)$ et d'axe \vec{u}_{Z_G} (voir la figure J.1). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda + \Theta(t)) & 0 & \sin(\lambda + \Theta(t)) \\ -\sin(\lambda + \Theta(t)) & 0 & \cos(\lambda + \Theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & -\sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ \sin(\lambda_{mp} + \Theta(t)) & 0 & \cos(\lambda_{mp} + \Theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ r_{mp}\Delta\varphi \\ r_{mp}\Delta\lambda \end{bmatrix}, \quad (\text{J.8}) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\lambda - \lambda_{mp}) & 0 & \sin(\lambda - \lambda_{mp}) \\ -\sin(\lambda - \lambda_{mp}) & 0 & \cos(\lambda - \lambda_{mp}) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ r_{mp}\Delta\varphi \\ r_{mp}\Delta\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque le satellite reste au voisinage de sa position de maintien à poste, il est possible de supposer $\lambda \approx \lambda_{mp}$, puis $\cos(\lambda - \lambda_{mp}) \approx 1$ et $\sin(\lambda - \lambda_{mp}) \approx 0$. La transformation cherchée s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ r_{mp}\Delta\varphi \\ r_{mp}\Delta\lambda \end{bmatrix}, \quad (\text{J.9})$$

ou encore :

$$\begin{cases} x = \Delta r \\ y = r_{mp}\Delta\lambda \\ z = r_{mp}\Delta\varphi \end{cases}. \quad (\text{J.10})$$

J.2 VITESSE GÉOGRAPHIQUE

Comme indiqué sur la Figure J.1, $\mathcal{R}_G = (G, \vec{u}_{X_G}, \vec{u}_{Y_G}, \vec{u}_{Z_G})$ est le référentiel géocentrique inertiel d'origine G tel que défini dans [Vallado, 1997] par exemple, et $\mathcal{R}_{OL} = (H, \vec{u}_R, \vec{u}_T, \vec{u}_N)$ le repère orbital local RTN d'origine H . Soit M la position du satellite. La vitesse du satellite dans le référentiel RTN (vitesse relative) s'exprime alors sous la forme :

$$\vec{v}_{sat/\mathcal{R}_{OL}} = \left. \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_{OL}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} \quad (\text{J.11})$$

Soit :

$$\vec{v}_{sat/\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ \dot{z}_G \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}}, \quad (\text{J.12})$$

la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique inertiel exprimée dans le repère orbital

de rayon r_{mp} et à la vitesse angulaire :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_{OL}/\mathcal{R}_G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_G}, \quad (\text{J.15})$$

il vient :

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} - ny, \\ \dot{y}_G = r_{mp}n + \dot{y} + nx, \\ \dot{z}_G = \dot{z}. \end{cases} \quad (\text{J.16})$$

Avec les coordonnées géographiques r , λ et φ , le mouvement du satellite peut être décrit dans le référentiel géocentrique inertiel en utilisant des coordonnées sphériques et une base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\lambda, \vec{u}_\varphi)$ associée. La vitesse du satellite par rapport au référentiel géocentrique inertiel s'écrit alors :

$$\vec{v}_{sat/\mathcal{R}_G} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\lambda}\cos\varphi\vec{u}_\lambda \quad (\text{J.17})$$

Puisque les composantes de la vitesse sont développées à l'ordre 1 par rapport aux paramètres géographiques relatifs Δr , $\Delta\lambda$ et $\Delta\varphi$, il suffit de développer les vecteurs de la base sphérique à l'ordre 0 pour obtenir les vecteurs de base du repère orbital local \mathcal{R}_{OL} . On obtient alors :

$$\vec{u}_r = \begin{bmatrix} \cos\Delta\varphi\cos\Delta\lambda \\ \cos\Delta\varphi\sin\Delta\lambda \\ \sin\Delta\lambda \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} = \vec{u}_R \quad (\text{J.18a})$$

$$\vec{u}_\lambda = \begin{bmatrix} -\sin\Delta\lambda \\ \cos\Delta\lambda \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} = \vec{u}_T \quad (\text{J.18b})$$

$$\vec{u}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\Delta\varphi\cos\Delta\lambda \\ -\sin\Delta\varphi\sin\Delta\lambda \\ \cos\Delta\varphi \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{OL}} = \vec{u}_N \quad (\text{J.18c})$$

Il vient alors en développant les composantes du vecteur vitesse à l'ordre 1 :

$$\dot{x}_G = \dot{r} = \frac{d(r_{mp} + \Delta r)}{dt} = \frac{d\Delta r}{dt} \quad (\text{J.19a})$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_G &= r\dot{\lambda}\cos\varphi \\ &= (r_{mp} + \Delta r) \frac{d(\lambda_{mp} + \Theta(t) + \Delta\lambda)}{dt} \underbrace{\cos\Delta\varphi}_{\approx 1} \\ &\approx nr_{mp} + n\Delta r + r_{mp} \frac{d\Delta\lambda}{dt} \end{aligned} \quad (\text{J.19b})$$

$$\dot{z}_G = r\dot{\varphi} = (r_{mp} + \Delta r) \frac{d\Delta\varphi}{dt} \approx r_{mp} \frac{d\Delta\varphi}{dt}. \quad (\text{J.19c})$$

En identifiant les équations (J.16), (J.19a), (J.19b) et (J.19c), les relations à l'ordre 1 s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\Delta r}{dt} = \dot{x} - ny \\ r_{mp}n + n\Delta r + r_{mp} \frac{d\Delta\lambda}{dt} = r_{mp}n + \dot{y} + nx \\ r_{mp} \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \dot{z} \end{cases} \quad (\text{J.20})$$

J.3 RÉSUMÉ DE LA TRANSFORMATION LINÉARISÉE

Les transformations établies précédemment permettent d'écrire la transformation linéarisée :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{mp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{mp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -nr_{mp} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & r_{mp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta\lambda \\ \Delta\varphi \\ \frac{d\Delta r}{dt} \\ \frac{d\Delta\lambda}{dt} \\ \frac{d\Delta\varphi}{dt} \end{bmatrix} \quad (\text{J.21})$$

ainsi que la transformation inverse :

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta\lambda \\ \Delta\varphi \\ \frac{d\Delta r}{dt} \\ \frac{d\Delta\lambda}{dt} \\ \frac{d\Delta\varphi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_{mp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_{mp}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{r_{mp}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{mp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_{mp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (\text{J.22})$$

Annexe **K**

Discrétisation des contraintes terminales pour la résolution sur un horizon long

L'espace admissible défini par la contrainte hors-plan donnée par l'équation (5.34a) est un disque dans le plan $(z(t_j^c), \frac{\dot{z}}{n}(t_j^c))$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $r_{mp}\delta$. L'intervalle $[0, 2\pi]$ est découpé en $K_z \geq 3$ intervalles définis par les angles :

$$\theta_k = k \frac{2\pi}{K_z}, \quad k = 0, \dots, K_z - 1. \quad (\text{K.1})$$

Notons C_k , $k = 0, \dots, K_z - 1$, un point sur le cercle à la position angulaire θ_k et de coordonnées :

$$C_k = \begin{bmatrix} \delta r_{mp} \cos \theta_k \\ \delta r_{mp} \sin \theta_k \end{bmatrix}_{(z(t_j^c), \frac{\dot{z}}{n}(t_j^c))}. \quad (\text{K.2})$$

Le cercle définissant la frontière du disque admissible est approché par le polygone délimité par l'ensemble des droites \mathcal{D}_k de vecteur directeur $\overrightarrow{C_k C_{k+1}}$ avec $C_{K_z} = C_0$ et dont une équation paramétrique est donnée par :

$$\begin{aligned} (\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1})z_r(t_j^c) + (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \frac{\dot{z}_r}{n}(t_j^c) \\ + r_{mp}\delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_z} \right) = 0, \quad k = 0, \dots, K_z - 1. \end{aligned} \quad (\text{K.3})$$

En définissant les ensembles :

$$\mathcal{C}^e = \left\{ z_r(t_j^c), \dot{z}_r(t_j^c) \mid \frac{z_r^2(t_j^c)}{\epsilon^2} + \frac{\dot{z}_r^2(t_j^c)}{n^2 \epsilon^2} \leq 1 \right\}, \quad (\text{K.4a})$$

$$\mathcal{C}_{K_z}^e = \bigcap_{k=0}^{K_z-1} \left\{ z_r(t_j^c), \dot{z}_r(t_j^c) \mid (\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1})z_r(t_j^c) \right. \quad (\text{K.4b})$$

$$\left. + (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k) \frac{\dot{z}_r}{n}(t_j^c) + \epsilon \sin \left(\frac{2\pi}{K_z} \right) \geq 0 \right\}, \quad (\text{K.4c})$$

l'inclusion $\mathcal{C}_{K_z}^e \subset \mathcal{C}^e$ est vérifiée (voir la figure K.1).

Dans le cas où $K_z = 2$, le polygone admissible est réduit au segment $\dot{z}(t_j^c) = 0$. Ceci revient alors à imposer une contrainte de vitesse finale nulle en fin de cycle court (voir la figure K.1).

En termes de positions et de vitesses géographiques, ces contraintes s'écrivent sous la forme :

$$(\sin \theta_k - \sin \theta_{k+1})r_{mp}\varphi(t_j^c) + (\cos \theta_{k+1} - \cos \theta_k)\frac{r_{mp}\dot{\varphi}(t_j^c)}{n} + r_{sk}\delta \sin\left(\frac{2\pi}{K_z}\right) \geq 0, \quad (\text{K.5})$$

$$k = 1, \dots, K_z - 1.$$

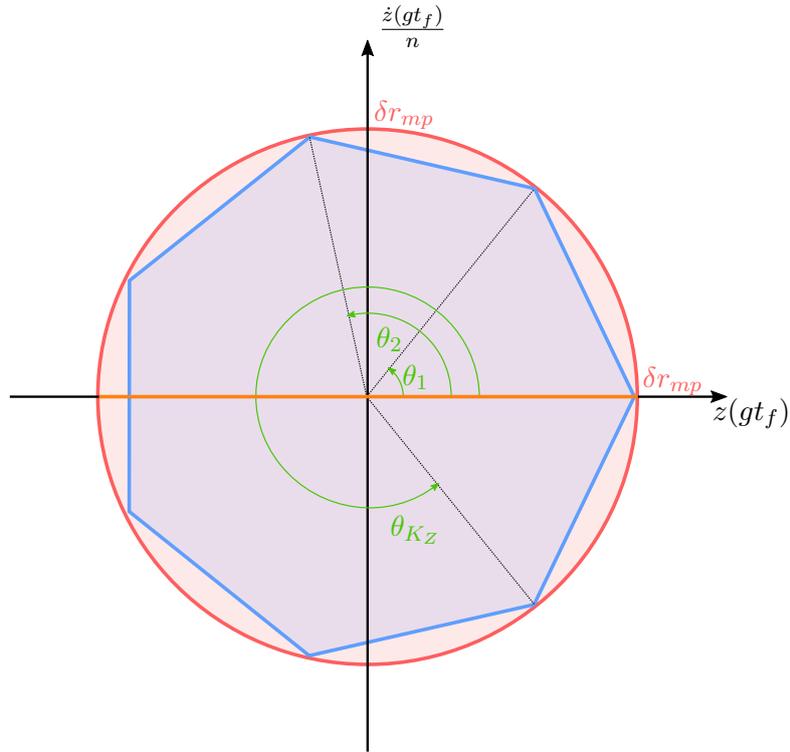


FIGURE K.1 – Ensembles \mathcal{C}^e (rouge) et $\mathcal{C}_{K_z}^e$ (bleu). Dans le cas où $K_z = 2$, l'espace admissible est le segment orange.

L'équation (5.34b) définit l'intérieur d'un demi cône positif dans l'espace (ξ_1, ξ_2, ξ_+) . Ce volume peut être approché par un ensemble de plans. Considérons le cercle de centre $(0, 0, 1)$ et de rayon 1 comme génératrice de ce cône. De la même façon que précédemment, l'intervalle $[0, 2\pi]$ est découpé en $K_{xy}^+ \geq 3$ intervalles définis par les angles :

$$\nu_k^+ = k \frac{2\pi}{K_{xy}^+}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^+ - 1. \quad (\text{K.6})$$

Soient des points C_k sur ce cercle dont les coordonnées sont donc données par :

$$C_k = \begin{bmatrix} \cos \nu_k^+ \\ \sin \nu_k^+ \\ 1 \end{bmatrix}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_+)}. \quad (\text{K.7})$$

Le demi-cône positif défini par l'équation (5.34b) est approché par le polytope délimité par l'ensemble de plans \mathcal{P}_k passant par les points $(0, 0, 0)$, C_k et C_{k+1} avec $C_{K_{xy}^+} = C_0$. La contrainte conique est alors transformée en un ensemble de contraintes linéaires sous la forme :

$$(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+) \xi_1 + (\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+) \xi_2 + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \xi_+ \geq 0. \quad (\text{K.8})$$

En définissant les ensembles :

$$\mathcal{C}^{o+} = \left\{ \xi_1(t_j^c), \xi_2(t_j^c), \xi_+(t_j^c) \mid \xi_3^+(t_j^c) \geq 0 \text{ et } \xi_1^2(t_j^c) + \xi_2^2(t_j^c) - \xi_+^2(t_j^c) \leq 0 \right\}, \quad (\text{K.9a})$$

$$\mathcal{C}_{K_{xy}^+}^{o+} = \bigcap_{k=0}^{K_{xy}^+-1} \left\{ \xi_1(t_j^c), \xi_2(t_j^c), \xi_+(t_j^c) \mid \right. \quad (\text{K.9b})$$

$$\left. (\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+) \xi_1(t_j^c) + (\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+) \xi_2(t_j^c) + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \xi_+(t_j^c) \geq 0 \right\}, \quad (\text{K.9c})$$

l'inclusion $\mathcal{C}_{K_{xy}^+}^{o+} \subset \mathcal{C}^{o+}$ est vérifiée (voir la figure K.2).

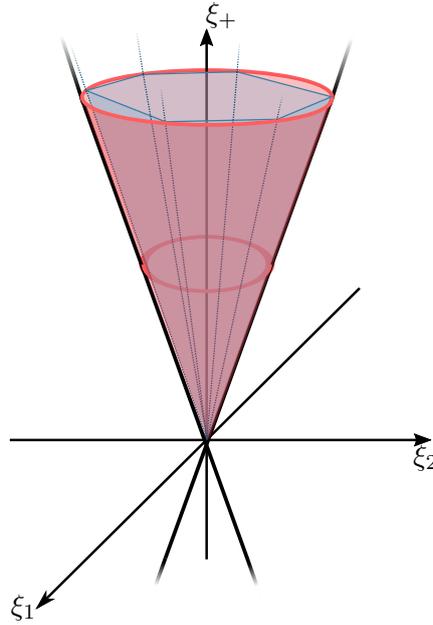


FIGURE K.2 – Ensembles \mathcal{C}^{+0} (rouge) et $\mathcal{C}_{K_{xy}^+}^{+0}$ (bleu).

En termes de positions et de vitesses géographiques, ces contraintes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\cos \nu^+ k + 1 - \cos \nu_k^+ \right) \left[10r(t_j^c) + \frac{4r_{mp}}{n} \dot{\lambda}(t_j^c) \right] + \left(\sin \nu_k^+ - \sin \phi_{k+1} \right) \left[\frac{2}{n} \dot{r}(t_j^c) - 2r_{mp} \lambda(t_j^c) \right] \\ & + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \left[\epsilon + 9r(t_j^c) n t_j^c - 3r_{mp} \lambda(t_j^c) + \frac{2\dot{r}(t_j^c)}{n} + 3t_j^c r_{mp} \dot{\lambda}(t_j^c) \right] \geq 0. \quad (\text{K.10}) \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left[10 \left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+ \right) + 9nt_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] r(t_j^c) \\
& - r_{mp} \left[2 \left(\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ \right) + 3 \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \lambda(t_j^c) \\
& + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^+ - \sin \nu_{k+1}^+ + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\
& + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^+ - \cos \nu_k^+ \right) + 3t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\
& + r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^+} \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{K.11}$$

Le même processus peut être utilisé pour approcher le demi-cône négatif de l'espace (ξ_1, ξ_2, ξ_-) défini par la contrainte finale (5.34c). Considérons le cercle de centre $(0, 0, -1)$ et de rayon 1 comme génératrice de ce cône. De la même façon que précédemment, l'intervalle $[0, 2\pi]$ est découpé en $K_{xy}^- \geq 3$ intervalles définis par les angles :

$$\nu_k^- = k \frac{2\pi}{K_{xy}^-}, \quad k = 0, \dots, K_{xy}^- - 1. \tag{K.12}$$

Soient des points C_k sur ce cercle ayant pour coordonnées :

$$C_k = \begin{bmatrix} \cos \nu_k^- \\ \sin \nu_k^- \\ -1 \end{bmatrix}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_-)}. \tag{K.13}$$

Le demi cône positif négatif par l'équation (5.34b) est approché par l'ensemble de plans \mathcal{P}_k passant par les points $(0, 0, 0)$, C_k et C_{k+1} avec $C_{K_{xy}^-} = C_0$. La contrainte conique est alors transformée en un ensemble de contraintes linéaires sous la forme :

$$(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^-) \xi_1 + (\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^-) \xi_2 + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \xi_- \leq 0. \tag{K.14}$$

En définissant les ensembles :

$$\mathcal{C}^{o-} = \left\{ \xi_1(t_j^c), \xi_2(t_j^c), \xi_-(t_j^c) \mid \xi_-(t_j^c) \geq 0 \text{ et } \xi_1^2(t_j^c) + \xi_2^2(t_j^c) - \xi_-^2(t_j^c) \leq 0 \right\}, \tag{K.15a}$$

$$\mathcal{C}_{K_{xy}^-}^{o-} = \bigcap_{k=0}^{K_{xy}^- - 1} \left\{ \xi_1(t_j^c), \xi_2(t_j^c), \xi_-(t_j^c) \mid \right. \tag{K.15b}$$

$$\left. (\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^-) \xi_1(t_j^c) + (\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^-) \xi_2(t_j^c) + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}^-} \right) \xi_-(t_j^c) \leq 0 \right\}, \tag{K.15c}$$

l'inclusion $\mathcal{C}_{K_{xy}^-}^{o-} \subset \mathcal{C}^{o-}$ est vérifiée.

En termes de positions et de vitesses géographiques, ces contraintes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) \left[10r(t_j^c) + \frac{4r_{mp}}{n} \dot{\lambda}(t_j^c) \right] + \left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- \right) \left[\frac{2}{n} \dot{r}(t_j^c) - 2r_{mp} \lambda(t_j^c) \right] \\ & + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \left[-r_{mp} \delta + 9r(t_j^c) n t_j^c - 3r_{mp} \lambda(t_j^c) + \frac{2\dot{r}(t_j^c)}{n} + 3t_j^c r_{mp} \dot{\lambda}(t_j^c) \right] \leq 0. \quad (\text{K.16}) \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} & \left[10 \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 9n t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \right] r(t_j^c) \\ & - r_{mp} \left[2 \left(\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- \right) + 3 \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \right] \lambda(t_j^c) \\ & + \frac{2}{n} \left[\sin \nu_k^- - \sin \nu_{k+1}^- + \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \right] \dot{r}(t_j^c) \\ & + r_{mp} \left[\frac{4}{n} \left(\cos \nu_{k+1}^- - \cos \nu_k^- \right) + 3t_j^c \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \right] \dot{\lambda}(t_j^c) \\ & - r_{mp} \delta \sin \left(\frac{2\pi}{K_{xy}} \right) \leq 0. \quad (\text{K.17}) \end{aligned}$$

Bibliographie

*Retenez-bien ceci : Livre = connaissance =
pouvoir = énergie = matière = masse. Une bonne
bibliothèque n'est donc qu'un trou noir cultivé.*

Terry Pratchett, *Les Annales du Disque Monde*,
trad. Patrick Couton

- [Alfriend et al., 2009] Alfriend, K., Vadali, S. R., Gurfil, P., How, J., and Breger, L. (2009). *Spacecraft formation flying : Dynamics, control and navigation*, volume 2. Butterworth-Heinemann.
- [Antsaklis, 2003] Antsaklis, P. J. (2003). *Linear Systems*. Cambridge Aerospace Series. Birkhäuser, Boston, {M}assachusetts, {USA}.
- [Anzel, 1988] Anzel, B. M. (1988). Controlling a stationary orbit using electric propulsion. In *DGLR/AIAA/JSASS 20th International Electric propulsion Conference*, pages 306–314, Garmisch-Partenkirchen, Germany.
- [Anzel, 1995] Anzel, B. M. (1995). Method and apparatus for a Satellite Station Keeping.
- [Arantes et al., 2018] Arantes, P., Brehard, F., and Gazzino, C. (2018). Validated Semi-Analytical Transition Matrix for Linearized Relative Spacecraft Dynamics via Chebyshev Polynomials. In *AIAA Science and Technology Forum and Exposition 2018*, Gaylord Palms, Kissimmee, Florida.
- [Athans et al., 1963] Athans, M., Falb, P. L., and Lacos, R. T. (1963). Time-, Fuel-, and Energy-Optimal Control of Nonlinear Norm-Invariant Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(3) :196–202.
- [Athans and Falb, 1966] Athans, M. and Falb, P. M. (1966). *Optimal Control : an Introduction to the Theory and its Application*.
- [Bainov and Simeonov, 1993] Bainov, D. and Simeonov, P. (1993). *Impulsive differential equations : periodic solutions and applications*, volume 66. CRC Press.
- [Battin, 1999] Battin, R. H. (1999). *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Education. AIAA.

- [Bertrand and Epenoy, 2002] Bertrand, R. and Epenoy, R. (2002). New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - Numerical results and statistical interpretation. *Optimal Control Applications and Methods*, 23(4) :171–197.
- [Betts, 1998] Betts, J. T. (1998). Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 21(2) :193–207.
- [Betts, 2000] Betts, J. T. (2000). Very Low Thrust Trajectory Optimization Using a Direct SQP Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 120 :27–40.
- [Betts, 2010] Betts, J. T. (2010). *Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming*. SIAM - Advances in Design and Control, second edition.
- [Betts and Huffman, 1998] Betts, J. T. and Huffman, W. P. (1998). Mesh refinement in direct transcription methods for optimal control. *Optimal Control Applications and Methods*, 19(1) :1–21.
- [Bonnans and Hermant, 2009] Bonnans, J. F. and Hermant, A. (2009). Second-order analysis for optimal control problems with pure state constraints and mixed control-state constraints. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Nonlinear Analysis*, 26(2) :561–598.
- [Bonnard et al., 2003] Bonnard, B., Faubourg, L., Launay, G., and Trélat, E. (2003). Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem. *Journal of Dynamics and Control Systems*, 9(2) :155–199.
- [Bonnard et al., 2005] Bonnard, B., Faubourg, L., and Trélat, E. (2005). *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*. Springer s edition.
- [Bréhard et al., 2016] Bréhard, F., Brisebarre, N., and Joldes, M. (2016). A New Efficient Algorithm for Computing Validated Chebyshev Approximations Solutions of Linear Differential Equations. In *17th International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Verified Numerics, SCAN*, pages 41 – 43, Uppsala, Sweden.
- [Bryson et al., 1963] Bryson, A. E., Denham, W. F., and Dreyfus, S. E. (1963). Optimal programming problems with inequality constraints. *AIAA journal*, 1(11) :2544–2550.
- [Byrd et al., 2006] Byrd, R. H., Hribar, M., and Nocedal, J. (2006). An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9(4) :877–900.
- [Camacho and Bordons, 2012] Camacho, E. F. and Bordons, C. (2012). *Model predictive control in the process industry*. Springer Science & Business Media.
- [Campan et al., 1995] Campan, G., Alby, F., and Gautier, H. (1995). Les techniques de maintien à poste de satellites géostationnaires. In *Mécanique Spatiale*, chapter 15, pages 983–1085. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, cnes edition.
- [Campan and Brousse, 1994] Campan, G. and Brousse, P. (1994). ORANGE : Orbital analytical model for geosynchronous satellite. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 16(16) :561–572.
- [Carter, 1987] Carter, T. E. (1987). Singular fuel-optimal space trajectories based on linearization about a point in circular orbit. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 54(3) :447–470.

- [Cefola, 1972] Cefola, P. J. (1972). Equinoctial orbit elements - Application to artificial satellite orbits. *Astrodynamics Conference*.
- [Chao and Bernstein, 1994] Chao, C. and Bernstein, H. (1994). Onboard stationkeeping of geosynchronous satellite using a global positioning system receiver. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(4) :778–786.
- [Chen and Shaw, 1982] Chen, C. C. and Shaw, L. (1982). On receding horizon feedback control. *Automatica*, 18(3) :349–352.
- [Claeys, 2013] Claeys, M. (2013). *Mesures d’occupation et relaxations semi-définies pour la commande optimale*. PhD thesis.
- [Clarke and Scattolini, 1991] Clarke, D. W. and Scattolini, R. (1991). Constrained receding-horizon predictive control. In *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, volume 138, pages 347–354.
- [Clohessy and Wiltshire, 1960] Clohessy, W. H. and Wiltshire, R. S. (1960). Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences*, 27(9) :653–658.
- [CNES, 1995] CNES (1995). *Mécanique Spatiale, Tome II*. Toulouse, France, cepadues-e edition.
- [Conway, 2010] Conway, B. A. (2010). *Spacecraft trajectory optimization*. Number 29.
- [Conway and Prussing, 1993] Conway, B. A. and Prussing, J. E. (1993). *Orbital Mechanics*. Oxford University Press, USA.
- [Culioli, 2012] Culioli, J.-C. (2012). *Introduction {à} l’optimisation*. Ellipses.
- [Driscoll et al., 2014] Driscoll, T., Hale, N., and Trefethen, L. (2014). *Chebfun Guide*. Pafnuty Publications, Oxford.
- [e Souza, 1987] e Souza, M. L. D. O. (1987). Exactly Solving the Weighted Time/Fuel Optimal Control of an Undamped Harmonic Oscillator. *Journal of Guidance*, 11(6) :488–494.
- [Eckstein, 1978] Eckstein, M. C. (1978). Optimal Station Keeping by Electric Propulsion With Thrust Operation Constraints. *Celestial Mechanics*, 21 :129–147.
- [Eckstein and Hechler, 1981] Eckstein, M. C. and Hechler, F. (1981). Station acquisition and Station-Keeping with Low Thrust Systems. In *International Symposium Spacecraft Flight Dynamics*, Darmstadt, Germany.
- [Eckstein et al., 1981] Eckstein, M. C., Leibold, A., and Hechler, F. (1981). Optimal autonomous station keeping of geostationary satellites. In *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*.
- [Elnagar et al., 1995] Elnagar, G., Kazemi, M. A., and Razzaghi, M. (1995). The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(10) :1793–1796.
- [Emma and Pernicka, 2003] Emma, B. P. and Pernicka, H. J. (2003). Algorithm for Auto-

- nomous Longitude and Eccentricity Control for Geostationary Spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(3) :483–490.
- [Enright and Conway, 1991] Enright, P. J. and Conway, B. A. (1991). Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(5) :981–985.
- [Enright and Conway, 1992] Enright, P. J. and Conway, B. A. (1992). Discrete Approximations to optimal Trajectories Using Direct Transcription and Nonlinear Programming. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 15(4) :994–1002.
- [Gao and Baoyin, 2013] Gao, Z. and Baoyin, H. (2013). Optimization, Simulation, and Control. 76 :243–256.
- [Gartrell, 1981] Gartrell, C. F. (1981). Simultaneous eccentricity and drift rate control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 4(3) :310–315.
- [Gazzino et al., 2017a] Gazzino, C., Arzelier, D., Cerri, L., Losa, D., Louembet, C., and Pittet, C. (2017a). A Minimum-Fuel Fixed-Time Low-Thrust Rendezvous Solved with the Switching Systems Theory. In *31st ISTS, 26th ISSFD and 8th NSAT*, Matsuyama, Japan.
- [Gazzino et al., 2017b] Gazzino, C., Arzelier, D., Cerri, L., Losa, D., Louembet, C., and Pittet, C. (2017b). A Minimum-Fuel Fixed-Time Low-Thrust Rendezvous Solved with the Switching Systems Theory. *Transaction of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, 14(ists31).
- [Gazzino et al., 2017c] Gazzino, C., Arzelier, D., Cerri, L., Losa, D., Louembet, C., and Pittet, C. (2017c). Solving the Minimum-Fuel Low-Thrust Geostationary Station Keeping Problem via the Switching Systems Theory. In *European Conference for Aeronautics and AeroSpace Sciences*, Milan, Italy.
- [Gazzino et al., 2016] Gazzino, C., Arzelier, D., Losa, D., Louembet, C., Pittet, C., and Cerri, L. (2016). Optimal Control for Minimum-Fuel Geostationary Station Keeping of Satellites Equipped with Electric Propulsion. In *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace - ACA 2016*, Sherbrooke, Canada.
- [Gazzino et al., 2017d] Gazzino, C., Louembet, C., Arzelier, D., Jozefowicz, N., Losa, D., Pittet, C., and Cerri, L. (2017d). Integer Programming for Optimal Control of Geostationary Station Keeping of Low-Thrust Satellites. In *IFAC 2017 World Congress*, Toulouse, France.
- [Goodwin et al., 2004] Goodwin, G. C., Sean, M. M., and Dona, J. A. D. (2004). *Constrained Control and Estimation — An Optimisation Approach*. Springer, communicat edition.
- [Gopinath and Srinivasamuthy, 2003] Gopinath, N. S. and Srinivasamuthy, K. N. (2003). Optimal low thrust orbit transfer from gto to geosynchronous orbit and stationkeeping using electric propulsion system. In *54th International Astronautical Congress of the International Astronautical Federation, the International Academy of Astronautics, and the International Institute of Space Law*, number October, pages 1–9, Bremen, Germany.
- [Grimm and Markl, 1997] Grimm, W. and Markl, A. (1997). Adjoint estimation from

- a direct multiple shooting method. *Journal of optimization theory and applications*, 92(2) :263–283.
- [Grüne and Pannek, 2011] Grüne, L. and Pannek, J. (2011). Nonlinear Model Predictive Control. pages 43–66.
- [Gu et al., 2010] Gu, Z., Rothberg, E., and Bixby, R. (2010). Gurobi 4.0.2. software.
- [Hannemann and Marquardt, 2010] Hannemann, R. and Marquardt, W. (2010). Combining Direct and Indirect Methods for Optimal Control – a Case Study. In *9th International Symposium on dynamics and control of Process Systems (DYCOPS)*, pages 767–772, Leuven, Belgium.
- [Hargraves and Paris, 1987] Hargraves, C. R. and Paris, S. W. (1987). Direct Trajectory Optimization using nonlinear programming and collocation.pdf. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10(4) :338–342.
- [Hartl et al., 1995] Hartl, R. F., Sethi, S. P., and Vickson, R. G. (1995). A survey of the Maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 37(2) :181–218.
- [Hintz, 2008] Hintz, G. R. (2008). Survey of Orbit Element Sets. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(3) :785–790.
- [Hull, 1997] Hull, D. G. (1997). Conversion of optimal control problems into parameter optimization problems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 20(1) :57–60.
- [Hull, 2003] Hull, D. G. (2003). *Optimal Control Theory for Applications*. Mechanical Engineering. Springer-Verlag.
- [Jahn and Choueiri, 2002] Jahn, R. G. and Choueiri, E. Y. (2002). Electric Propulsion. *Encyclopedia of Physical Science and Technology*, 5 :125–141.
- [Kamel and Wagner, 1981] Kamel, A. A. and Wagner, C. A. (1981). On the orbital eccentricity control of synchronous satellites. In *AIAA, Astrodynamics Specialist Conference*.
- [Kameswaran and Biegler, 2008] Kameswaran, S. and Biegler, L. T. (2008). Convergence rates for direct transcription of optimal control problems using collocation at Radau points. *Computational Optimization and Applications*, 41(1) :81–126.
- [Kelly et al., 1994] Kelly, T. J., White, L. K., and Gamble, D. W. (1994). Stationkeeping of geostationary satellites with simultaneous eccentricity and longitude control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 17(4) :769–777.
- [Kirk, 2004] Kirk, D. E. (2004). *Optimal control theory : An introduction*. Mineola, NY, dover publ edition.
- [Koppel, 1999] Koppel, C. R. (1999). Advantages of a continuous thrust strategy from a geosynchronous transfer orbit, using high specific impulse thrusters. In *14th International Symposium on Space Flight Dynamics–ISSFD XIV February*, pages 8–12.
- [Larson and Wertz, 1992] Larson, W. J. and Wertz, J. R. (1992). Space mission analysis and design. Technical report, Microcosm, Inc., Torrance, CA (US).

- [Liberzon, 2012] Liberzon, D. (2012). *Calculus of variations and optimal control theory : a concise introduction*. Princeton University Press.
- [Löfberg, 2004] Löfberg, J. (2004). YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- [Losa, 2007] Losa, D. (2007). *High vs low thrust station keeping maneuver planning for geostationary satellites*. PhD thesis, Ecole Nationale des Mines de Paris.
- [Losa et al., 2005] Losa, D., Lovera, M., Draï, R., Dargent, T., and Amalric, J. (2005). Electric Station Keeping of Geostationary Satellites : a Differential Inclusion Approach. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7484–7489.
- [Louembet et al., 2009] Louembet, C., Cazaurang, F., Zolghadri, A., Charbonnel, C., and Pittet, C. (2009). Path planning for satellite slew manoeuvres : a combined flatness and collocation-based approach. *IET control theory & applications*, 3(4) :481–491.
- [Lyon, 2004] Lyon, R. H. (2004). *Geosynchronous Orbit Determination Using Space Surveillance Network Observations and Improved Radiative Force Modeling*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [Lyszyk and Garnero, 2004] Lyszyk, M. and Garnero, P. (2004). Electric propulsion system on@ bus platform. In *4th International Spacecraft Propulsion Conference*, volume 555.
- [Marcuccio et al., 1997] Marcuccio, S., Genovese, A., and Andrenucci, M. (1997). FEEP microthruster technology status and potential applications. *International Astronautical Federation*.
- [Martinez-Sanchez and Pollard, 1998a] Martinez-Sanchez, M. and Pollard, J. E. (1998a). Spacecraft electric propulsion-an overview. *Journal of Propulsion and Power*, 14(5) :688–699.
- [Martinez-Sanchez and Pollard, 1998b] Martinez-Sanchez, M. and Pollard, J. E. (1998b). Spacecraft Electric Propulsion — An Overview. *Journal of Propulsion and Power*, 14(5) :688–699.
- [Maurer, 1977] Maurer, H. (1977). On Optimal Control Problems with Bounded State Variables and Control Appearing Linearly. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15(3) :345–362.
- [Mayne et al., 2000] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., and Scokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36(6) :789–814.
- [Mazal et al., 2014] Mazal, L., Mingotti, G., and Gurfil, P. (2014). Optimal On-Off Cooperative Maneuvers for Long-term Satellite Cluster Flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 37(2) :391–402.
- [McClain, 1977] McClain, W. D. (1977). *A Recursively Formulated First-Order Semianalytic Artificial Satellite Theory Based on the Generalized Method of Averaging*. Computer Sciences Corporation CSC/TR-77/6010, volume 1 edition.
- [Milam et al., 2005] Milam, M. B., Franz, R., Hauser, J. E., and Murray, R. M. (2005).

- Receding horizon control of vectored thrust flight experiment. In *IEE Proceedings of Control Theory Applications*, volume 152.
- [Naidu, 2002] Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. Crc press edition.
- [Neckel et al., 2003] Neckel, T., Talbot, C., and Petit, N. (2003). Collocation and inversion for a reentry optimal control problem. In *5th International Conference on Launcher Technology*.
- [Petit et al., 2001] Petit, N., Milam, M. B., and Murray, R. M. (2001). Inversion based constrained trajectory optimization. *Proc. of the 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, pages 1–6.
- [Pietz, 2003] Pietz, J. A. (2003). *Pseudospectral Collocation Methods for the Direct Transcription of Optimal Control Problems b*. PhD thesis, RICE Univerity.
- [Pontryagin et al., 1962] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V., and Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. (Translated from Russian), New-York, wiley-inte edition.
- [Rao, 2009] Rao, A. V. (2009). A Survey of Numerical Methods for Optimal Control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 135(1) :497–528.
- [Romero and Gambi, 2004] Romero, P. and Gambi, J. M. (2004). Optimal control in the east/west station-keeping manoeuvres for geostationary satellites. *Aerospace Science and Technology*, 8(8) :729–734.
- [Ross, 2015] Ross, I. M. (2015). *A primer on Pontryagin's principle in optimal control*. Collegiate Publishers.
- [Scaramozzino et al., 2015] Scaramozzino, S., Listmann, K. D., and Gebhardt, J. (2015). Time-optimal control of harmonic oscillators at resonance. *2015 European Control Conference, ECC 2015*, pages 1955–1961.
- [Schättler, 2014] Schättler, H. (2014). *Encyclopedia of Systems and Control*, chapter Optimal Co, pages 1–10. Springer London, London.
- [Scheel and Conway, 1994] Scheel, W. A. and Conway, B. A. (1994). Optimization of Very-Low-Thrust, Many-Revolution Spacecraft Trajectories. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 17(6) :1185–1192.
- [Serra et al., 2014] Serra, R., Arzelier, D., Rondepierre, A., and Calvet, J.-L. (2014). Analytical optimal solutions of impulsive out-of-plane rendezvous around elliptic orbits. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 19(2) :2231–2236.
- [Shrivastava, 1978] Shrivastava, S. K. (1978). Orbital Perturbations and Stationkeeping of Communication Satellites. *Journal of Spacecraft*, 15(2).
- [Sidi, 1997] Sidi, M. J. (1997). *Spacecraft Dynamics and Control*. Cambridge University Press.
- [Soop, 1994] Soop, E. M. (1994). *Handbook of Geostationary Orbits*. Kluwer Academic Publishers Group.
- [Tang and Conway, 1995] Tang, S. and Conway, B. A. (1995). Optimization of Low-Thrust

- Interplanetary Trajectories Using Collocation and Nonlinear Programming. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 18(3) :3–8.
- [Trélat, 2012] Trélat, E. (2012). Optimal Control and Applications to Aerospace : Some Results and Challenges. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(3) :713–758.
- [Tschauner, 1967] Tschauner, J. (1967). Elliptic orbit rendezvous. *AIAA journal*, 5(6) :1110–1113.
- [Vallado, 1997] Vallado, D. A. (1997). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. Space Technology Series.
- [Valorge, 1995] Valorge, C. (1995). Les perturbations d’orbite. In *Mécanique Spatiale, Tome I*, chapter 5. Cépaduès-e edition.
- [Vinter, 2010] Vinter, R. (2010). *Optimal Control*. Springer Science & Business Media.
- [von Stryk, 1993] von Stryk, O. (1993). Numerical solution of optimal control Problems by Direct Collocation. *International Series of Numerical Mathematics*, Optimal Co(111) :129 – 143.
- [von Stryk and Bulirsch, 1992] von Stryk, O. and Bulirsch, R. (1992). Direct and indirect methods for trajectory optimization. *Annals of Operations Research*, 37(1) :357–373.
- [Xu and Antsaklis, 2004] Xu, X. and Antsaklis, P. J. (2004). Optimal control of switched systems based on parameterization of the switching instants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(1) :2–16.
- [Zarrouati, 1987] Zarrouati, O. (1987). *Trajectoires spatiales*. Cépaduès-e edition.