Contrôle robuste des systèmes variant dans le temps

Thomas Conord

▶ **To cite this version:**

Thomas Conord. Contrôle robuste des systèmes variant dans le temps : Application au contrôle d'attitude modélisée par quaternion. Automatique. UPS Toulouse - Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2021. Français. NNT : 2021TOU30081 . tel-03448843v1

HAL Id: tel-03448843

https://laas.hal.science/tel-03448843v1

Submitted on 21 Oct 2021 (v1), last revised 25 Nov 2021 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *20/09/2021* **par :**

Thomas CONORD

Contrôle robuste des systèmes variant dans le temps

—

Application au contrôle d'attitude modélisée par quaternion

JURY

Isabelle FANTONI	DR LS2N Nantes	Rapporteure
Edouard LAROCHE	PU ICube Strasbourg	Rapporteur
Laurentiu HETEL	CR CRIStAL Lille	Examinateur
Yann LABIT	PU UPS Toulouse	Examinateur
Dimitri PEAUCELLE	DR LAAS-CNRS	Directeur de Thèse

École doctorale et spécialité :
EDSYS : Automatique 4200046

Unité de Recherche :
Equipe MAC, LAAS-CNRS (UPR 8001)

Directeur de Thèse :
Dimitri PEAUCELLE

Rapporteurs :
Isabelle FANTONI, Edouard LAROCHE

Remerciements

Diplômé d'une école d'ingénieur en France et d'un double diplôme de Master en Automatique aux Etats-Unis en 2005, après un parcours de 13 années dans l'industrie sur des systèmes de pilotage automatique d'avions commerciaux, je commence par remercier mon directeur de thèse M. Dimitri PEAUCELLE qui osa me recruter en thèse en 2018 malgré tout ce temps loin de la théorie, et pour son suivi pendant ces trois années de recherche.

Je remercie ensuite ma famille et amis au sens large qui ont été présents pendant ces trois années, et en particulier ma compagne sans qui je n'aurais peut-être pas dépassé l'étape du dossier administratif.

Je remercie aussi les membres du jury qui ont examiné en détail mon travail, pour leurs retours et leurs nombreuses questions lors de la soutenance.

Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont amené à réaliser ce parcours depuis l'entrée en classe préparatoire, étape décisive d'entrée dans les sciences, avec une attention particulière pour mon directeur de recherche de Master de l'Université de Buffalo, Pr. Tarunraj SINGH, qui m'a soutenu dès le départ pour réaliser cette thèse.

Ce parcours moins conventionnel m'a donné l'occasion de revenir aux théories mathématiques appliquées au contrôle des systèmes dynamiques avec une affinité toujours intacte.

J'ai particulièrement apprécié la richesse du contexte d'un laboratoire du CNRS où thèses, séminaires, conférences sont généralement diffusés à l'ensemble des chercheurs, permettant ainsi d'élargir sa propre culture scientifique au sens large.

Je remercie notamment le groupe éthique du LAAS d'ouvrir un espace d'échange autour des débats d'actualité concernant l'Intelligence Artificielle, les Technosciences, à l'heure où la société vit pleinement sa transition numérique, et pour le temps qu'ils m'ont accordé afin que je leur présente mon retour d'expérience et mon analyse.

Résumé

Cette thèse de doctorat apporte deux contributions au champ de l'Automatique : la première aborde le contrôle d'attitude d'un objet rigide quelconque complètement commandé tournant dans l'espace ; la seconde concerne des méthodes d'analyse et de synthèse de contrôleur pour les systèmes Linéaires Variant dans le Temps.

La première contribution développe en détail la modélisation du suivi d'une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable par un objet rigide en rotation, en utilisant le quaternion unitaire pour modéliser son attitude. Le mouvement de rotation est intrinsèquement non linéaire (trigonométrique), avec des singularités liées à sa périodicité, impliquant la non existence de contrôleur linéaire invariant dans le temps en mesure de rendre le système en boucle fermée globalement stable. En prenant en compte ces spécificités, la synthèse de contrôleurs non linéaires permettant d'obtenir une stabilité asymptotique *presque* globale de la boucle fermée est ensuite développée. Des perspectives pour améliorer ce résultat avec des intégrateurs pour annuler les erreurs statiques et de traînage sont finalement proposées.

De la question du réglage de ces contrôleurs non linéaires pour respecter simultanément plusieurs critères de performances, découle la seconde contribution : l'opportunité d'étendre aux systèmes Linéaires Variant dans le Temps les notions de placement de pôles et d'analyse de performances entrées/sorties des systèmes Linéaires Invariant dans le Temps. La méthode proposée concerne les systèmes aux paramètres variant dans le temps bornés dans un ensemble convexe décrit par un polytope. Elle permet d'écrire les problèmes d'analyse de performances sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles *Différentielles*, puis de les convertir en Inégalités Linéaires Matricielles pour la synthèse de contrôleurs par retour d'état statique. Pour ce dernier résultat, deux formulations sont proposées : la première avec un certificat de Lyapunov commun à toutes les exigences ; la seconde avec l'ajout d'une S-variable permet de rechercher simultanément plusieurs certificats de Lyapunov, un pour chaque exigence de performance du problème multi-objectif.

Ce résultat de synthèse est finalement appliqué au problème du contrôle d'attitude.

Mots clés : Systèmes variant dans le temps, systèmes non-linéaires, stabilité, performances, robustesse, LMI, S-variable, attitude, quaternion.

Abstract

This PhD thesis brings two contributions to the field of System Control: the first one deals with the attitude control of a generic fully actuated rigid object rotating in space; the second one concerns methods of analysis and synthesis of controllers for Linear Time Varying systems.

The first contribution develops in detail the modeling of the tracking of a theoretically feasible attitude trajectory performed by this generic rotating object, using the unit quaternion to model the attitude. The rotational motion is intrinsically nonlinear (trigonometric), with singularities related to its periodicity, implying the non existence of a Linear Time Invariant controller able to make the closed loop system globally stable. By taking into account these specificities, the synthesis of nonlinear controllers enabling to obtain an *almost* global asymptotic stability of the closed loop system is then developed. Perspectives to improve this result with integrators to cancel out static and drag errors are finally proposed.

The question of tuning these non-linear controllers to simultaneously meet several performance criteria leads to the second contribution: the opportunity to extend to Linear Time Varying systems the notions of pole placement and input/output performances analysis of Linear Time Invariant systems. The proposed method concerns systems with time varying parameters bounded in a convex set described by a polytope. It allows to write the performance analysis problems in the form of *Differential* Linear Matrix Inequalities, then to convert them into Linear Matrix Inequalities for the static state feedback synthesis. For this last result, two formulations are proposed: the first one with a Lyapunov certificate common to all the requirements; the second one with an added S-variable which allows to simultaneously search for several Lyapunov certificates, one for each performance requirement of the multi-objective problem.

This synthesis result is eventually applied to the attitude control problem.

Keywords: Time-varying systems, non-linear systems, stability, performances, robust, LMI, S-Variable, attitude, quaternion.

Table des matières

Table des Figures **vii**

Notations **xiii**

1 Introduction **1**
1.1 Contrôle du mouvement d'un objet dans l'espace 1
1.2 Extension de résultats du contrôle robuste aux systèmes non linéaires 3
1.3 Résultats de la thèse 4

2 Préliminaires théoriques **7**
2.1 Modélisation des systèmes dynamiques 7
2.2 Analyse et commande des systèmes dynamiques 14
2.3 Résumé de la stratégie d'analyse et synthèse 21

3 Contrôle robuste des systèmes variant dans le temps **25**
3.1 Extension des résultats d'analyse des systèmes LTI aux systèmes LTV 25
3.2 Cas des systèmes LTV bornés dans un polytope 41
3.3 Synthèse de retour d'état multi-performance 45
3.4 Exemple 52
3.5 Résumé 56

4 Application au contrôle d'attitude **57**
4.1 Le mouvement de rotation dans l'espace 57
4.2 Modèle de déviation d'attitude 60
4.3 Synthèse de contrôleurs 67
4.4 Résultats et simulations 78
4.5 Perspectives pour le contrôle d'attitude 90

5 Conclusions et Perspectives **99**
5.1 Une approche LMI pour les systèmes non linéaires 99
5.2 Le contrôle d'attitude 100

A Annexe : décomposition en "éléments simples" des matrices de Lyapunov des systèmes LTI **103**
A.1 Matrices de Lyapunov élémentaires de commande 103
A.2 Problème dual ou matrices de Lyapunov élémentaires d'observation . 105
A.3 Perspectives 107

B Annexe : définition et propriétés du Quaternion **109**
B.1 Algèbre du Quaternion 109
B.2 Quaternion et géométrie de $\mathbb{R}^3$ 111

C Annexe : scripts MATLAB et modèles de simulation **115**
C.1 Scripts d'analyse et de synthèse LMI 115
C.2 Simulateur représentatif temps-réel Simulink 123

Table des figures

2.1 Représentation d'un système en schéma bloc entrées/sorties. 8
2.2 Exemple de système simple non linéaire : le pendule de masse m et de longueur L. 9
2.3 Exemple de système simple linéaire : le circuit RLC. 10
2.4 Exemple de système simple linéaire : la température d'une maison. . . 11
2.5 Représentation schéma bloc de la construction du modèle de déviation et de la fermeture de la boucle avec une loi de commande $\tilde{u} = \gamma(t, \tilde{z})$. 13

3.1 Ajout de N intégrateurs à la commande pour annulation de l'erreur statique et $N-1$ niveaux d'erreur de trainage de la sortie $z(t)$. . . . 27
3.2 Système augmenté de N intégrateurs, en fonction du besoin d'annulation d'erreurs statique ou de trainage dues à l'entrée de perturbation w, assimilé au système étudié. 31
3.3 Système masse-ressort de référence. 52
3.4 Réponse à une impulsion en vitesse du système masse-ressort avec deux intégrateurs pour les deux synthèses de contrôleur. 56

4.1 Représentation de l'orientation, ou attitude, d'un objet quelconque dans l'espace à 3 dimensions avec le quaternion. 58
4.2 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à un objet rigide quelconque. 60
4.3 Suivi d'une trajectoire théoriquement réalisable (l'étude porte uniquement sur le contrôle temps-réel de l'attitude de l'objet). 62
4.4 Stratégie de contrôle du mouvement de rotation le long d'une trajectoire théorique. 63
4.5 Assemblage physique équivalent au comportement du système *réduit* Σ_r en boucle fermée avec le contrôleur (4.17). 73
4.6 Plan de phase pour le système *réduit* Σ_r en boucle fermée avec le contrôleur non linéaire (4.17) avec $k_p = 2$ et $k_d = 1$: courbes bleue et verte sont des trajectoires depuis des C. I. quelconques convergeant asymptotiquement vers le point d'équilibre stable $x_c = 0$; les deux trajectoires en rouge correspondent aux deux trajectoires symétriques (l'objet pouvant tourner dans les deux sens) de mesure nulle conduisant aux points d'attitude d'équilibre instable $\bar{x}_r = (\pm 1\ 0)^\top$. . 74
4.7 Réponse libre de la sortie $x(3) = q_V$ du système de déviation non linéaire en boucle fermée Σ_{r_2} depuis $x(0) = (0\ 0\ 0\ 100\delta q)^T$ avec les différents contrôleurs. 82
4.8 Suivi d'une trajectoire à vitesse de rotation constante avec 4 types de contrôleurs différents, tous réglés à la même constante de temps et avec un coefficient d'amortissement de 1. 84
4.9 Trajectoire théorique d'attitude couplant des mouvements de rotation différents sur les trois axes. 85
4.10 Suivi de la composante ω^*_{bx} de la trajectoire d'attitude de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs. 86

4.11 Erreurs de suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs. 86
4.12 Commande de référence et correction de commande pour le suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs. 87
4.13 Erreurs de suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec les trois contrôleurs K_o, K_X et K_S. 88
4.14 Commande de référence et correction de commande pour le suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec les trois contrôleurs K_o, K_X et K_S. 88

B.1 Convergence de l'attitude avec le quaternion et illustration du *phénomène de retournement* dû à la *double couverture* (figure de [38] reprise et modifiée). 112

C.1 Modèle de simulation MATLAB Simulink temps réel représentatif pour le contrôle d'un objet générique le long d'une trajectoire. 124
C.2 Représentation virtuelle en temps réel d'un objet générique en mouvement le long d'une trajectoire. 125
C.3 Objet impactant un mur. 126
C.4 Représentation de l'impact comme un système interconnecté incertain hybride. 133

Notations

Cette partie présente les notations utilisées tout au long de la thèse :

— **Pour les ensembles :**

  — $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$: les ensembles des entiers positifs ou nuls, des entiers positifs non nuls.

  — $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_{++}$: les ensembles des réels, des réels non nuls, des réels positifs ou nuls, des réels strictement positifs,

  — $\mathbb{C}$: l'ensemble des complexes,

  — $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) : l'ensemble des vecteurs réels (complexes) de dimension n,

  — $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) : l'ensemble des matrices réelles (complexes) à n lignes et m colonnes,

  — $\mathbb{S}^n := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, M^\top = M\}$: l'ensemble des matrices réelles *symétriques*,

  — $\mathbb{S}^n_+$ ($\mathbb{S}^n_{++}$) : l'ensemble des matrices réelles *symétriques* semi-définies positives (définies positives) de $\mathbb{R}^{n\times n}$,

  — $\mathbb{H}^n := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, M^* = M\}$: l'ensemble des matrices complexes *hermitiennes*,

  — $\mathbb{H}^n_+$ ($\mathbb{H}^n_{++}$) l'ensemble des matrices complexes *hermitiennes* semi-définies positives (définies positives) de $\mathbb{C}^{n\times n}$,

— **Pour les matrices :**

  — I est la matrice identité (de dimension appropriée) ; si besoin de préciser la dimension, I_n est la matrice identité de dimension n,

  — $M^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est la *transposée* de la matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

  — $M^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est la *transconjuguée* (conjuguée et transposée) de la matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$,

  — $\lambda(M)$ est le vecteur des valeurs propres de $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

  — $M^\# \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est la matrice *pseudo-inverse* de la matrice $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$: elle est égale à $(M^*M)^{-1}M^*$ si le rang de M est égal à son nombre de colonnes ; égale à $M^*(MM^*)^{-1}$ si le rang de M est égal à son nombre de lignes,

  — $\{M\}^{\mathcal{H}} = M + M^*$, $\{M\}^{\mathcal{H}} \in \mathbb{H}^n$ pour $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$,

  — $M \succ 0$ ($M \succeq 0$) pour $M \in \mathbb{H}^n$ signifie que M est (semi-)définie positive (les symboles $\prec$ et $\preceq$ sont utilisés pour l'inégalité opposée, signifiant M (semi-)définie négative).

  Cette inégalité matricielle est équivalente à : $\forall x \in \mathbb{C}^n, x^*Mx > 0$ (≥ 0)

  Ce passage par équivalence de la formulation matricielle à la formulation scalaire est appelée dans la thèse opération de *congruence* (de x sur la LMI $M \succ 0$),

  — $M \succ N$ ($M \succeq N$) pour $M, N \in \mathbb{H}^n$ signifie que la matrice $M - N$ est (semi-)définie positive,

— $\begin{pmatrix} M & N^* \\ N & Q \end{pmatrix} \succ 0$, avec $Q \in \mathbb{H}^q$ inversible, $M \in \mathbb{H}^n$ et $N \in \mathbb{C}^{q\times n}$, est équivalent par *complément de Schur* à $M - N^*Q^{-1}N \succ 0$ et $Q \succ 0$,

— $M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & ... & m_{1q}N \\ ... & ... & ... \\ m_{p1}N & ... & m_{pq}N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{pr\times qs}$ est le produit de Kronecker de $M = (m_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times q}$ et $N \in \mathbb{C}^{r\times s}$.

— **Pour les signaux et normes :**

— $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ est la notation des vecteurs pour la géométrie dans l'espace à 3 dimensions (tout autre vecteur de dimensions différentes de 3 sera noté sans flèche),

— $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ est le produit factoriel de $n \in \mathbb{N}$,

— $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ sont les dérivées successives de x par rapport au temps,

— $||x|| = \sqrt{x^\top x}$ $(= \sqrt{x^*x})$: *Norme euclidienne*, ou norme 2, du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \in \mathbb{C}^n)$,

— $|x|_{\mathcal{A}}$ correspond à la distance euclidienne entre $x \in \mathbb{C}^n$ et $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}^n$, définie par $|x|_{\mathcal{A}} = \inf\{||y - x|| \mid y \in \mathcal{A}\}$,

— $||z||_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} ||z(t)||^2 dt}$ est la norme $\mathcal{L}_2$ du signal $z(t) \in \mathbb{C}^n$,

— $||z||_{2_{[t_0;t_1]}} = \sqrt{\int_{t_0}^{t_1} ||z(t)||^2 dt}$ est la norme $\mathcal{L}_2$ tronquée à l'intervalle $[t_0; t_1]$, notée norme $\mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}$, du signal $z(t) \in \mathbb{C}^n$. Lorsque $t_0 = 0$ et t_1 tend vers l'infini, la norme $\mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}$ est équivalente à la norme $\mathcal{L}_2$.

— $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $\mathcal{K}_\infty$ si $\alpha(0) = 0$, si elle est strictement croissante et si $\lim_{s\to+\infty} \alpha(s) = +\infty$

— **Pour les polytopes :**

— L'ensemble $\mathrm{Co}\{A^{[v=1...\bar{v}]}\}$ désigne le polytope défini comme l'ensemble convexe intérieur aux $\bar{v}$ sommets $A^{[v]}$, *ie.* l'ensemble des matrices $A(\xi) = \sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v A^{[v]}$ où $\sum_{v=1}^{\bar{v}} \xi_v = 1$ et $\xi_v \geq 0$.

— **Pour le quaternion unitaire et l'orientation dans l'espace (cf. annexe B) :**

— le quaternion unitaire est défini par :

$$q = \begin{pmatrix} q_o \\ q_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Il représente une rotation d'angle θ autour de l'axe défini par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^\top \in \mathbb{R}^3$ dans le référentiel de référence. $q_o = \cos(\theta/2)$ est généralement appelé la *partie scalaire* du quaternion et $q_V = \sin(\theta/2)\vec{n}$ $(= \vec{q}_V)$ la *partie vectorielle*,

— $S_q(q) = \begin{pmatrix} q_o & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} = q_o I_3 + S_V(q_V)$ est la matrice "antisymétrique" du quaternion q (l'utilisation du nom "antisymétrique" est abusif pour le quaternion du fait que $S_q(q)^\top = q_o I_3 - S_V(q_V)$ n'est pas égal à $-S_q(q)$, par conséquent $S_q(q)$ n'est pas une matrice antisymétrique).
La matrice antisymétrique S_V d'un vecteur $\vec{n}_1 \in \mathbb{R}^3$, qui vérifie bien la relation d'antisymétrie des matrices $S_V(\vec{n}_1)^\top = -S_V(\vec{n}_1)$, permet de faire matriciellement l'opération de produit vectoriel avec un vecteur $\vec{n}_2$ de $\mathbb{R}^3$ de cette manière : $S_V(\vec{n}_1)\vec{n}_2 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$,

— $Q_q(q) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est la matrice de rotation usuelle de la géométrie dans l'espace à 3 dimensions, correspondant à la rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$ définie par le quaternion q. Elle peut être calculée avec le quaternion q avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Q_q(q) = \begin{pmatrix} q_V & S_q(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_V^\top \\ S_q(q) \end{pmatrix} &= I_3 + 2q_o S_V(q_V) + 2S_V(q_V)^2 \\ &= I_3 + \sin(\theta)S_V(\vec{n}) + (1-\cos(\theta))S_V(\vec{n})^2 \end{aligned}$$

— $q_a \star q_b = \begin{pmatrix} q_{a_o} & -q_{a_V} \\ q_{a_V} & S_q(q_a) \end{pmatrix} q_b$ est la loi de multiplication de deux quaternions selon l'algèbre des quaternions.

1 Introduction

Ingénieur aéronautique spécialisé en Automatique, avec une première expérience de recherche théorique en Automatique en Master à l'université de Buffalo (cf. [16]), j'ai travaillé 13 années dans l'industrie aéronautique sur le développement de calculateurs de pilotage automatique d'avions commerciaux. Pendant ce parcours dans l'industrie, sans avoir eu l'opportunité de travailler moi-même précisément sur la conception logicielle des lois de pilotages, il m'a souvent semblé manquer quelques éléments théoriques pour maitriser complètement la clé de voûte de ces systèmes embarqués que sont ces *lois de pilotage*, algorithmes, assurant la fonction de contrôle du mouvement instantané de l'avion, dont la conception s'appuie précisément sur le cadre théorique de la discipline appelée *Automatique* (cf. [23], [30]).

Au carrefour de nombreuses disciplines, l'Automatique a pour objet de décrire et d'analyser le comportement de n'importe quel "système" : objets en mouvement, assemblages mécaniques, circuits électriques, cycles thermodynamiques, contrôleurs numériques, processus, etc. Elle permet également de déduire des stratégies de contrôle de ces systèmes, telles que les lois de pilotages d'un avion.

Cette discipline devient d'autant plus centrale à notre époque de la transition numérique où les capacités d'automatisation deviennent globales, où l'on voit le déploiement d'objets connectés pour tout, depuis les objets de notre quotidien jusqu'à l'exploration de Mars, outils automatiques dont la démonstration de stabilité est donc essentielle.

J'ai donc démarré une thèse dans cette discipline en 2018 espérant pouvoir combler ce gap, l'enjeu se formulant à moi à ce moment-là de la manière suivante : *maitriser complètement la théorie du contrôle du mouvement d'un objet dans l'espace et, si possible, améliorer l'existant.*

1.1 Contrôle du mouvement d'un objet dans l'espace

Sur la période de ces trois années de recherche, les activités réalisées se sont déroulées dans le temps exactement en remontant le plan du manuscrit. Dans un

premier temps, la recherche s'est focalisée sur l'étude du mouvement d'un objet rigide quelconque dans l'espace à 3 dimensions (cf. [31]). Le contrôle du mouvement d'un objet dans l'espace est un problème largement étudié car il correspond à un enjeu central du contrôle du mouvement de nombreux systèmes robotisés : avions, drones, engins spatiaux, satellites, manipulateurs.

Si le contrôle du mouvement de translation rentre complètement dans le cadre établi de l'Automatique des systèmes Linéaires Invariant dans le Temps (systèmes LTI - cf. [23] - Principe Fondamental de la Dynamique $\sum Forces = m\ddot{x}$, est un double intégrateur linéaire invariant), le problème du mouvement de rotation est bien plus complexe et a demandé un travail d'approfondissement important.

Différents cadres mathématiques, décrits de manière relativement exhaustifs dans [11], existent pour modéliser *l'orientation* ou *l'attitude* d'un objet dans l'espace : les angles d'Euler, la matrice de rotation, le quaternion unitaire. Quel que soit le cadre choisi, le mouvement de rotation présente une complexité intrinsèque : son modèle mathématique est non linéaire et présente une complexité spécifique liée à la topologie trigonométrique et périodique du mouvement de rotation (cf. [8]).

Le *quaternion unitaire* (cf. [41], [55]) a très vite été retenu pour modéliser l'attitude d'un objet en raison de son efficacité et de sa compacité qui convient au formalisme de la représentation d'état (cf. [23]).

Pour avoir une bonne compréhension du quaternion, cet approfondissement a commencé par l'étude théorique de la définition et de l'algèbre du quaternion comme exposé dans l'annexe B page 109. Elle s'est accompagnée du développement d'*un simulateur temps-réel Matlab-Simulink* d'un objet générique quelconque, complètement commandé, en mouvement dans l'espace à 3 dimensions. Ce simulateur, exposé dans l'annexe C.2 page 123, a servi de support expérimental à l'étude du contrôle du mouvement de rotation.

Suite à cet important travail de modélisation, en s'inspirant d'exemples existants du contrôle d'attitude avec le quaternion, tels que la commande hybride de [38], nous avons convergé sur une structure de loi de commande non linéaire continue *presque* globalement stable [42].

Une fois cette structure de système non linéaire en boucle fermée posée, la question de la synthèse de ce contrôleur pour répondre à une spécification multi-performances a ouvert la piste d'une extension aux systèmes non linéaires, de résultats d'analyse et de synthèse de retour d'état statique robuste dédié aux systèmes Linéaires Invariant dans le Temps (LTI) incertains.

1.2 Extension de résultats du contrôle robuste aux systèmes non linéaires

S'appuyant sur les résultats existant pour le contrôle robuste des systèmes LTI incertains, principalement l'approche S-Variable de [19] (existent aussi la méthode de μ-analysis [18], la méthode IQC [28, 26]), la démarche générale a été de rechercher des méthodes d'analyse et de synthèse dans le format des *Inégalités Linéaires Matricielles* (LMI - cf. [9], [13]) pour les systèmes non linéaires, avec une étape intermédiaire dédiée aux systèmes Linéaires Variant dans le Temps (LTV).

Tous ces résultats découlent de la théorie de Lyapunov [36] datant de la fin du XIX^e siècle, principes qui ont largement été étudiés et complétés pendant le XX^e siècle comme dans [24] et [30].

L'analyse des systèmes Linéaires Variant dans le Temps spécifiquement a fait l'objet de nombreuses recherches. La problématique de résolution des Inégalités Linéaires Matricielles *Différentielles* (DLMI) qui en découle est par exemple étudiée en détail dans [22]. D'autres méthodes encore ont été développées comme l'analyse de persistence d'excitation proposée par [35]. [62] détaille les conditions nécessaires et suffisantes sur les propriétés de la matrice d'état variant dans le temps pour obtenir la stabilité exponentielle, caractérisant le taux de décroissance des réponses temporelles.

Ces résultats sont notamment exploités dans [51] pour des systèmes linéaires à variation temporelle périodique, en recherchant directement des solutions des LMI différentielles, en supposant que les matrices d'état sont une somme de fonctions temporelles de sinus et cosinus. L'article [54] fournit encore une approche exploitable pour l'analyse à horizon fini des systèmes LTV. Ces résultats comprennent l'analyse de la stabilité et des performances entrées-sorties. [4] propose de son côté une approche qui s'appuie entièrement sur la matrice de transition.

Par ailleurs, les résultats LMI existants pour les systèmes LTI ne sont pas limités à ces systèmes et ont de nombreuses dérivations pour les systèmes non linéaires. Par exemple, [47] construit une approche LMI pour prouver la stabilité asymptotique d'un certain type de systèmes non linéaires décomposables en somme de systèmes affines invariants dans le temps. [27] développe des résultats LMI pour démontrer la stabilité exponentielle des systèmes à retards incertains. [50] développe des résultats d'analyse de stabilité LMI et une conception de contrôleur robuste pour certains types de systèmes à commutation.

Le travail de recherche s'est donc appliqué à étendre aux systèmes LTV de nouveaux résultats d'analyse de performances classiques pour les systèmes LTI, tels que l'amortissement, la pulsation maximale, et des performances entrées-sorties (H_∞, H_2, Impulsion-à-crête - cf. [19]). A notre connaissance, ces résultats n'ont pas été proposés à ce jour et permettent d'adresser l'analyse détaillée de nombreux types

d'exigences pour les systèmes non linéaires. Elle propose les résultats LMI au formalisme classique de Lyapunov (cf. [9], [13]) et dans le formalisme S-Variable (cf. [19]).

1.3 Résultats de la thèse

Après un premier chapitre introduisant le cadre théorique dans lequel s'inscrit cette thèse (chapitre 2), les résultats de recherche sont présentés en deux grandes étapes correspondant chacune à un chapitre de la thèse :

— le chapitre 3 donne les résultats d'analyse et de synthèse de retour d'état pour les systèmes Linéaires Variant dans le Temps (LTV) :

L'apport de ces résultats est l'extension aux systèmes LTV de l'analyse des caractéristiques classiques des systèmes LTI équivalentes au placement de pôles. Cela comprend donc non seulement la stabilité exponentielle qui est un résultat existant, mais aussi l'analyse du coefficient d'amortissement et de la pulsation propre maximale. Elle étend notamment trois résultats d'analyse de performances entrée-sortie des systèmes LTI que sont la norme H_∞, la norme H_2 et la norme Impulsion-à-crête.

Nous fournissons les formulations sous forme d'Inégalité Linéaire Matricielle Différentielle (DLMI) pour l'analyse de ces performances dans la première partie 3.1. Puis, pour le cas particulier des systèmes variant dans le temps pouvant être inclus dans un polytope, nous fournissons dans la partie 3.2 les conditions LMI pour la synthèse de retour d'état. Ces résultats LMI sont donnés dans le formalisme de Lyapunov dans la sous-partie 3.3.1 et dans le formalisme S-Variable dans la sous-partie 3.3.2. Ils sont largement inspirés des résultats de [19] mais ne sont pas strictement équivalents. Nous pensons que ces nouvelles formules correspondent mieux à la nature variable dans le temps du problème considéré.

Ces résultats ont fait l'objet de la publication suivante et ont été présentés à la troisième conférence IFAC Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON, Japan, Online, 2021 :

[15] *Thomas Conord and Dimitri Peaucelle. Multi-performance state-feedback for time-varying linear systems. Third IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON, Japan, Online, 2021.*

Ces résultats théoriques sont accompagnés d'exemples de scripts Matlab d'analyse et de synthèse pour les systèmes LTV donnés dans l'annexe C.1 page 115.

— le chapitre 4 page 57 propose d'appliquer ces résultats d'analyse et de synthèse pour les systèmes LTV au cas du contrôle d'attitude d'un objet quelconque :

Après une introduction sur le quaternion et l'applicabilité des résultats du chapitre précédent dans la partie 4.1, le quaternion est utilisé dans la partie 4.2 pour modéliser sous forme de représentation d'état la dynamique de la déviation de l'attitude d'un objet quelconque par rapport à une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable. Cette modélisation et la simplification qui en est proposée sont en elles-mêmes des résultats nouveaux à notre connaissance pour le contrôle d'attitude.

Cette modélisation fait émerger l'opportunité de construire dans la partie 4.3 une structure de contrôleur non linéaire continue *presque* globalement asymptotiquement stable (selon la définition de [42]), au plus proche de la structure d'un retour d'état. Ce deuxième nouveau résultat est similaire au contrôleur hybride proposé par [38] mais réalise la fonction hybride de manière continue.

Ce premier contrôleur non linéaire est équivalent au voisinage du point d'équilibre à un correcteur Proportionnel Dérivé, par conséquent pouvant laisser apparaitre des erreurs statiques ou de trainage en régime permanent. En considérant la propriété de stabilité *locale* uniquement, le système restant borné dans un voisinage autour du point d'attraction, nous utilisons dans la partie 4.4 les méthodes du chapitre précédent pour faire la synthèse de ce contrôleur augmenté d'intégrateurs, selon des exigences de performances multi-objectifs, illustrée par des simulations.

Ces résultats ont fait l'objet de la publication suivante et ont été présentés à la conférence IEEE Conference on Control Technology and Applications, San Diego, USA, Online, 2021 :

[14] *Thomas Conord and Dimitri Peaucelle. Continuous quaternion based almost global attitude tracking. IEEE Conference on Control Technology and Applications, San Diego, USA, Online, 2021.*

Nous proposons enfin dans la partie 4.5 quelques pistes de recherche sous forme de conjectures pour construire des contrôleurs à N intégrateurs, pour le contrôle d'attitude, qui auraient la propriété d'être *presque* globalement stables.

Ces résultats théoriques se sont accompagnés de la production d'un simulateur représentatif temps-réel Simulink du mouvement d'un objet quelconque avec ses capteurs, actionneurs, contrôleur, une interface Homme Machine et une réalité virtuelle permettant de voir évoluer l'objet, qui a servi de support expérimental pour tester ces contrôleurs. L'annexe C.2 page 123 donne une illustration de ce simulateur et détaille des éléments de modélisation implé-

mentés dans le simulateur. Notamment, la recherche de la représentativité du modèle a été poussée dans la proposition d'un modèle mathématique précis en trois dimensions décrivant l'impact de l'objet sur un obstacle, étape de modélisation qui est aussi un résultat de la thèse.

Pour finir, l'annexe A page 103 propose un dernier résultat concernant la définition des fonctions de Lyapunov sous forme quadratique $V(x) = x^\top Px$ des systèmes LTI stables. Dans cette annexe, nous avons cherché à décrire le sous-ensemble minimal des matrices de Lyapunov P solutions pour les systèmes LTI stables d'ordre 2 et 3. Cette annexe a servi de lemme pour les recherches à la main de fonctions de Lyapunov pour les systèmes non linéaires, notamment la fonction de Lyapunov permettant de démontrer la stabilité *presque* globale du contrôleur non linéaire pour le quaternion.

2

Préliminaires théoriques

La première étape de l'Automatique passe par la description du système considéré, qui consiste à mettre en équations mathématiques son comportement, de la manière la plus précise et exhaustive possible, en utilisant les lois mathématiques établies pour chaque discipline (mécanique, aérodynamique, thermodynamique, électronique,...) : cette étape est appelée la *modélisation* (cf. [30] pour tous types de systèmes, [23] pour les systèmes Linéaires Invariant dans le Temps).

2.1 Modélisation des systèmes dynamiques

L'ensemble des équations mathématiques obtenues pour la description d'un système est appelé *un modèle* du système. Il peut être formalisé de manière générique comme un ensemble d'équations différentielles que l'on nomme *la représentation d'état* du système :

Définition 2.1: Représentation d'état des systèmes

La représentation d'état d'un système est défini par :

$$\hat{\Sigma} \begin{cases} \dot{x} = \hat{f}(t, x, w, u) \\ z = g(t, x, w, u) \\ y = h(t, x, w, u) \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

- $t \in \mathbb{R}_+$ est le temps,
- $x \in \mathbb{R}^n$ est la description de l'état du système,
- $w \in \mathbb{R}^{n_w}$ rassemble les perturbations qui s'appliquent sur le système,
- $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ correspond aux valeurs physiques de commande exercées par les actionneurs sur le système,
- $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ correspond aux signaux de performances utilisés pour spécifier les caractéristiques du système,
- $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ correspond aux mesures des capteurs disponibles sur le système.

Il est assez fréquent de représenter les systèmes sous forme d'un schéma bloc représentant les entrées et les sorties du système comme sur la figure 2.1.

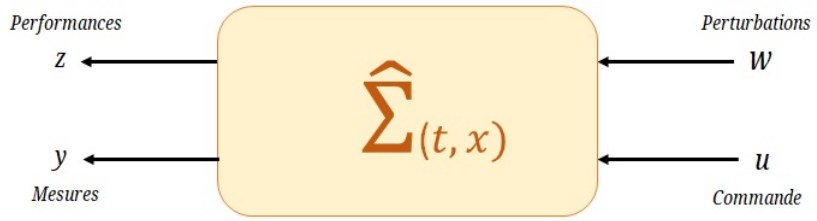

FIGURE 2.1 – Représentation d'un système en schéma bloc entrées/sorties.

Lorsque la commande u est présente en entrée du système sans information sur la manière dont sa valeur est contrôlée, on parle de système en *boucle ouverte* : le système $\hat{\Sigma}$ et la fonction $\hat{f}$ seront notés dans ce cas avec un chapeau tout au long de la thèse. Le système est dit en *boucle fermée* et noté Σ et f sans chapeau, lorsque l'entrée u est définie comme une fonction de l'état ou des sorties du système et d'une consigne à atteindre (cf. paragraphe 2.1.2).

En fonction de la nature de la fonction $\hat{f}$ et de sa dépendance à chaque variable, le système entrera dans différentes classes de systèmes pour lesquels existent aujourd'hui des outils d'analyse plus ou moins simples et efficaces. On pourra noter les classes de systèmes usuelles suivantes (cf. [30] pour tous types de système et [23] pour les systèmes LTI) :

— les systèmes *non-autonomes* ou *variant dans le temps* pour lesquels :

$$\dot{x} = \hat{f}(t, x, w, u)$$

— les systèmes *autonomes* ou *invariant dans le temps* pour lesquels :

$$\dot{x} = \hat{f}(x, w, u)$$

— les systèmes *linéaires variant dans le temps* (LTV) pour lesquels :

$$\dot{x} = \hat{A}(t)x + B_w(t)w + B_u(t)u$$

avec $\hat{A}(t)$, $B_w(t)$, $B_u(t)$ des matrices fonction du temps,

— les systèmes *linéaires invariant dans le temps* (LTI) pour lesquels :

$$\dot{x} = \hat{A}x + B_w w + B_u u$$

avec $\hat{A}$, B_w, B_u des matrices constantes. Les équations de ces systèmes sont aussi appelées *équations différentielles ordinaires (EDO)*.

Une condition suffisante pour assurer l'existence et l'unicité des solutions au problème de la valeur initiale (Théorème de Cauchy-Lipschitz [17]) est que $\hat{f}$ soit de classe au moins $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire continûment différentiable. Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur les systèmes non linéaires où $\hat{f}$ peut éventuellement être discontinue, mais avec pour propriété de pouvoir être modélisée comme un système *linéaire variant dans le temps* qui reste borné à l'intérieur d'un polytope.

La linéarité des derniers systèmes permet d'appliquer le *principe de superposition*, qui dit qu'une sortie générée par une somme d'entrées est égale à la somme des sorties obtenues une à une pour chacune des entrées, et d'utiliser des outils existants très efficaces de l'Automatique linéaire (cf. [23]). Ce principe n'est pas applicable pour les premiers systèmes non linéaires, rendant leur analyse beaucoup plus compliquée (cf. [30]).

A chaque fois la construction du modèle s'appuie sur des hypothèses et l'utilisation de lois dont la définition représente de manière plus ou moins précise la réalité, et qui peuvent parfois n'être valides que pour une plage d'évolution du système. En outre, des perturbations sont généralement négligées et les valeurs des paramètres utilisées dans les modèles ne sont jamais strictement égales à la réalité : on parle d'*incertitudes*.

Le modèle est donc toujours une approximation plus ou moins fine de la réalité. La prise en compte des incertitudes et perturbations dans l'analyse des systèmes et la synthèse de leur contrôleur est nommé le *contrôle robuste* (cf. [52]).

2.1.1 Quelques exemples

Pour illustrer ce cadre mathématique générique de modélisation, voici quelques exemples classiques de systèmes accompagnés de leur modèle :

— Le mouvement du pendule :

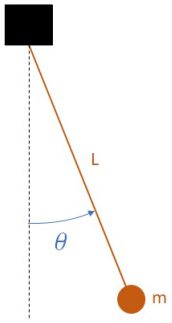

FIGURE 2.2 – Exemple de système simple non linéaire : le pendule de masse m et de longueur L.

Par application du Principe Fondamentale de la Dynamique (cf. [43]) à un pendule de masse m et de longueur L comme représenté sur la figure 2.2, on obtient l'équation différentielle suivante, décrivant son mouvement :

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kL\dot{\theta} \tag{2.2}$$

en supposant la tige de longueur L rigide et de masse négligeable, le pendule placé dans le champ de gravité g et subissant une force de frottement proportionnelle à sa vitesse avec un coefficient k.
En notant l'état du système $x = (x_1, x_2)^\top = (\theta, \dot{\theta})^\top \in \mathbb{R}^2$, et la sortie d'intérêt pour l'utilisateur la position temps réel du pendule $z = \theta = x_1 \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\hat{\Sigma}\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{L}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{pmatrix} = \hat{f}(x) \\ z = (1 \quad 0)x = Cx \end{cases} \tag{2.3}$$

qui est un système non linéaire invariant dans le temps.

De nombreuses hypothèses viennent ainsi biaiser la précision du modèle : le modèle proportionnel à la vitesse de la force de frottement sur la masse n'est pas forcément valide pour toutes les vitesses, le fait de négliger complètement la barre (sa masse et son frottement dans l'air), le frottement au point d'attache de la barre sur le support fixe, la gravité prise égale à la valeur du niveau zéro d'altitude terrestre, etc.

Toutes ces approximations font que le modèle aura une précision et une validité pour une plage de fonctionnement donné.

— Le circuit électrique RLC composé d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine :

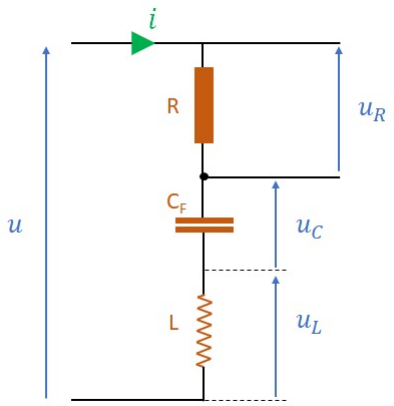

FIGURE 2.3 – Exemple de système simple linéaire : le circuit RLC.

Par application des lois de Kirchhoff au circuit RLC représenté sur la figure 2.3, en le supposant évoluer dans des fréquences où les composants fonctionnent en régime linéaire, on obtient :

$$u = u_R + u_C + u_L = Ri + \frac{1}{C_F}\int_0^t idt + L\frac{d\,i}{dt} \tag{2.4}$$

En notant l'état du système $x = (x_1, x_2)^\top = (\int_0^t idt, i)^\top \in \mathbb{R}^2$, u la tension de commande et $z = u_r$ la sortie de performance d'intérêt pour l'utilisateur, nous obtenons le modèle :

$$\hat{\Sigma}\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{C_F L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u = \hat{A}x + B_u u \\ z = (0 \quad R)x = Cx \end{cases} \tag{2.5}$$

qui est un système linéaire invariant dans le temps.

L'hypothèse la plus dimensionnante ici est la fréquence d'oscillations dans le circuit qui est considérée dans le régime linéaire des composants. En dehors de cette plage, ce modèle n'est plus valide. De plus les valeurs de la résistance R, de l'inductance L et de la capacité C_F sont aussi données par le fabricant dans une plage d'incertitude, source de biais du modèle.

— L'évolution de la température d'une maison :

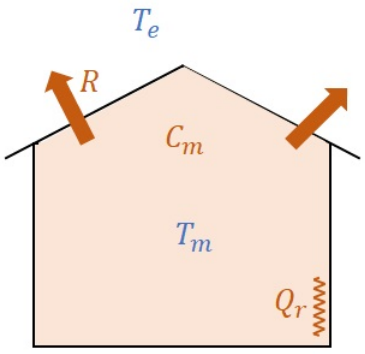

FIGURE 2.4 – Exemple de système simple linéaire : la température d'une maison.

Par application du principe de conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique à une maison comme représenté sur la figure 2.4, on obtient :

$$\frac{d\,C_m T_m}{dt} = R(T_e - T_m) + Q_r \tag{2.6}$$

Avec T_m la température de la maison, T_e la température extérieure, C_m la capacité thermique globale de la maison, R la résistance thermique de l'ensemble

des murs donnant sur l'extérieur de la maison, Q_r l'apport d'énergie thermique par les radiateurs de la maison.

En notant l'état du système $x = T_m \in \mathbb{R}$, la température extérieure comme une perturbation $w = T_e$, l'apport en énergie des radiateurs la commande $u = Q_r$, et la sortie d'intérêt pour l'utilisateur $z = T_m = x \in \mathbb{R}$, nous obtenons :

$$\hat{\Sigma} \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{R}{C_m}x + \dfrac{R}{C_m}w + \dfrac{1}{C_m}u = \hat{A}x + B_w w + B_u u \\ z = x \end{cases} \tag{2.7}$$

qui est un système linéaire invariant dans le temps.

Dans ce cas, il est relativement évident que la température de la maison évoluera dans des valeurs courantes (températures relativement bornées autour d'une moyenne de 20^o par exemple). Dans le cas contraire, la maison pourrait changer de comportement (par exemple, prendre feu pour des températures très élevées, ...) et ce modèle ne serait donc plus valide. De plus, les paramètres de résistance thermique R et de capacité thermique C_m globaux de la maison auront nécessairement une précision très relative, ne prenant pas en compte tous les types de matériaux avec leurs épaisseurs exactes dans la maison, d'éventuels points de fuite ou entrée d'air, à l'origine d'autant d'incertitudes sur la valeur de ces paramètres.

Ces trois exemples très simples permettent d'illustrer que des problématiques apparemment de nature complètement différentes, peuvent s'écrire mathématiquement exactement de la même manière. Néanmoins à chaque fois, ces modèles ont une plage de validité et une précision liées aux hypothèses de modélisation.

2.1.2 Asservissement et modèle centré en zéro

L'enjeu central de l'Automatique est d'être capable d'*asservir* n'importe quel système à une consigne de sortie de performance z^* (ou d'état x^*) qui serait spécifiée par un utilisateur (exemple du thermostat pour la température de la maison). Cette consigne peut aussi varier dans le temps ($x^*(t)$, $z^*(t)$) : il s'agit dans ce cas d'asservir le système le long d'une trajectoire (exemple d'une trajectoire pour un véhicule autonome, comme un satellite spécifiquement pour le mouvement de rotation étudié dans cette thèse). Cela revient à dire que le système en *boucle fermée* doit garantir que *l'écart à la consigne* donnée par l'utilisateur doit *tendre vers zéro.*

Ainsi, par des changements de variables appropriés et remaniements des équations, il est généralement possible de transformer le modèle en boucle ouverte d'un système quelconque en un modèle d'écart à la consigne, généralement appelé *modèle de déviation*, dont le seul point d'équilibre étudié est *zéro* ; le modèle est dit *centré en zéro.*

Il est à noter que la plupart des systèmes physiques sont invariants dans le temps : $\dot{x} = \hat{f}(x, w, u)$. L'apparition des systèmes *variant dans le temps* peut, entre autres, découler de l'introduction d'une trajectoire variante dans le temps $(x^*(t), z^*(t))$ le long de laquelle on souhaite asservir en boucle fermée ces systèmes invariants.

En effet, après élaboration, avec par exemple une approche de *commande optimale* [5], d'une loi de commande théorique $u^*(t, x^*(t), z^*(t))$ solution de l'équation différentielle du système théorique

$$\dot{x}^* = \hat{f}^*(x^*, 0, u^*(t, x^*(t), z^*(t)) \tag{2.8}$$

permettant au système théorique décrit par $\hat{f}^*$ de suivre exactement la trajectoire $(x^*(t), z^*(t))$ sans perturbation $(w = 0)$, il est généralement possible d'obtenir un modèle de déviation en faisant la "soustraction" (parfois non linéaire comme pour le quaternion, voir chapitre 4) entre le système original (2.1) et le système théorique (2.8) variant dans le temps. Ce modèle de déviation est noté ici avec des tildes :

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t, \tilde{x}, w, \tilde{u}) \tag{2.9}$$

et son seul point d'équilibre étudié est zéro. L'état est noté $\tilde{x}$ dans le modèle de déviation car le remaniement des équations suite à l'opération de "soustraction" entre les deux modèles implique généralement des changements de variables du type $\tilde{x} = x - x^*$, $\tilde{z} = z - z^*$ qui correspondent aux erreurs de suivi de trajectoire, et $\tilde{u} = u - u^*$ qui correspond à la correction de commande appliquée pour corriger les écarts à la trajectoire du système réel.

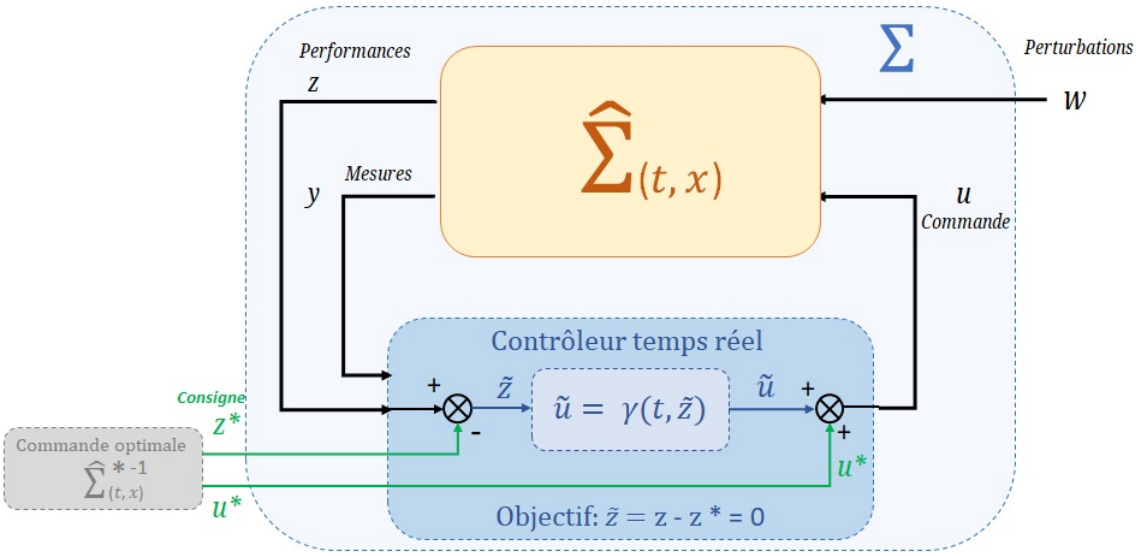

FIGURE 2.5 – Représentation schéma bloc de la construction du modèle de déviation et de la fermeture de la boucle avec une loi de commande $\tilde{u} = \gamma(t, \tilde{z})$.

On considère par la suite que le modèle utilisé a toujours été construit pour être *centré en zéro*. Par conséquent, on considèrera directement que le modèle $\hat{\Sigma}$ en

boucle ouverte (2.1) est lui-même un modèle de déviation dont le seul point d'équilibre étudié est zéro, la commande u étant la correction de commande appliquée au système original pour ramener l'écart à la consigne à zéro.

Après construction de ce modèle de déviation, l'étape suivante est l'étude de la *stabilité* du point zéro pour ce système, étude qui est appelée *analyse* dans la discipline de l'Automatique. De manière généralement assez simultanée, l'analyse mène à la construction d'une *commande* ou *contrôleur* décrivant le comportement de l'entrée u en fonction des variables du système pour faire que la sortie $z = 0$ devienne un *point d'équilibre stable asymptotique* du système en *boucle fermée* selon des exigences spécifiées par l'utilisateur : cette étape est appelée *synthèse* en Automatique.

2.2 Analyse et commande des systèmes dynamiques

Dans les étapes de modélisation, le modèle (2.1) est supposé avoir été construit comme un modèle de déviation centré en zéro. L'objectif de l'Automatique est ensuite de construire une *loi de commande* :

$$u = \gamma(t, x, z)$$

avec $\gamma(.)$ une fonction de l'état et/ou de la sortie, qui peut être fonction du temps ou pas, avoir des priorités très diverses en fonction du besoin (continuité ou pas, linéarité,...), pour permettre de répondre à *une spécification* donnée par l'utilisateur du système. Cette spécification décrit le comportement attendu de la boucle fermée

$$\dot{x} = \hat{f}(t, x, w, \gamma(.)) = f(t, x, w) \tag{2.10}$$

et caractérise entre autres par exemple :

— la *stabilité* :
Quel que soit son état d'initialisation dans le domaine opérationnel, le système doit toujours rester à l'intérieur du domaine opérationnel d'utilisation ; autrement dit, le système ne doit pas diverger, générer des dégâts pour lui ou sur son environnement.

— la *convergence* (stabilité asymptotique) :
Quel que soit son état d'initialisation dans le domaine opérationnel, le système doit converger vers une valeur d'équilibre.

— la *précision* :
La valeur d'équilibre à laquelle le système converge en régime permanent doit être exactement égale à la valeur de la consigne, sans erreurs dans le domaine opérationnel ; c'est-à-dire pour les pires incertitudes et profils de perturbations identifiés.

— le *temps de réponse* :

Le système doit avoir atteint la valeur de la consigne avec une erreur résiduelle de x% en un temps de réponse inférieur à T_r.

— le *confort* :

Le système ne doit pas osciller pour des consignes monotones ; en cas d'oscillations, le système devra en particulier amortir certaines fréquences (exemple de la cinétose pour les transports correpondant à des fréquences précises).

— le *dépassement de la consigne* :

Le système ne doit pas dépasser la valeur de la consigne.

— la *consommation d'énergie* :

Le système doit minimiser sa consommation d'énergie.

— l'*usure* :

Le système doit maximiser son temps de vie en minimisant l'usure de ces composants : optimisation de l'utilisation des actionneurs dans une plage opérationnelle loin de leur saturation/butée.

Dans la mesure où les exigences ne sont pas contradictoires, certaines vont naturellement s'opposer : par exemple "avoir un temps de réponse très faible" qui demande beaucoup d'énergie, s'oppose aux exigences de "minimiser la consommation d'énergie" et "optimiser le temps de vie des actionneurs" qui elles demandent de minimiser les efforts dans les actionneurs et la dépense d'énergie. Nous cherchons donc des solutions optimales à ce problème de contrôle *multi-objectif*, qui sont des compromis entre toutes ces contraintes.

Ainsi, toutes ces exigences peuvent se traduire en contraintes mathématiques sur les variables d'état, de sortie ou d'entrée du système en boucle fermée. L'objectif de l'Automatique et de l'approche avec les Inégalités Linéaires Matricielles (LMI) en particulier, est de pouvoir écrire l'ensemble de ces contraintes sous forme d'un problème d'optimisation convexe pour lesquels on dispose d'outils pour les résoudre (outils d'optimisation SDP - Semidefinite Programming - voir [58], [6] ; avec des solveurs tels que SeDuMi [56] ou SDPT-3 [57]).

La première question relative à l'asservissement d'un système est donc la propriété de *stabilité* : que se passe-t-il si le système est initialisé au voisinage du point d'équilibre ? Le système reste-t-il dans ce voisinage ? Revient-il toujours au point d'équilibre spécifié ? Ou peut-il avoir des comportements indésirables, voire diverger dans certains cas ?

2.2.1 Stabilité et analyse des systèmes dynamiques

Pour rappel, en notant $x(t, t^o, x^o)$ la trajectoire solution du système $\dot{x} = f(t, x)$ depuis les conditions initiales (t^o, x^o), la définition de stabilité selon Lyapunov (cf. [36], voir aussi [24] et [30]) est :

Définition 2.2: Stabilité selon Lyapunov

On dit que l'origine $x = 0$ pour le système $\dot{x} = f(t, x)$ est :

- *stable* si pour chaque paire (t^o, ε), telle que $t^o \geq 0$, $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(t^o, \varepsilon) > 0$ tel que

$$||x^o|| \leq \delta \;\Rightarrow\; ||x(t, t^o, x^o)|| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t^o \geq 0 \tag{2.11}$$

- *uniformément stable* si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que (2.11) est vérifiée,
- *uniformément globalement stable* si $\delta(\varepsilon)$ peut être choisi tel que $\delta(\varepsilon) \to +\infty$ lorsque $\varepsilon \to +\infty$

Par ailleurs, on peut aussi définir la notion de *stabilité asymptotique* de la manière suivante :

Définition 2.3: Stabilité asymptotique

On dit que l'origine $x = 0$ pour le système $\dot{x} = f(t, x)$ est :

- *attractif* s'il existe $r > 0$ tel que

$$||x^o|| \leq r \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} x(t, t^o, x^o) = 0$$

- *asymptotiquement stable* s'il est stable (selon la définition de Lyapunov 2.2) et attractif.

Enfin Lyapunov propose le théorème suivant pour démontrer la stabilité de l'origine pour les systèmes variant dans le temps :

Théorème 2.4: Stabilité de Lyapunov

S'il existe une fonction $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+; (t, x) \mapsto V(t, x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ ainsi que deux fonctions α_1 et α_2 de classe $\mathcal{K}_\infty$ tels que

$$\alpha_1(||x||) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(||x||), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$$

S'il existe un voisinage de $x = 0$ tels que, pour tout x appartenant à ce voisinage et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a le long des trajectoires du système $\dot{x} = f(t, x)$:

— la dérivée totale

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}^\top f(t, x) \leq 0$$

alors $x = 0$ est un point d'équilibre localement stable du système $\dot{x} = f(t, x)$.

— la dérivée totale

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}^\top f(t, x) < 0$$

alors $x = 0$ est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable du système $\dot{x} = f(t, x)$.

V est généralement appelée *fonction de Lyapunov* : elle est spécifique à chaque système différent et représente donc, si elle existe, un certificat de stabilité du système. En fonction de la complexité et des non linéarités du système, sa recherche peut ne pas être évidente.

Dans le cadre de la démonstration de la tenue des exigences spécifiées par l'utilisateur, le voisinage de $x = 0$ devra inclure l'ensemble du contexte opérationnel pour démontrer la stabilité du système pour tous les cas d'utilisation : mathématiquement, il s'agit de la propriété de stabilité *locale* correspondant à la plus grande région opérationnelle d'évolution de l'état x du système, par opposition à la stabilité *globale* qui serait pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Comme le montre [9], le fait de rechercher des fonctions de Lyapunov sous forme quadratique $V(x) = x^\top P x$, avec la matrice $P \in \mathbb{S}^n_{++}$ constante, n'est pas limitant pour les système LTI. Ce résultat très classique appliqué aux systèmes LTI donne le théorème suivant :

Théorème 2.5: Théorème de stabilité de Lyapunov pour les systèmes LTI

$x = 0$ est globalement asymptotiquement stable pour le système $\dot{x} = Ax$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et A une matrice constante de $\mathbb{R}^{n \times n}$, si et seulement si il existe $P \in \mathbb{S}^n_{++}$ constante telle que :

$$A^\top P + PA \prec 0 \tag{2.12}$$

Ce qui est équivalent à avoir toutes les valeurs propres de la matrice A à partie réelle strictement négative (la matrice A est dite *Hurwitz*).

La matrice P est elle-même nommée dans ce cas matrice ou certificat de Lyapunov et cette LMI peut être résolue numériquement par de nombreux outils de calcul (Matlab, Yalmip, SeDuMi, SDPT-3,...).

Ce résultat de départ a conduit au développement de nombreuses formulations sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMI) sur les matrices de la représentation d'état du système LTI considéré de nombreux problèmes d'analyse. Notamment ces formulations LMI ont permis de développer des cadres d'analyse et de synthèse de contrôleurs pour les systèmes LTI incertains, comme par exemple la méthode de μ-analysis ([18]), la méthode IQC ([28, 26]), ou encore plus récemment l'approche S-Variable ([19]).

2.2.2 Commande par retour d'état

Ces résultats d'analyse sont ensuite directement exploités pour faire de la *synthèse* de retour d'état $u = Kx$ *invariant dans le temps* pour les systèmes variant dans le temps. Classiquement aujourd'hui pour les systèmes LTI (cf. [9], [19]), les produits de matrice de Lyapunov avec la matrice d'état en boucle fermée avec un retour d'état du type :

$$PA = P\hat{A} + PBK$$

où le produit PBK n'est pas linéaire en les inconnues P et K, sont converties en une formulation *duale* avec le changement de variable $X = P^{-1}$ pour obtenir des produits du type :

$$AX = \hat{A}X + BY$$

qui sont linéaires en les inconnues X et $Y = KX$.

Cela donne le résultat très classique d'existence et synthèse d'un retour d'état globalement asymptotiquement stable pour les systèmes LTI :

Théorème 2.6: Existence d'un retour d'état pour les systèmes LTI

Soit un système LTI $\dot{x} = \hat{A}x + Bu$ avec $\hat{A}$ et B deux matrices constantes ; le système est stabilisable par un retour d'état $u = Kx$, autrement dit $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée $\dot{x} = (\hat{A}+BK)x$, si et seulement si il existe deux variables matricielles $X \in \mathbb{S}^n_{++}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ constantes solutions de la LMI :

$$X\hat{A}^\top + YB^\top + \hat{A}X + BY \prec 0 \tag{2.13}$$

Dans ce cas, un retour d'état solution est donné par $K = YX^{-1}$.

Cette LMI correspond plus à un test de faisabilité, donnant une solution possible de retour d'état stabilisant le système ; cependant nous ne connaissons rien des performances du système en boucle fermée et de sa tenue à une quelconque spécification avec cette solution.

Il convient donc d'appliquer cette méthode de transformation *duale* à l'ensemble des résultats d'analyse qui découlent du théorème de Lyapunov, donnant ainsi des méthodes LMI de synthèse de retour d'état respectant chaque performance. Puis en supposant que le système variant dans le temps évolue dans un polytope et en utilisant le paradigme de Lyapunov [13], on obtient directement une méthode pour réaliser la synthèse d'un retour d'état multi-performance pour les systèmes LTV, en cumulant toutes les LMI avec un certificat de Lyapunov constant commun à tous les sommets du polytope et à toutes les spécifications.

Enfin, en transformant les LMI *duales* dans le formalisme S-variable comme proposé par [19], on obtient une deuxième méthode pour réaliser la synthèse d'un retour d'état multi-performance pour les systèmes LTV. Par exemple le théorème précédent avec la LMI (2.13) devient dans le formalisme S-Variable :

Théorème 2.7: Formulation S-Variable pour l'existence d'un retour d'état pour les systèmes LTI

Soit un système LTI $\dot{x} = \hat{A}x + Bu$ avec $\hat{A}$ et B deux matrices constantes ; le système est stabilisable par un retour d'état $u = Kx$ si et seulement si il existe des variables matricielles $X \in \mathbb{S}^n_{++}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ et $A_o \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constantes solutions de la LMI *S-Variable* suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \prec \left\{ \begin{pmatrix} \hat{A}S + BT \\ -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_o \\ -I \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}} \tag{2.14}$$

dans ce cas un retour d'état solution est $K = TS^{-1}$.

Du fait que dans cette thèse nous ne faisons qu'utiliser le formalisme S-Variable

de [19] pour reformuler des résultats LMI qui découlent d'inégalités sur des fonctions de Lyapunov, nous ne rentrons pas ici dans le détail de la construction de ce formalisme depuis la S-Procédure [9], développements mathématiques complètement disponibles dans l'ouvrage sur les S-Variable [19].

La preuve partielle de ce dernier théorème 2.7 reproduite ci-dessous permet néanmoins d'avoir un premier aperçu de comment apparaissent ces S-Variable :

Preuve : Montrons que (2.14) implique (2.13).

Grâce au changement de variable réversible $T = KS$, la contrainte (2.14) se lit avec la matrice d'état en boucle fermée $A = \hat{A} + BK$:

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \prec \left\{ \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} A_o \\ -I \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}}$$

Par congruence de cette inégalité matricielle avec la matrice $\begin{pmatrix} I \\ A^\top \end{pmatrix}$, cette inégalité implique :

$$\begin{pmatrix} I & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A^\top \end{pmatrix} \prec 0$$

qui est la LMI (2.13) : $XA^\top + AX = X\hat{A}^\top + Y B^\top + \hat{A}X + BY \prec 0$.

Pour obtenir l'autre sens de l'implication, (2.13) implique (2.14), et donc l'équivalence du théorème, il faut utiliser le "lemme d'élimination" ou "lemme de Finsler" qui découlent de la S-Procédure comme exposé dans [19]. La démonstration n'est pas reproduite ici. ■

Commentaires : Comme expliqué dans [19], cette opération de congruence qui consiste à multiplier l'équation S-Variable (2.14) à droite par la matrice $\begin{pmatrix} I \\ A^\top \end{pmatrix}$ et à gauche par sa transposée, matrice qui est orthogonale au terme $\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}^\top$ dans le terme de droite de (2.14) contenant les S-Variable ($\begin{pmatrix} A^\top & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A^\top \end{pmatrix} = 0$), est l'opération classique du formalisme S-Variable pour faire disparaître et apparaître les S-Variable.

Un intérêt principal de l'utilisation des S-Variable pour reformuler des résultats LMI d'analyse et de synthèse en automatique est l'introduction de nouvelles variables inconnues dans les LMI, tout en conservant une contrainte LMI équivalente.

Cela revient donc à une augmentation des degrés de liberté dans la résolution de la LMI, ce qui peut être très intéressant pour réduire le pessimisme, voire même obtenir des solutions, pour des problèmes très contraints où l'approche LMI directe de Lyapunov n'aurait pas de solution. L'approche S-Variable apparait donc en particulier intéressante pour le contrôle robuste polytopique, où l'on réplique les inégalités pour de nombreux sommets, contraignant davantage le problème LMI.

Cependant, ces inégalités matricielles S-Variable ne sont pas linéaires en toutes les inconnues : des multiplications entre matrices inconnues (A_o avec S et T) étant présentes. Il est donc nécessaire de procéder via une méthode heuristique qui donne au préalable une valeur à la matrice A_o, puis de résoudre cette inégalité qui devient une LMI.

Cette fois-ci, en cumulant toutes les contraintes LMI S-Variable pour chaque performance, les certificats de Lyapunov duaux X peuvent être différents pour chaque spécification en prenant une S-variable commune S pour toutes les contraintes. Cette méthode réduit le pessimisme de la première approche, et peut proposer des solutions là où la première approche avec un même certificat de Lyapunov n'en a pas.

2.3 Résumé de la stratégie d'analyse et synthèse

S'appuyant sur les résultats existants pour le contrôle robuste des systèmes LTI incertains (cf. [19]), la démarche de cette thèse a donc été de rechercher pour les systèmes LTV des fonctions de Lyapunov candidates *quadratiques* sous la forme $V(t,x) = x^\top P(t)x$, où P est une fonction du temps borné continûment dérivable associant à chaque instant t une matrice $P(t)$ symétrique définie positive :

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{C}^1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{S}^n_{++}; t \mapsto P(t) |\ \exists \overline{\lambda} > \underline{\lambda} > 0,\ \forall t \in [t_0, t_1] : \underline{\lambda} I \preceq P(t) \preceq \overline{\lambda} I\}$$

L'approche des *systèmes hybrides* [10] permet de considérer des fonctions de Lyapunov discontinues, mais cette approche n'a pas été étudiée dans cette thèse.

Les résultats d'analyse des performances des systèmes linéaires variant dans le temps sont développés dans le chapitre 3 suivant sur la base de l'existence d'un tel certificat de Lyapunov P. Tout naturellement, le théorème de Lyapunov appliqué aux systèmes LTV, avec ce type de fonctions de Lyapunov candidates, conduit à des Inégalités Linéaires Matricielles *Différentielles* (DLMI), la dérivée de $P(t)$ n'étant pas nulle dans la dérivée totale de la fonction de Lyapunov.

Les résultats sont donc formulés en plusieurs étapes :

— Dans un premier temps sous forme d'Inégalités Linéaires Matricielles Différentielles (DLMI) en la variable matricielle P, obtenues par dérivation directe de la fonction de Lyapunov $V(t,x) = x^\top P(t)x$ pour chaque performance consi-

dérée, dont l'expression générique peut s'écrire :

$$\tilde{\mathcal{L}}_{P,\Pi,\Sigma}(t, P, \dot{P}) \preceq 0$$

où $\tilde{\mathcal{L}}_{P,\Pi,\Sigma}$ est une application linéaire fonction des matrices variant dans le temps de la représentation d'état en boucle fermée et de paramètres caractérisant la performance considérée Π.

— Dans un deuxième temps, étant donné que pour un retour d'état, les produits du type $P(t)A(t) = P(t)\hat{A}(t) + P(t)B(t)K$ sont non linéaires en les inconnues $P(t)$ et K, les formulations précédentes sont converties en formulations *duales* qui impliquent des produits de type $A(t)X(t) = \hat{A}(t)X(t) + B(t)Y(t)$, avec $X(t) = P^{-1}(t)$ et $Y(t) = KX(t)$:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\Pi,\Sigma}(t, X, \dot{X}, Y) \preceq 0$$

qui permet de faire apparaître $X(t)$ et $Y(t)$ de manière linéaire. $\tilde{\mathcal{L}}_{\Pi,\Sigma}$ est une application linéaire fonction des matrices d'état variant dans le temps et en les paramètres de la performance considérée Π, obtenues suite au remaniement au format dual de la première formulation.

— Enfin, pour résoudre ces DLMI, la stratégie choisie dans la thèse pour traiter leur caractère *variant dans le temps*, est de considérer les solutions de ces DLMIs *duales* pour des certificats de Lyapunov constants (X constant) sur un polytope encadrant l'ensemble de la courbe de variation des matrices d'état.

On aboutit aux deux formulations suivantes sous formes d'Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) à résoudre simultanément pour tous les sommets $v = 1...\bar{v}$ du polytope encadrant la trajectoire des matrices variant dans le temps, résolution qui peut se faire directement avec des outils numériques d'optimisation convexe (Yalmip, Sedumi, SDTP-3) :

— Sous forme de Lyapunov :

$$\forall v = 1...\bar{v},\ \mathcal{L}_{\Pi,\Sigma^{[v]}}(X, Y) \preceq 0$$

où $\mathcal{L}_{\Pi,\Sigma}$ est une application linéaire fonction des sommets des matrices d'état variant dans le temps et des paramètres de la performance considérée Π, obtenues suite au passage à zéro de $\dot{X}$ et à la considération constantes égales aux sommets des matrices d'état.

— Sous forme S-Variable (comme développée dans [19]), avec S et A_o deux matrices carrés de même dimension que A, T une matrice de même dimension que K, tels que $K = TS^{-1}$:

$$\forall v = 1...\bar{v},\ \mathcal{S}_{\Pi,\Sigma^{[v]}}(X, S, T, A_o) \preceq 0$$

où $\mathcal{S}_{\Pi,\Sigma^{[v]}}$ est une application linéaire fonction des sommets des matrices d'état variant dans le temps et des paramètres de la performance considérée Π, obtenue suite au remaniement des inégalités de Lyapunov au

format S-variable (comme présenté une première fois avec le théorème 2.7 précédent).

Ces résultats sont finalement appliqués à un exemple de référence dans ce même chapitre 3, puis au problème du contrôle du mouvement de rotation d'un objet quelconque dans l'espace dans le chapitre 4.

3

Contrôle robuste des systèmes variant dans le temps

Dans ce chapitre, le cadre classique d'analyse LMI robuste multi-objectifs des systèmes Linéaires Temps Invariant (LTI) (principalement venant de [19]) est étendu aux systèmes Linéaires Variant dans le Temps (LTV). Les résultats concernent d'une part les propriétés des réponses temporelles telles que le taux d'amortissement, le temps de réponse, la pulsation maximale, et d'autre part les performances entrées-sorties. Les formulations DLMI pour l'analyse de ces performances sont données dans la première partie 3.1. Puis, les conditions LMI pour la synthèse de retour d'état invariant dans le temps, pour le cas particulier des systèmes variant pouvant être inclus dans un polytope, sont données dans la partie 3.2 . Ces résultats LMI sont donnés dans le formalisme de Lyapunov dans la partie 3.3.1 et dans le formalisme S-Variable dans la partie 3.3.2. Les résultats sont illustrés dans la partie 3.4 sur un exemple de référence, pour être appliqués ensuite au problème du contrôle d'attitude d'un objet quelconque dans le chapitre suivant.

3.1 Extension des résultats d'analyse des systèmes LTI aux systèmes LTV

On considère les systèmes Linéaires Variant dans le Temps (LTV) modélisés sous la forme suivante :

Définition 3.1: Système Linéaire Variant dans le Temps (LTV)

Soient les systèmes Linéaires Variant dans le Temps (LTV) à temps continu définis sur un intervalle de temps $[t_0; t_1]$ par :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}(t)x(t) + B(t)(u(t) + w(t)) \\ z(t) = C(t)x(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ tels que les matrices $\hat{A}(t), B(t), C(t)$, de dimensions appropriées, sont des fonctions réelles du temps possiblement discontinues.

Le système en boucle fermée avec un retour d'état *temps-invariant* $u(t) = Kx(t)$ est noté Σ et la matrice d'état en boucle fermée est notée :

$$A(t) = \hat{A}(t) + B(t)K$$

On considère que cette définition du modèle n'est valide que sur l'intervalle $[t_0; t_1]$. En outre, ce modèle peut représenter plus largement le fonctionnement d'un système non linéaire sur l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$. Les matrices variantes dans le temps peuvent donc être également des fonctions non linéaires des entrées et états $(A(t, x, u))$. En dehors de cet intervalle de temps, la modélisation du système pourrait être tout autre, voire inconnue.

De plus, on considère que le modèle est *centré en zéro*. Quelles que soient la nature du système réel et la manoeuvre que l'on souhaite réaliser sur cet intervalle de temps, on considère que, dans les étapes de modélisation, toutes les opérations nécessaires ont été faites pour que le point $x = 0$ soit l'unique point d'équilibre spécifié du système $\hat{\Sigma}$: c'est-à-dire que si $x(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0; t_1]$, alors le système réel réalise exactement la manoeuvre spécifiée sur l'intervalle de temps.

L'étude porte donc sur l'analyse du système en boucle fermée Σ sur l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$ avec comme point d'équilibre $x = 0$. La notion de *régime permanent* est utilisée dans la suite du manuscrit sans respecter rigoureusement sa définition mathématique liée à la convergence asymptotique à l'infini : on suppose ici que l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$ est très grand devant la borne supérieure de constante de temps du système en boucle fermée, permettant l'établissement d'un régime où toutes les variables du système ont convergé vers une valeur finale constante avec une erreur considérée négligeable ($t_1 - t_0 >> \tau_{max} = -\frac{1}{\alpha_2}$ pour le critère d'analyse du temps de réponse de la boucle fermée du théorème 3.4 page 32).

Avant de décliner les différents résultats d'analyse des performances du système en boucle fermée, il est nécessaire d'étudier au préalable le besoin d'annulation d'erreurs dues à l'entrée de perturbations w, qui peut avoir des profils quelconques sur l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$ selon le système étudié.

3.1.1 Précision de l'asservissement

Du fait de la stratégie de modélisation *centrée en zéro*, des incertitudes de modélisation et les perturbations réelles se retrouvent injectées dans le système par l'entrée w. Cette entrée de perturbation n'est donc potentiellement pas de moyenne nulle sur l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$ et peut générer une *erreur statique* sur la sortie. Voire elle peut se comporter de manière très variable avec des profils de croissance ou de décroissance plus ou moins rapide (rampe, t^2, t^3,...) sur tout ou partie de l'intervalle $[t_0; t_1]$ et générer des *"erreurs de trainage"*.

Le terme *"erreur de trainage"* ne correspond pas strictement à sa définition usuelle d'une erreur mesurée entre la sortie z et une consigne variable (de type rampe, t^2, t^3,...). Il s'agit ici de la valeur directe de la sortie z (moins la référence $z = 0$) qui ne converge pas vers zéro dû à une perturbation w variable (de type rampe, t^2, t^3,...). Par construction du modèle *centré en zéro*, les deux problématiques du suivi de consigne variable ou de rejet de perturbation variable sont équivalentes, d'où l'utilisation du terme *"erreurs de trainage"* pour étudier l'effet d'une perturbation variable sur la convergence de la sortie vers $z = 0$ et son erreur en régime permanent.

En fonction de la connaissance plus ou moins fine de la nature de ces perturbations et donc des profils potentiels du signal d'entrée w, nous pouvons donc avoir a priori connaissance du besoin d'annulation d'une erreur statique et de différents niveaux d'erreurs de trainage. Pour annuler l'erreur statique puis chaque ordre d'erreur de trainage supplémentaire, de manière classique en Automatique des systèmes LTI (cf. [23]), annuler un de ces niveaux d'erreur revient à ajouter dans le contrôleur un intégrateur du niveau d'erreur précédent comme représenté sur la figure 3.1.

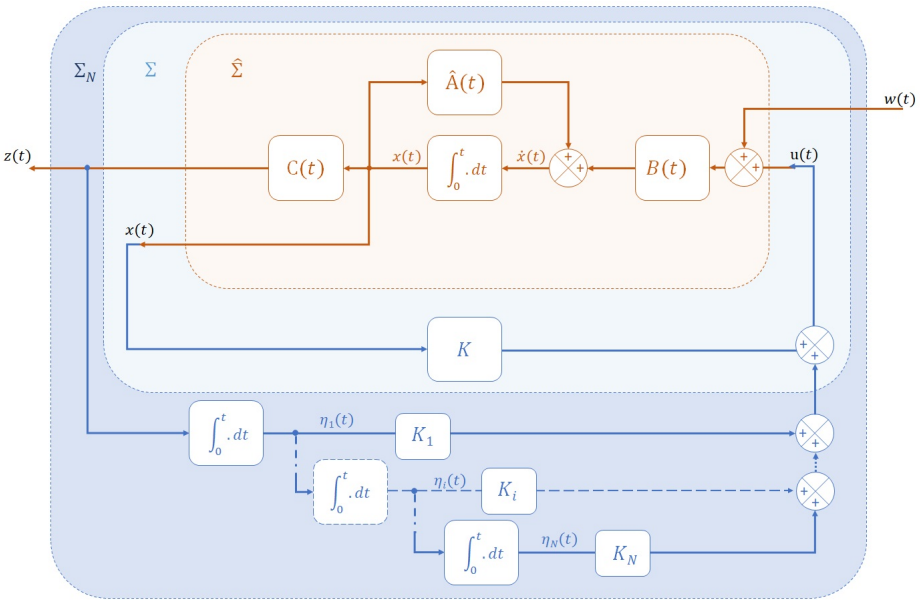

FIGURE 3.1 – Ajout de N intégrateurs à la commande pour annulation de l'erreur statique et $N-1$ niveaux d'erreur de trainage de la sortie $z(t)$.

Cela mène à la définition du système Linéaire Variant dans le Temps augmenté de N intégrateurs suivante :

Définition 3.2: Système LTV augmenté de N intégrateurs

Le système Linéaire Variant dans le Temps $\hat{\Sigma}$ défini par (3.1) augmenté de $N \in \mathbb{N}^*$ intégrateurs de l'erreur de sortie est noté $\hat{\Sigma}_N$ et est défini par :

$$\hat{\Sigma}_N : \begin{cases} \dot{x}_N(t) = \hat{A}_N(t)x_N(t) + B_N(t)(u(t) + w(t)) \\ z(t) = C_N(t)x_N(t) \end{cases} \tag{3.2}$$

avec $x_N(t) = (\eta_N \ ... \ \eta_1 \ x) \in \mathbb{R}^{n+Nn_z}$ et les matrices :

$$\hat{A}_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_z} & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & C(t) \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \hat{A}(t) \end{pmatrix}$$

$$B_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & B(t)^\top \end{pmatrix}^\top$$

$$C_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & C(t) \end{pmatrix}$$

Le système en boucle fermée avec un retour d'état *temps invariant* $u(t) = K_N x_N(t)$ comprend donc la commande liée aux N intégrateurs. Il est noté Σ_N et la matrice d'état en boucle fermée est notée :

$$A_N(t) = \hat{A}_N(t) + B_N(t)K_N$$

Théorème 3.3: Erreur statique et erreurs de trainage

Le système Σ_N donné par la définition 3.2, correspondant au système LTV original Σ de la définition 3.1 augmenté de N intégrateurs, permet s'il est asymptotiquement stable :

d'annuler en régime permanent l'erreur statique et les $N-1$ ordres d'erreur de trainage de la sortie $z(t)$

générées par l'entrée de perturbations de forme $w(t) = \sum_{i=1..N} w_i t^{i-1}$, $\forall w_i \in \mathbb{R}^{n_u}$.

Commentaire : Attention, il s'agit bien d'erreurs sur la sortie $z(t)$ et non sur l'état complet x_N augmenté de N intégrateurs qui lui ne converge pas vers 0 lorsque w est non nulle.

Preuve : Ce théorème découle d'un principe d'Automatique élémentaire pour les systèmes Linéaires Temps Invariant (cf. [23]).

Pour les systèmes variant dans le temps, la matrice en boucle fermée s'écrit :

$$A_N(t) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_z} & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & I_{n_z} & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & C(t) \\ B(t)K_{\eta_N} & B(t)K_{\eta_{N-1}} & ... & B(t)K_{\eta_2} & B(t)K_{\eta_1} & \hat{A}(t) + B(t)K \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc l'équation différentielle pour la dernière ligne :

$$\begin{aligned} \dot{x} \ &= B(t)K_{\eta_N}\eta_N + B(t)K_{\eta_{N-1}}\eta_{N-1} + ... + B(t)K_{\eta_2}\eta_2 + B(t)K_{\eta_1}\eta_1 \\ &\quad + (\hat{A}(t) + B(t)K)x + B(t)w(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pour que le système en boucle fermée puisse converger en régime permanent vers $z = C(t)x = 0$ pour les différentes puissances du temps en entrée de perturbation $w(t) = w_i t^i$, $\forall w_i \in \mathbb{R}^{n_u}$ constante, nous pouvons obtenir par dérivation successive de cette équation différentielle qu'il est suffisant d'avoir au moins un intégrateur supplémentaire par puissance de t que l'on souhaite pouvoir rejeter dans la perturbation.

On entend par *régime permanent* un régime de fonctionnement du système où la sortie de performance $z(t)$ a atteint un comportement "répétitif à l'infini" (constant ou oscillatoire). Dans notre cas, il s'agit d'une convergence de la sortie $z(t)$ vers 0. Comme expliqué lors de la définition du système (3.1), on considère que l'intervalle de temps $[t_0; t_1]$ est suffisamment grand devant la constante de temps maximale du système pour que les valeurs aient eu le temps de converger sur cet intervalle. Notamment l'état x aura convergé vers une valeur finale constante notée x_f (qui n'est pas forcément zéro), mais qui permet d'avoir $z = C(t_1)x_f = 0$, $\dot{x} = 0$, $\ddot{x} = 0$,... en régime permanent.

Démontrons que pour tout i, l'ajout de i intégrateurs permets d'annuler une perturbation $w(t) = w_{i-1}t^{i-1}$, $\forall w_i \in \mathbb{R}^{n_u}$ constant :

— Pour une perturbation constante $w_0 \in \mathbb{R}^{n_u}$ telle que $w(t) = w_0$ pour tout $t \in [t_0; t_1]$, en prenant l'équation (3.3) avec un seul intégrateur, on obtient en régime permanent :

$$B(t)K_{\eta_1}\eta_1 + (\hat{A}(t) + B(t)K)x_f + B(t)w_o = 0$$

L'ajout d'un intégrateur permet donc d'annuler l'erreur statique si cette équation en η_1 permet de compenser la perturbation, soit si :

$$K_{\eta_1}\eta_1 + w_o = 0$$

$K_{\eta_1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_z}$ avec en général $n_u < n_z$. Cette équation a donc de nombreuses solutions dont celle obtenue en utilisant la matrice pseudo-inverse de K_{η_1} :

$$\eta_1 = -K_{\eta_1}^{\#} w_o$$

De plus, le retour d'état étant synthétisé pour que le système en boucle fermée soit stable, la matrice d'état en boucle fermée à l'instant final $\hat{A}(t_1) + B(t_1)K$ est Hurwitz, donc inversible, donc nous avons en régime permanent $x_f = 0$ (qui implique bien $z(t_1) = 0$).

L'ajout d'un intégrateur permet donc d'annuler les perturbations statiques pour les systèmes variant dans le temps.

— Pour une perturbation en rampe $w(t) = w_1 t$ avec $w_1 \in \mathbb{R}^{n_u}$ constant, en dérivant une fois l'équation (3.3) avec deux intégrateurs en régime permanent ($z = 0$, $\dot{x} = 0$ et $\ddot{x} = 0$, et en supposant directement que $x = 0$ aussi), on obtient :

$$\dot{B}(t)(K_{\eta_2}\eta_2 + K_{\eta_1}\eta_1 + w_1 t) + B(t)(K_{\eta_2}\eta_1 + w_1) = 0$$

Indépendamment des variations de $B(t)$, cette équation en η_1 et η_2 peut avoir des solutions :
$\eta_1 = -K_{\eta_2}^{\#} w_1$
$\eta_2 = -K_{\eta_2}^{\#} w_1 t + K_{\eta_2}^{\#}\ K_{\eta_1}\ K_{\eta_2}^{\#}\ w_1$
L'ajout de deux intégrateurs permet donc d'annuler une erreur en rampe pour les systèmes variant dans le temps.

— Pour une perturbation en polynôme du temps de puissance $i - 1 \geq 1$ telle que $w(t) = w_{i-1} t^{i-1}$, on obtient une relation semblable à celle de la rampe précédente pour la $(i-1)^{ième}$ dérivée de (3.3) avec i intégrateurs :

$$\frac{d^{i-1}B(t)}{dt^{i-1}} f_i(\eta_i, ..., \eta_2, \eta_1, w_i t^i) + ... + \dot{B}(t) f_2(\eta_2, \eta_1, w_i t) + B(t) f_1(\eta_1, w_i) = 0$$

avec les f_i des fonctions linéaires qui doivent être toutes nulles si $B(t)$ est variable :

$$f_j(\eta_j, ..., \eta_2, \eta_1, w_i t^i) = 0$$

Sans rentrer dans le détail du calcul et des équations, l'ensemble de ces équations linéaires peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{\eta_i} & 0 & ... & 0 \\ a_{1\eta_{i-1}} K_{\eta_{i-1}} & K_{\eta_i} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i-1\eta_1} K_{\eta_1} & a_{i-1\eta_2} K_{\eta_2} & ... & K_{\eta_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ ... \\ ... \\ \eta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_u} \\ I_{n_u} t \\ ... \\ I_{n_u} t^i \end{pmatrix} w_i$$

Avec les coefficients $a_{j\eta_i}$ des constantes. La matrice étant triangulaire elle est inversible, et il existe donc une solution en régime permanent pour les η_j.

L'ajout de i intégrateurs permet donc d'annuler une perturbation de la forme $w(t) = w_i t^i$.

Le théorème est prouvé. ■

Dans cette thèse, nous focalisons sur la synthèse de retour d'état statique pour les systèmes linéaires variant dans le temps donné par la définition 3.1, avec par conséquent l'ajout éventuel de N intégrateurs sur l'erreur de sortie en fonction de la nature du système et de la spécification du rejet de perturbations.

Pour ne pas alourdir les notations dans la suite du manuscrit, nous écrirons tous les résultats d'analyse et de synthèse sur la base des notations données par la définition 3.1 :

$$\hat{A}(t) \text{ boucle ouverte, } A(t) \text{ boucle fermée, } B(t),\ C(t)$$

sachant que, pour répondre à des spécifications d'annulation d'erreurs statique ou de trainage, ces matrices peuvent en fait correspondre au système original augmenté de N intégrateurs comme donné par la définition 3.2 et représenté sur la figure 3.2.

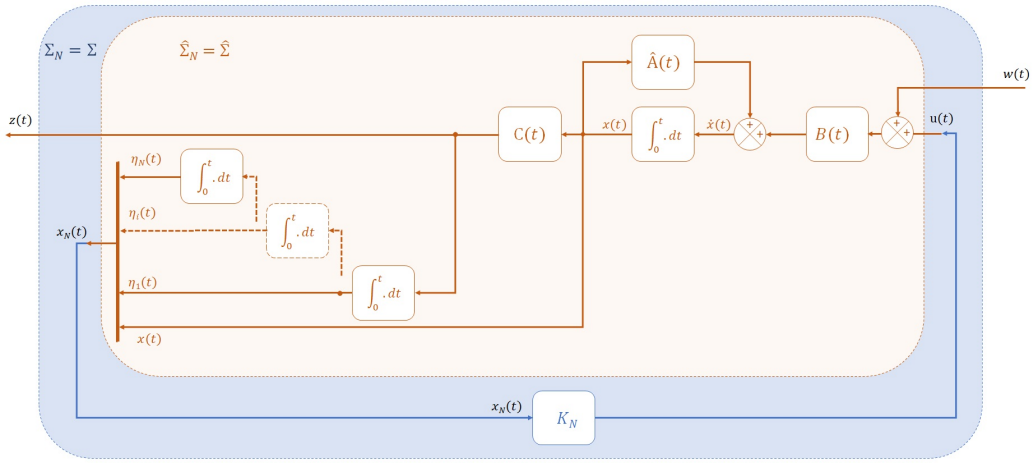

FIGURE 3.2 – Système augmenté de N intégrateurs, en fonction du besoin d'annulation d'erreurs statique ou de trainage dues à l'entrée de perturbation w, assimilé au système étudié.

3.1.2 Performances temporelles

Le premier critère de performance analysé est le taux de variation, correspondant classiquement à la constante de temps des systèmes LTI, permettant de caractériser le temps de réponse du système variant dans le temps.

Taux de variation :

Les bornes inférieure et supérieure du taux de variation des réponses temporelles peuvent être encadrées respectivement par α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ si le théorème suivant est vérifié, correspondant au résultat de stabilité exponentielle existant notamment présenté dans [62] :

Théorème 3.4: Taux de variation

Supposons qu'il existe $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2 \in \mathcal{P}$, deux scalaires positifs $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, deux réels $\alpha_1 < \alpha_2$, tels que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0; t_1]$:

$$\begin{aligned} &P_1(t) \preceq \lambda_1 I, \quad 2\alpha_1 P_1(t) \preceq \{P_1(t)A(t)\}^{\mathcal{H}} + \dot{P}_1(t), \\ &\lambda_2 I \preceq P_2(t), \quad \dot{P}_2(t) + \{P_2(t)A(t)\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\alpha_2 P_2(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

alors les trajectoires solutions de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sont encadrées par les exponentielles suivantes sur l'intervalle $[t_0; t_1]$:

$$\beta_1(t_0)e^{\alpha_1 t} \leq \|x(t)\| \leq \beta_2(t_0)e^{\alpha_2 t} \tag{3.5}$$

où $\beta_k^2(t_0) = \lambda_k^{-1} x(t_0)^\top P_k(t_0)x(t_0)$, $k = 1, 2$.

Preuve : Soit $x(t)$ solution du système (3.1) en boucle fermée sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ pour des conditions initiales $x(t_0)$ données. Par congruence, les DLMI (3.4) impliquent le long des trajectoires que (la dépendance dans le temps t est abandonnée pour améliorer la lisibilité des formules) :

$$\begin{aligned} &2\alpha_1 x^\top P_1 x \leq \{x^\top P_1 \dot{x}\}^{\mathcal{H}} + x^\top \dot{P}_1 x, \\ &x^\top \dot{P}_2 x + \{x^\top P_2 \dot{x}\}^{\mathcal{H}} \leq 2\alpha_2 x^\top P_2 x. \end{aligned}$$

Soit $V_1(t) = x^\top(t)P_1(t)x(t)$ et $V_2(x) = x^\top(t)P_2(t)x(t)$. Ces fonctions scalaires satisfont donc aux inégalités différentielles suivantes :

$$2\alpha_1 V_1(t) \leq \dot{V}_1(t) \quad , \quad \dot{V}_2(t) \leq 2\alpha_2 V_2(t).$$

Le principe de comparaison (voir [30]) sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ implique :

$$V_1(t_0)e^{2\alpha_1 t} \leq V_1(t) \quad , \quad V_2(t) \leq V_2(t_0)e^{2\alpha_2 t}.$$

Puisque $V_1(t) \leq \lambda_1 \|x(t)\|^2$ et $\lambda_2 \|x(t)\|^2 \leq V_2(t)$ pour tous les temps $t \in [t_0; t_1]$, le théorème est prouvé. ■

La preuve suit la ligne classique de la démonstration de la stabilité exponentielle ([9], [62]). Ainsi, si $\alpha_2 < 0$, le théorème 3.4 prouve la stabilité exponentielle du système avec un taux de décroissance borné par α_2. Nous retrouvons alors la définition classique de la constante de temps pour les systèmes LTI avec $\alpha_1 = -\frac{1}{\tau_{min}}$

et $\alpha_2 = -\frac{1}{\tau_{max}}$, $\tau_{max} > \tau_{min} > 0$ deux constantes de temps bornant les dynamiques du système telles que :

$$\beta_1(t_0)e^{-\frac{1}{\tau_{min}}t} \leq \|x(t)\| \leq \beta_2(t_0)e^{-\frac{1}{\tau_{max}}t}$$

Le temps de réponse à 95% du système LTV étant classiquement borné par $3\tau_{max}$.

Les résultats suivants utilisent la même démarche pour conclure sur le coefficient d'amortissement et sur la borne maximale de la fréquence d'oscillation de l'état, qui sont à notre connaissance deux nouveaux résultats dans le cas des systèmes variant dans le temps.

Coefficient d'amortissement :

Définition 3.5: Définition du coefficient d'amortissement pour les systèmes variant dans le temps

Le coefficient d'amortissement des trajectoires d'un système est caractérisé par *le rapport entre le taux de décroissance et la fréquence des réponses de type oscillatoire.*
Ce rapport est borné par $\tan(\theta)$ dans le théorème 3.6 suivant.

Classiquement pour les systèmes LTI, le coefficient d'amortissement appelé ξ est lié à la notion de mode et de placement de poles. Il est égale à $\sin(\theta)$ avec cette définition de θ. Pour $\theta = 0$ il n'y a pas d'amortissement prouvé. Pour $\theta = \pi/2$ l'amortissement est infini signifiant qu'il n'y a pas de trajectoires oscillantes.

En s'inspirant de l'approche de modulation/démodulation exposé dans [7], on considère les réponses des systèmes variant dans le temps de type oscillatoire à la pulsation ω définies de manière complexe par :

$$x(t) = (x_1(t) + jx_2(t))e^{j(\omega t+\phi)} \tag{3.6}$$

sans autre hypothèse sur x_1 et x_2 que d'être différentiables et réels. La partie réelle de ce signal

$$x_1(t)\cos(\omega t + \phi) - x_2(t)\sin(\omega t + \phi)$$

qui est la partie du signal qui nous intéresse pour le système évoluant dans $\mathbb{R}^n$, aura donc la même propriété de taux de décroissance.

A notre connaissance, ce théorème est un nouveau résultat d'analyse des systèmes linéaires variant dans le temps :

Théorème 3.6: Coefficient d'amortissement

Soit $\theta \in [\,0\ ,\ \pi/2\,]$ et supposons qu'il existe $P_3 \in \mathcal{P}$ et un scalaire $\lambda_3 > 0$ tels que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0; t_1]$:

$$\lambda_3 I \preceq P_3(t), \quad \{e^{-j\theta} P_3(t) A(t)\}^{\mathcal{H}} + \cos(\theta)\dot{P}_3(t) \preceq 0 \tag{3.7}$$

alors toute réponse de type oscillatoire à la fréquence ω de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ décroît exponentiellement comme suit sur l'intervalle $[t_0; t_1]$:

$$\|x(t)\| \leq \beta_3(t_0) e^{-\omega \tan(\theta) t} \tag{3.8}$$

où $\beta_3^2(t_0) = \lambda_3^{-1}(x_1(t_0)^\top P_3(t_0) x_1(t_0) + x_2(t_0)^\top P_3(t_0) x_2(t_0))$. Ainsi, après n périodes d'oscillation sur l'intervalle $[t_0; t_1]$, la décroissance est telle que $\|x(t_0 + 2n\pi/\omega)\| \leq \beta_3(t_0) e^{-2n\pi \tan(\theta)}$.

Preuve : Soit $x(t)$ une solution complexe du système $\dot{x} = A(t)x(t)$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ oscillante définie comme précédemment par (3.6) :

$$x(t) = (x_1(t) + j x_2(t)) e^{j(\omega t + \phi)}$$

Pour faciliter le calcul, on note le signal complexe $x_\omega(t) = x_1(t) + j x_2(t)$.

La DLMI (3.7) implique par congruence avec la trajectoire $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ que :

$$\{x^*(t) e^{-j\theta} P_3 A(t) x(t)\}^{\mathcal{H}} + \cos(\theta) x^*(t) \dot{P}_3 x(t) \leq 0$$

en remplaçant avec $x(t) = x_\omega(t) e^{j(\omega t + \phi)}$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_\omega(t) e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega x_\omega(t) e^{j(\omega t + \phi)}$, et en rappelant que $e^{-j(\omega t + \phi)} e^{j(\omega t + \phi)} = 1$, cette inégalité est équivalente à :

$$\begin{aligned} &e^{-j\theta} x_\omega(t)^* P_3 (\dot{x}_\omega(t) + j\omega x_\omega(t)) + e^{j\theta} (\dot{x}_\omega(t)^* - j\omega x_\omega(t)^*) P_3 x_\omega(t) \\ &+ \cos(\theta) x_\omega(t)^* \dot{P}_3 x_\omega(t) \leq 0 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à, en développant le terme $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$:

$$\cos(\theta) x_\omega(t)^* P_3 (\dot{x}_\omega(t) + j\omega x_\omega(t)) + \cos(\theta) (\dot{x}_\omega(t)^* - j\omega x_\omega(t)^*) P_3 x_\omega(t)$$

$$- j\sin(\theta) x_\omega(t)^* P_3 (\dot{x}_\omega(t) + j\omega x_\omega(t)) + j\sin(\theta) (\dot{x}_\omega(t)^* - j\omega x_\omega(t)^*) P_3 x_\omega(t)$$

$$+ \cos(\theta) x_\omega(t)^* \dot{P}_3 x_\omega(t) \leq 0$$

les termes complexes s'annulent deux à deux, cette inégalité est donc équivalente à :

$$\cos(\theta)\ (x_\omega(t)^* P_3 \dot{x}_\omega(t) + \dot{x}_\omega(t)^* P_3 x_\omega(t) + x_\omega(t)^* \dot{P}_3 x_\omega(t)) + 2\sin(\theta)\ \omega\ x_\omega(t)^* P_3 x_\omega(t) \leq 0$$

En posant

$$V_3(t) = x(t)^* P_3(t) x(t) = x_\omega(t)^* P_3(t) x_\omega(t) = x_1(t)^\top P_3(t) x_1(t) + x_2(t)^\top P_3(t) x_2(t)$$

on obtient la relation équivalente suivante :

$$\cos(\theta)\ \dot{V}_3(t) \leq -2\omega\ \sin(\theta)\ V_3(t)$$

Un cas particulier est celui où $\theta = \pi/2$. Dans ce cas, on obtient

$$0 \leq -2\omega V_3(t, \omega) \leq 0$$

l'inégalité du côté droit provenant du fait que V_3 est définie positive. Cela signifie que la seule réponse oscillatoire du système ($\omega \neq 0$) est telle que $V_3 = 0$, *ie.* la solution triviale $x = 0$. Dans tous les cas, le principe de comparaison implique sur l'intervalle $[t_0; t_1]$:

$$V_3(t) \leq V_3(t_0) e^{-2\omega \tan(\theta) t}$$

Puisque $\lambda_3 \|x(t)\|^2 \leq V_3(t)$ pour tous $t \in [t_0; t_1]$, le théorème est prouvé. ■

Pulsation propre :

Le théorème suivant prouve la limite de pulsation des réponses oscillatoires définies comme pour le théorème précédent, et est à notre connaissance un nouveau résultat d'analyse des systèmes linéaires variant dans le temps :

Théorème 3.7: Pulsation propre maximale

Supposons qu'il existe $P_4 \in \mathcal{P}$ et $\overline{\omega} > 0$ tels que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0; t_1]$:

$$\{-jP_4(t)A(t)\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\overline{\omega} P_4(t) \tag{3.9}$$

alors les réponses de type oscillatoire de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ n'existent que pour les pulsations $\omega \leq \overline{\omega}$.

Preuve : Soit $x(t)$ une solution complexe du système $\dot{x} = A(t)x(t)$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ oscillante définie comme pour le théorème précédent par (3.6) :

$$x(t) = (x_1(t) + jx_2(t))e^{j(\omega t + \phi)} = x_\omega(t) e^{j(\omega t + \phi)}$$

Par congruence avec la trajectoire $x(t)$, la DLMI (3.9) implique sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ que :

$$\{-jx^*(t)P_4 A(t)x(t)\}^{\mathcal{H}} \leq 2\overline{\omega} x^*(t) P_4(t) x(t)$$

avec $\dot{x} = A(t)x(t)$, $x(t) = x_\omega(t)e^{j(\omega t+\phi)}$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_\omega(t)e^{j(\omega t+\phi)} + j\omega x_\omega(t)e^{j(\omega t+\phi)}$, et en rappelant que $e^{-j(\omega t+\phi)}e^{j(\omega t+\phi)} = 1$, cette inégalité est équivalente à :

$$\{-jx_\omega(t)^* P_4(\dot{x}_\omega(t) + j\omega x_\omega(t))\}^{\mathcal{H}} \leq 2\overline{\omega} x_\omega(t)^* P_4 x_\omega(t)$$

qui est équivalente à :

$$\{\omega\ x_\omega(t)^* P_4 x_\omega(t)\}^{\mathcal{H}} \leq 2\overline{\omega}\ x_\omega(t)^* P_4 x_\omega(t)$$

Ce qui donne, avec

$$V_4(t) = x^*(t)P_4(t)x(t) = x_\omega^*(t)P_4(t)x_\omega(t) = x_1^\top(t)P_4(t)x_1(t) + x_2^\top(t)P_4(t)x_2(t)$$

la relation équivalente suivante :

$$2\omega V_4(t) \leq 2\overline{\omega} V_4(t)$$

Si $\omega > \overline{\omega}$, la seule solution est $V_4 = 0$, *ie.* la solution triviale $x = 0$. ■

3.1.3 Performances entrées-sorties

Les définitions des normes entrées-sorties utilisées ci-dessous sont reprises du livre S-Variable [19]. Lorsque les systèmes sont LTI et les matrices de Lyapunov constantes, on retrouve notamment directement les théorèmes d'analyse proposés dans ce dernier ouvrage. Il y a continuité entre les résultats d'analyse pour les systèmes LTI et LTV.

Performance Norme-à-Norme :

La performance Norme-à-Norme du système (3.1) évalue le pire ratio entre la norme tronquée $\mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ de la sortie $z(t)$ et celle de l'entrée de perturbation $w(t)$, à partir d'une condition initiale nulle $x(t_0) = 0$:

$$\sup_{w\in\mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}, w\neq 0} \frac{||z||_{2_{[t_0;t_1]}}}{||w||_{2_{[t_0;t_1]}}} = \bar{\gamma}_\infty \tag{3.10}$$

Théorème 3.8: Performance Norme-à-Norme

Soit $\gamma_\infty > 0$ et supposons qu'il existe $P_5 \in \mathcal{P}$ tels que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0; t_1]$:

$$\begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \dot{P}_5(t) & P_5(t) \\ P_5(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_x} & 0 \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C(t) & D_w(t) \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} I_{n_z} & 0 \\ 0 & -\gamma_\infty^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C(t) & D_w(t) \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix} \preceq 0 \tag{3.11}$$

alors les trajectoires du système (3.1) sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ sont telles que :

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}, w \neq 0} \frac{||z||_{2_{[t_0;t_1]}}}{||w||_{2_{[t_0;t_1]}}} = \bar{\gamma}_\infty \leq \gamma_\infty \tag{3.12}$$

La performance Norme-à-Norme du système (3.1) est bornée par γ_∞.

Commentaires : Ce théorème est donné avec la possibilité d'un transfert direct de la perturbation d'entrée vers la sortie non nulle, de telle sorte que $z(t) = C(t)x(t) + D_w(t)w(t)$.

Le résultat obtenu est similaire au résultat de performance H_∞ du lemme KYP pour les systèmes LTI (cf. [48]). Ce résultat couplé au théorème 3.4 est aussi équivalent au résultat présenté dans [26] avec l'approche IQC.

Preuve : La DLMI (3.11) peut se réécrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}_5(t) + P_5(t)A(t) + A(t)^\top P_5(t) + C(t)^\top C(t) & P_5(t)B(t) + C(t)^\top D_w(t) \\ B(t)^\top P_5(t) + D_w(t)^\top C(t) & D_w(t)^\top D_w(t) - \gamma_\infty^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \preceq 0$$

Par congruence de cette DLMI avec le vecteur $(x^\top w^\top)^\top$, en posant $V_5(t) = x^\top(t)P_5(t)x(t)$, on obtient sur les trajectoires de (3.1) en boucle fermée sur l'intervalle $[t_0; t_1]$, en rappelant que $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t)$ et $z(t) = C(t)x(t) + D_w(t)w(t)$, directement que :

$$\dot{V}_5(t) + ||z(t)||^2 \leq \gamma_\infty^2 ||w(t)||^2$$

En intégrant cette inégalité de t_0 à t_1, en rappelant que $x(t_0) = 0$, donc $V_5(t_0) = 0$, on a :

$$V_5(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} ||z(t)||^2 dt \leq \gamma_\infty^2 \int_{t_0}^{t_1} ||w(t)||^2 dt$$

Comme $V_5(t_1) \geq 0$, on obtient $||z||_{2_{[t_0;t_1]}} \leq \gamma_\infty ||w||_{2_{[t_0;t_1]}}$. ■

Cas particulier : Si la DLMI (3.11) est vraie pour $t_0 = 0$ et $t_1 = +\inf$, c'est-à-dire pour $t \in \mathbb{R}_+$, par passage à la limite de cette dernière inégalité, on obtient que $||z||_2 \leq \gamma_\infty ||w||_2$.

Performance Impulsion-à-Norme :

La performance Impulsion-à-Norme évalue la pire norme tronquée $\mathcal{L}_{2_{[t_0;t_1]}}$ sur l'intervalle $[t_0;t_1]$ de la sortie $z(t)$ de (3.1) pour un ensemble donné de conditions initiales $x(t_0) = B(t_0)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n_w}$, $||\alpha|| \leq 1$, (ou de manière équivalente pour les conditions initiales nulles et les perturbations impulsionnelles $w(t_0) = \alpha\delta(t - t_0)$ où δ est l'impulsion de Dirac) :

$$\sup_{||\alpha||\leq 1} ||z||_{2_{[t_0;t_1]}} = \bar{\gamma}_2 \tag{3.13}$$

Théorème 3.9: Performance Impulsion-à-Norme

Soit $\gamma_2 > 0$, $P_6 \in \mathcal{P}$ tels que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0;t_1]$:

$$\begin{cases} \{P_6(t)A(t)\}^{\mathcal{H}} + \dot{P}_6(t) + C(t)^\top C(t) \preceq 0, \\ B^\top(t_0)P_6(t_0)B(t_0) \preceq \gamma_2^2 I_{n_w} \end{cases} \tag{3.14}$$

alors, quelles que soient les conditions initiales telles que $x(t_0) = B(t_0)\alpha$ avec $||\alpha|| \leq 1$, les trajectoires du système (3.1) sur l'intervalle $[t_0;t_1]$ sont telles que :

$$\sup_{||\alpha||\leq 1} ||z||_{2_{[t_0;t_1]}} = \bar{\gamma}_2 \leq \gamma_2 \tag{3.15}$$

ie. la performance Impulsion-à-Norme du système (3.1) est limitée par γ_2.

Preuve : En définissant $V_6(t) = x^\top(t)P_6(t)x(t)$, par congruence de la première DLMI de (3.14) avec le vecteur x, on obtient que les trajectoires solutions de (3.1) en boucle fermée vérifient sur l'intervalle $[t_0;t_1]$:

$$\dot{V}_6(t) + ||z(t)||^2 \leq 0$$

et par congruence de la deuxième avec le vecteur α de norme 1 on obtient :

$$V_6(t_0) \leq \gamma_2^2$$

En intégrant la première inégalité de t_0 à t_1 et en combinant avec la deuxième inégalité, nous obtenons :

$$V_6(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} ||z(t)||^2 dt \leq V_6(t_0) \leq \gamma_2^2$$

Comme $V_6(t_1) \geq 0$, on obtient que $||z||_{2_{[t_0;t_1]}} \leq \gamma_2$. ■

Cas particulier : Si les DLMI (3.14) sont vraies pour $t_0 = 0$ et $t_1 = +\inf$, c'est-à-dire pour $t \in \mathbb{R}_+$, par passage à la limite de cette dernière inégalité, on obtient que $||z||_2 \leq \gamma_2$.

Performance Impulsion-à-Crête :

La performance Impulsion-à-Crête évalue la pire amplitude instantanée de la sortie $z(t)$ de (3.1) sur un intervalle $[t_0; t_1]$ pour un ensemble donné de conditions initiales $x(t_0) = B(t_0)\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n_w}$, $||\alpha|| \leq 1$, (ou de manière équivalente pour les conditions initiales nulles et les perturbations impulsionnelles $w(t) = \alpha\delta(t - t_0)$ où δ est l'impulsion de Dirac) :

$$\sup_{t\in[t_0;t_1],||\alpha||=1} ||z(t)|| = \bar{\gamma}_{IP} \tag{3.16}$$

Théorème 3.10: Performance Impulsion-à-Crête

Soit $\gamma_{IP} > 0$, supposons qu'il existe $P_7 \in \mathcal{P}$ tel que les DLMI suivantes sont vérifiées pour tout $t \in [t_0; t_1]$:

$$\begin{cases} \{P_7(t)A(t)\}^{\mathcal{H}} + \dot{P}_7(t) \preceq 0 \\ B(t_0)^\top P_7(t_0)B(t_0) \preceq \gamma_{IP}^2 I_{n_w} \\ C(t)^\top C(t) \preceq P_7(t) \end{cases} \tag{3.17}$$

alors les trajectoires du système (3.1) sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ sont telles que :

$$\sup_{t\in[t_0;t_1],\alpha\in\mathbb{R}^{n_\alpha},||\alpha||=1} ||z(t)|| = \bar{\gamma}_{IP} \leq \gamma_{IP} \tag{3.18}$$

La performance Impulsion-à-Crête du système (3.1) est bornée par γ_{IP}.

Preuve : Soit $x(t)$ la solution du système (3.1) en boucle fermée pour les conditions initiales $x(t_0) = B(t_0)\alpha$, $||\alpha|| = 1$, sans perturbation $w(t) = 0$. En définissant $V_7(t) = x^\top(t)P_7(t)x(t)$, par congruence de la première et troisième DLMI (3.17) avec le vecteur x et par congruence de la deuxième avec le vecteur α de norme 1, on obtient sur les trajectoires sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ que :

$$\dot{V}_7(t) \leq 0 \quad , \quad V_7(0) \leq \gamma_{IP}^2 \quad , \quad ||z(t)||^2 - V_7(t) \leq 0$$

En intégrant la première inégalité de t_0 à t et en combinant ces trois inégalités, on obtient :

$$||z(t)||^2 \leq V_7(t) \leq V_7(t_0) \leq \gamma_{IP}^2.$$

L'inégalité est valable pour tout $t \in [t_0; t_1]$, donc pour la valeur maximale de $||z(t)||$ sur l'intervalle $[t_0; t_1]$. ■

Cette performance permet de caractériser précisément la boule maximale dans laquelle on souhaite faire évoluer le signal de sortie complet pour des conditions initiales maximales données. Elle est donc très utile et fait partie des exigences usuelles pour dimensionner un contrôleur selon un contexte opérationnel donné.

Elle permet notamment de borner les matrices de la représentation d'état lorsque celles-ci sont aussi fonction de l'état ou de la sortie, comme le propose l'heuristique 3.15 page 44 pour les systèmes LTV évoluant dans un polytope.

3.1.4 Formulations duales

Comme présenté dans le chapitre 2 donnant les préliminaires théoriques, il est bien établi que la synthèse de contrôleur par retour d'état statique a des solutions convexes lorsque les formules précédentes, qui impliquent des produits du type $P(t)A(t) = P(t)\hat{A}(t) + P(t)B(t)K$, sont converties en une formulation duale qui implique des produits de type $A(t)X(t) = \hat{A}(t)X(t) + B(t)Y(t)$, où $X(t) = P^{-1}(t)$ et $Y(t) = KX(t)$.

Nous reprenons donc, selon ce changement de variable, l'ensemble des théorèmes précédents et reformulons l'ensemble des DLMI au format *dual* dans le corollaire unique suivant :

Corollaire 3.11: Formulations duales des DLMI de performances temporelles

Les formulations duales des DLMI des théorèmes 3.4 à 3.7 précédents sur les performances temporelles sur un intervalle $[t_0; t_1]$ sont les suivantes :

— Formulation duale de (3.4), taux de variation :

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{-1} I \preceq X_1(t), \quad 2\alpha_1 X_1(t) \preceq \{A(t)X_1(t)\}^{\mathcal{H}} - \dot{X}_1(t), \\ &X_2(t) \preceq \lambda_2^{-1} I, \quad -\dot{X}_2(t) + \{A(t)X_2(t)\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\alpha_2 X_2(t). \end{aligned} \tag{3.19}$$

— Formulation duale de (3.7), coefficient d'amortissement :

$$X_3(t) \preceq \lambda_3^{-1} I, \quad \{e^{-j\theta} A(t)X_3(t)\}^{\mathcal{H}} - \cos(\theta)\dot{X}_3(t) \preceq 0. \tag{3.20}$$

— Formulation duale de (3.9), pulsation propre maximale :

$$\{-jA(t)X_4(t)\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\overline{\omega} X_4(t). \tag{3.21}$$

Corollaire 3.12: Formulations duales des DLMI de performances entrées/sorties

Les formulations duales des DLMI des théorèmes 3.8 à 3.10 précédents sur les performances entrées/sorties sur un intervalle $[t_0; t_1]$ sont les suivantes :

— Formulation duale de (3.11), performance Norme-à-Norme :

$$\begin{pmatrix} I_{n_x} & A(t) \\ 0 & C(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{X}_5(t) & X_5(t) \\ X_5(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_x} & A(t) \\ 0 & C(t) \end{pmatrix}^\top + \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ D_w(t) & I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_\infty^{-2} I_{n_w} & 0 \\ 0 & -I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) & 0 \\ D_w(t) & I_{n_z} \end{pmatrix}^\top \preceq 0. \tag{3.22}$$

— Formulation duale de (3.14), performance Impulsion-à-Norme :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \{A(t)X_6(t)\}^{\mathcal{H}} - \dot{X}_6(t) & X_6(t)C(t)^\top \\ C(t)X_6(t) & -I_{n_z} \end{pmatrix} \preceq 0, \\ \gamma_2^{-2} B(t_0)B^\top(t_0) \preceq X_6(t_0) \end{cases} \tag{3.23}$$

— Formulation duale de (3.17), performance Impulsion-à-Crête :

$$\begin{cases} \{A(t)X_7(t)\}^{\mathcal{H}} - \dot{X}_7(t) \preceq 0, \\ \gamma_{IP}^{-2} B(t_0)B^\top(t_0) \preceq X_7(t_0), \\ C(t)X_7(t)C^\top(t) \preceq I_{n_z}. \end{cases} \tag{3.24}$$

Preuve : Ces dernières formules sont directement obtenues par remaniement des équations avec $P = X^{-1}$ et en rappelant que $\dot{P} = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}$.

3.2 Cas des systèmes LTV bornés dans un polytope

Les formules DLMI des paragraphes précédents ne sont pas utilisables tant que la dépendance temporelle des données (matrices $\hat{A}(t)$, $B(t)$ etc.) n'est pas spécifiée et tant qu'un choix de fonction n'est pas fait pour les inconnues $P_i(t)$ ou $X_i(t)$. Dans le cas où les données et les inconnues sont des fonctions polynomiales, de nombreuses techniques peuvent être utilisées comme décrit dans [52]. Il peut s'agir de techniques de somme de carrés [53] qui peuvent être codées en utilisant YALMIP comme proposé dans [34], ou une approche de type Polya qui peut être codé en utilisant ROLMIP [3]. Les fonctions trigonométriques du temps peuvent également être considérées avec des approches similaires, voir [39].

Dans cette thèse, nous considérons le cas où les données variantes dans le temps évoluent à l'intérieur d'ensembles polytopiques :

Définition 3.13: Système LTV évoluant dans un polytope

Le système $\hat{\Sigma}$ défini par (3.1) est considéré comme inclus dans un polytope pour l'intervalle $[t_0; t_1]$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \hat{A}(t) & B(t) \\ C(t) & D_w(t) \end{pmatrix}, t \in [t_0; t_1] \right\} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} \hat{A} & B \\ C & D_w \end{pmatrix}^{[v=1 \ldots \bar{v}]} \right\} \tag{3.25}$$

sans hypothèse sur les dérivées (les matrices $\hat{A}(t)$, $B(t)$ etc. peuvent êtres des fonctions discontinues du temps).

Sans plus de connaissances sur le système, un choix relativement direct est de rechercher les certificats de Lyapunov P_i constants ($\dot{P}_i = 0$), ou leur équivalent dual X_i ($\dot{X}_i = 0$) constants. Sous ces hypothèses, il est facile de remarquer que les DLMI précédentes sont des LMI, et que celles-ci sont valables pour tout le polytope, alors elles sont valables pour tout $t \in [t_0; t_1]$. De plus, par convexité, on peut prouver que les LMI sont valables pour tout le polytope si et seulement si elles sont valables pour le nombre fini de sommets $v = 1 \ldots \bar{v}$.

Pour illustrer le nombre fini de LMI sur les sommets du polytope, voici les formules des performances temporelles avec le certificat dual de Lyapunov constant ($\dot{X}_i = 0$) :

Corollaire 3.14: LMI sur un polytope

Les formules DLMI des performances temporelles (3.19), (3.20), (3.21) du corollaire 3.11 précédent sont vérifiées si les LMI suivantes sont vérifiées :

$$2\alpha_1 X_1 \preceq \{A^{[v]} X_1\}^{\mathcal{H}} \quad , \quad \{A^{[v]} X_2\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\alpha_2 X_2 \tag{3.26}$$

$$\{e^{-j\theta} A^{[v]} X_3\}^{\mathcal{H}} \preceq 0 \quad , \quad \{jA^{[v]} X_4\}^{\mathcal{H}} \preceq 2\overline{\omega} X_4 \tag{3.27}$$

Toutes ces conditions ont la structure suivante :

$$r_{i1} X_i + \{r_{i2} A^{[v]} X_i\}^{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} I & A^{[v]} \end{pmatrix} R_i \otimes X_i \begin{pmatrix} I \\ A^{[v]T} \end{pmatrix} \preceq 0 \tag{3.28}$$

avec les matrices $R_i = \begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2}^* \\ r_{i2} & 0 \end{pmatrix}$ respectivement définies par :

- $r_{11} = 2\alpha_1$, $r_{12} = -1$ pour prouver que le taux de variation exponentielle est supérieur à α_1 ;
- $r_{21} = -2\alpha_2$, $r_{22} = 1$ pour prouver que le taux de variation exponentielle est inférieur à α_2 ;
- $r_{31} = 0$, $r_{32} = e^{j\theta}$ pour prouver que le coefficient d'amortissement est supérieur à $\tan(\theta)$;
- $r_{41} = -2\overline{\omega}$, $r_{42} = -j$ pour prouver que la pulsation propre maximale est limitée par $\overline{\omega}$.

Pour simplifier, nous dirons qu'un système LTV $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ est R_i - stable si les LMI construites à partir de la matrice R_i sont satisfaites. Cette définition correspond à la définition du placement de pôles pour les systèmes LTI incertains exploités dans [19].

Commentaire : Les autres performances ne sont pas présentées ici au format LMI sur les sommets. Il s'agit uniquement de prendre $\dot{X} = 0$ dans chaque DLMI et de prendre toutes les matrices d'état constantes égales successivement à l'ensemble des sommets.

Preuve : Le résultat de ne pouvoir vérifier les LMI que pour les sommets du polytope est trivial pour toutes les contraintes affines en les matrices d'état (voir démonstration du théorème 2.2 du livre [19]).

Pour d'autres contraintes impliquant des produits de matrices d'état, la convexité est encore préservée. Prenons par exemple la dernière inégalité de (3.24) :

$$C(t) X_7(t) C^T(t) \preceq I_{n_z}$$

En introduisant le terme $X_7^{-1} X_7 = I$ tel que $C(t) X_7(t)\ X_7^{-1}\ X_7 C^T(t) \preceq I_{n_z}$,

cette inégalité est équivalente par complément de Schur à :

$$\begin{pmatrix} X_7 & X_7 C(t)^T \\ C(t)X_7 & I_{n_z} \end{pmatrix} \succeq 0$$

qui est linéaire en $C(t)$. La même procédure peut être appliquée à toutes les LMI (primales ou duales) contenant des produits de matrices d'état, démontrant leur convexité. ■

Ces résultats sont valables pour tout comportement des matrices d'état à l'intérieur du polytope. Par conséquent, ils peuvent directement être étendus aux systèmes non linéaires où les matrices de la représentation d'état sont des fonctions des états et/ou des entrées, tant que les trajectoires opérationnelles considérées garantissent que toutes les matrices du système restent à l'intérieur du polytope (3.25).

Une stratégie possible de synthèse de contrôleur, sur l'hypothèse que les matrices d'état variables sont bornées à l'intérieur d'un polytope, consiste à prouver que, pour des conditions initiales bornées correspondant aux pires conditions opérationnelles, les trajectoires sont bornées, garantissant que toutes les matrices du système restent à l'intérieur du polytope.

Cela conduit à la stratégie de synthèse suivante :

Heuristique 3.15: Synthèse de retour d'état sur un polytope

Pour garantir lors de la synthèse d'un contrôleur que les matrices non linéaires du système restent à l'intérieur du polytope, c'est-à-dire pour un retour d'état $A(t,x) = \hat{A}(t,x) + B(t,x)K$ la garantie que :

$$(\hat{A}(t,x)\ B(t,x)) \in \mathrm{Co}(\hat{A}\ B)^{[v=1\ldots\bar{v}]}, \forall t \in [t_0; t_1]$$

on ajoute systématiquement lors de la synthèse la *spécification dimensionnante* suivante :

La performance Impulsion-à-Crête robuste sur l'ensemble du polytope est bornée par une valeur suffisante pour montrer que l'état est lui-même borné pour les pires conditions opérationnelles, garantissant que les matrices d'état restent à l'intérieur du polytope défini par (3.25).

Cette stratégie est utilisée sur le cas d'application du contrôle d'attitude dans le chapitre 4 suivant.

D'un point de vue philosophique, pour faire le parallèle avec l'approche classique du contrôle des systèmes non linéaires (cf. [30]) qui consiste à linéariser le système autour du point de fonctionnement, d'en déduire une loi de contrôle à partir du modèle LTI obtenu par linéarisation, sans souvent connaître précisément la plage de validité exacte de la linéarisation et du contrôleur linéaire obtenu (voir aussi

[45]) ; la méthode proposée par cette heuristique, lorsqu'elle a une solution, permet d'*obtenir un contrôleur valide pour le modèle non linéaire complet sur toute la région opérationnelle étudiée*, sans étapes préliminaires de calcul autre que de calculer les sommets du polytope, c'est-à-dire les valeurs extrêmes des matrices.

Maintenant que nous avons formulé l'ensemble des outils d'analyse des systèmes linéaires variant dans le temps sous la forme de LMI duales s'appliquant aux sommets d'un polytope encadrant le système, avec une stratégie (heuristique 3.15 précédente) qui nous permet de garantir que le système restera à l'intérieur du polytope, il nous est possible d'adresser le problème de synthèse de contrôleur.

3.3 Synthèse de retour d'état multi-performance

Un contrôleur qui se présente assez naturellement en premier en Automatique pour stabiliser un système est le retour d'état :

Problème 1: Synthèse de retour d'état multi-performance

Trouver un gain statique de retour d'état K pour que :

les $i = 1 \dots \bar{\imath}$ configurations en boucle fermée d'un même système :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = (\hat{A}_i(t) + B_i(t)K)x_i(t) + B_i(t)w(t) \\ z_i(t) = C_i(t)x_i(t) \end{cases} \tag{3.29}$$

satisfassent simultanément la spécification Π_i associée à Σ_i, choisie parmi :

- Σ_i est R_i -stable,
- La performance Norme-à-Norme de Σ_i est bornée par γ_{∞_i},
- La performance Impulsion-à-Norme de Σ_i est bornée par γ_{2_i},
- La performance Impulsion-à-Crête de Σ_i est bornée par γ_{IP_i}.

Les $i = 1 \dots \bar{\imath}$ configurations du système original auront au préalable été augmentées de N intégrateurs en fonction du besoin d'annulation de l'erreur statique et des $N-1$ ordres d'erreur de trainage, c'est-à-dire que $\hat{A}_i(t)$ contient déjà les éventuels N intégrateurs.

Notez que les spécifications sont définies pour différents systèmes du même ordre (éventuellement augmentés d'un même nombre N d'intégrateurs). Bien sûr, un cas particulier est celui où les matrices sont les mêmes pour tous les $i = 1 \dots \bar{\imath}$. Mais on peut aussi supposer que chaque spécification de performance Π_i est définie pour une variante d'un même système correspondant à différentes configurations, chaque configuration évoluant dans un polytope différent défini par (3.25) avec $\bar{v}_i$ sommets.

3.3.1 Certificat de Lyapunov commun à toutes les performances

Pour résoudre ce problème de synthèse, une application directe du paradigme de mise en forme de Lyapunov [12] consiste à rechercher un certificat de Lyapunov commun $X_i = X$ pour toutes les spécifications de performances, en empilant simplement toutes les inégalités matricielles. Avec l'application du changement de variable réversible $KX = Y$, les formulations duales se trouvent être linéaires en les matrices inconnues X et Y ($A^{[v_i]}X = (\hat{A}^{[v_i]} + B^{[v_i]}K)X = \hat{A}^{[v_i]}X + B^{[v_i]}Y$).

Définition 3.16

Soit $\mathcal{L}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X,Y) \preceq 0$ la LMI en X et Y obtenue pour la performance Π_i choisie parmi (3.19) , (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), en remplaçant les matrices d'état par leur valeur au sommet v_i et en prenant $X_i = X$ pour tout $i = 1 \dots \bar{\imath}$, $\dot{X} = 0$ et $KX = Y$.

Théorème 3.17: Synthèse de Lyapunov

S'il existe deux matrices $X \succ 0$ et Y simultanément solution de toutes les LMI $\mathcal{L}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X,Y) \preceq 0$, pour tout $i = 1 \dots \bar{\imath}$, pour tout $v_i = 1 \dots \bar{v}_i$, alors $K = YX^{-1}$ est une solution au problème 1.

L'avantage de ce résultat est qu'il implique peu de variables de décision et que la solution, si elle existe, est très robuste du fait qu'elle encadre plus largement la trajectoire. A l'inverse, le principal inconvénient est le pessimisme dû à la recherche d'un certificat de Lyapunov commun pour toutes les performances.

Une alternative est le paradigme de mise en forme utilisant les S-variable ([19]).

3.3.2 Certificat S-Variable commun à toutes les performances

Le paradigme de mise en forme S-Variable (cf. [19]) permet de rechercher différents certificats de Lyapunov, un pour chaque spécification de performance, mais en supposant une S-variable commune pour toutes les contraintes.

Les LMI précédentes $\mathcal{L}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X,Y) \preceq 0$ correspondant aux DLMI (3.19) , (3.20), (3.21), (3.22), (3.23), (3.24), en remplaçant les matrices d'état par leur valeur au sommet v_i et en prenant $X_i = X$, $\dot{X} = 0$ et $KX = Y$, peuvent être reformulées avec l'introduction de S-Variable de la manière suivante :

Corollaire 3.18: LMI S-Variable sur un polytope

Les formulations S-Variable des LMI correspondants aux performances temporelles (3.28) et aux performances entrée/sortie (3.22), (3.23), (3.24) avec $\dot{X}_i = 0$ et $M_i^{[v_i]}(S,T) = \hat{A}_i^{[v_i]} S + B_i^{[v_i]} T$ sont :

— R_i -stabilité :

$$R_i \otimes X_i \preceq \left\{ \begin{pmatrix} M_i^{[v_i]}(S,T) \\ -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{o_i} \\ -I \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}} \tag{3.30}$$

— Performance Norme-à-Norme bornée par γ_{∞_i} :

$$\begin{pmatrix} 0 & X_i & X_i C_i^{[v_i]T} \\ X_i & 0 & 0 \\ C_i^{[v_i]} X_i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_i^{[v_i]} & 0 \\ D_{w_i}^{[v_i]} & I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\infty_i}^{-2} I & 0 \\ 0 & -I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_i^{[v_i]} & 0 \\ D_{w_i}^{[v_i]} & I_{n_z} \end{pmatrix}^\top \preceq \left\{ \begin{pmatrix} M_i^{[v_i]}(S,T) \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{o_i} \\ -I \\ 0 \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}} \tag{3.31}$$

— Performance Impulsion-à-Norme bornée par γ_{2_i} :

$$\begin{pmatrix} 0 & X_i & X_i C_i^{[v_i]T} \\ X_i & 0 & 0 \\ C_i^{[v_i]} X_i & 0 & -I_{n_z} \end{pmatrix} \preceq \left\{ \begin{pmatrix} M_i^{[v_i]}(S,T) \\ -S \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{o_i} \\ -I \\ 0 \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}} \tag{3.32}$$
$$\gamma_{2_i}^{-2} B_i^{[v_i]} B_i^{[v_i]T} \preceq X_i$$

— Performance Impulsion-à-Crête bornées par γ_{IP_i} :

$$\begin{pmatrix} 0 & X_i \\ X_i & 0 \end{pmatrix} \preceq \left\{ \begin{pmatrix} M_i^{[v_i]}(S,T) \\ -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{o_i} \\ -I \end{pmatrix}^* \right\}^{\mathcal{H}} \tag{3.33}$$
$$\gamma_{IP_i}^{-2} B_i^{[v_i]} B_i^{[v_i]T} \preceq X_i$$
$$C_i^{[v_i]} X_i C_i^{[v_i]T} \preceq I_{n_z}$$

Ces inégalités matricielles ne sont des LMI en X_i, S et T que lorsque les A_{o_i} sont données. Si une de ces LMI est vérifiée pour tous les sommets $v_i = 1 \dots \bar{v}_i$, alors le retour d'état

$$K = TS^{-1}$$

permet à la boucle fermée Σ_i de satisfaire la performance Π_i considérée.

Preuve : La démonstration n'est donnée que pour la première inégalité de R_i stabilité (3.30) suivant les méthodes S-Variable développées dans [19], les autres LMI se démontrent de la même manière. Grâce au changement de variable réversible $T = KS$, la contrainte (3.30) se lit avec la matrice d'état en boucle fermée $A_i^{[v_i]} = \hat{A}_i^{[v_i]} + B_i^{[v_i]}K$:

$$R_i \otimes X_i \preceq \left\{ \begin{pmatrix} A_i^{[v_i]} \\ -I \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} A_{o_i}^* & -I \end{pmatrix} \right\}^{\mathcal{H}}.$$

Par congruence de cette inégalité matricielle avec la matrice $\begin{pmatrix} I \\ A_i^{[v_i]T} \end{pmatrix}$, cela implique :

$$\begin{pmatrix} I & A_i^{[v_i]} \end{pmatrix} R_i \otimes X_i \begin{pmatrix} I \\ A_i^{[v_i]T} \end{pmatrix} \preceq 0$$

qui est la LMI (3.28). Cette opération classique pour faire apparaître et disparaître les S-Variable découle de la S-Procédure comme expliqué dans [19]. ■

Les formules de [19] sont modifiées car elles ne s'appliquent pas directement au cas variant dans le temps. Notez qu'à la différence des résultats dans [19], le résultat du corollaire 3.18 concerne les systèmes variant dans le temps : une matrice commune X_i est requise pour tous les sommets du polytope (et donc pour tout $t \in [t_0; t_1]$). Sans aucune connaissance préalable des dérivées temporelles ou des commutations des matrices de la représentation d'état variant dans le temps, il n'est pas possible de rechercher des certificats X_i dépendants du temps plus avancés.

Définition 3.19

Soit $\mathcal{S}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X_i, S, T, A_{o_i}) \preceq 0$ l'inégalité matricielle pour la performance Π_i et le sommet du système $\Sigma_i^{[v_i]}$ avec la formulation S-variable du corollaire 3.18.

Théorème 3.20: Paradigme S-Variable

S'il existe deux matrices S et T, $\bar{\imath}$ matrices $X_i \succ 0$ et A_{o_i}, simultanément solutions de toutes les contraintes $\mathcal{S}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X_i, S, T, A_{o_i}) \preceq 0$ pour tout $i = 1 \dots \bar{\imath}$, pour tout $v_i = 1 \dots \bar{v}_i$, alors $K = TS^{-1}$ est une solution au problème 1.

Le point ouvert avec ce dernier théorème est que les contraintes ne sont pas linéaires en raison des matrices A_{o_i} qui sont aussi inconnues. Une stratégie consiste alors à choisir a priori les matrices A_{o_i}.

3.3.3 Heuristique pour le problème de synthèse S-Variable

Les propositions suivantes fournissent des pistes pour établir une stratégie de recherche des matrices A_{o_i} appropriées.

Proposition 3.21: Conditions nécessaires pour A_{o_i}

Si la contrainte $\mathcal{S}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[vi]}}(X_i, S, T, A_{o_i}) \preceq 0$ a une solution,

alors le système

$$\Sigma_{o_i} : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{o_i}x_i(t) + B_i(t)w(t) \\ z_i(t) = C_i(t)x_i(t) \end{cases}$$

satisfait le test d'analyse $\mathcal{L}_{\Pi_i,\Sigma_{o_i}^{[v_i]}}(X_i, 0) \preceq 0$.

Preuve : Encore une fois la démonstration n'est donnée que pour la condition de R_i stabilité (3.30), les autres performances se démontrent en suivant le même raisonnement.

Si la LMI S-Variable (3.30) est vérifiée, alors par congruence cette fois-ci avec la matrice $\begin{pmatrix} I \\ A_{o_i}^* \end{pmatrix}$, cela implique :

$$\begin{pmatrix} I & A_{o_i} \end{pmatrix} R_i \otimes X_i \begin{pmatrix} I \\ A_{o_i}^* \end{pmatrix} \preceq 0$$

qui est la condition LMI d'analyse (duale) (3.28) pour prouver la R_i-stabilité de $\dot{x}_i(t) = A_{o_i}x_i(t)$. La matrice A_{o_i} doit donc elle-même satisfaire la contrainte pour que la LMI S-Variable ait une solution. ■

Cette première proposition permet d'éliminer les candidats A_{o_i} généraux. Dans ce qui suit, nous donnons des pistes pour choisir des candidats de la forme $A_{o_i} = -k_i r_{i2}^* I$, où $r_{i2} = 1$ si la performance Π_i est une performance entrée-sortie.

Proposition 3.22: Solutions de Lyapunov solutions du problème S-Variable

S'il existe X, Y solutions de $\mathcal{L}_{\Pi_i,\Sigma_{o_i}^{[v_i]}}(X, Y) \preceq 0$, alors pour un scalaire assez grand $k_i > 0$, $\mathcal{S}_{\Pi_i,\Sigma_i^{[v_i]}}(X, X, Y, -k_i r_{i2}^* I) \preceq 0$ est faisable.

La preuve découle du théorème 2.9 de [19] et n'est pas reproduite ici ; il est en plus prouvé à la suite de ce théorème 2.9 dans [19] que le choix de très grandes valeurs de k_i conduira toutes les matrices X_i à être égales ($S = X = X_i$). Le théorème 3.20 avec les S-variables n'a alors aucun avantage par rapport au Théorème 3.17.

Par ailleurs, avec la proposition 3.21, nous obtenons que pour la performance de R_i stabilité, la matrice $A_{io} = -k_i r_{i2}^* I$ doit elle-même satisfaire cette même perfor-

mance de R_i stabilité, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_i r_{i2}^* \end{pmatrix} R_i \begin{pmatrix} 1 \\ -k_i r_{i2} \end{pmatrix} = r_{i1} - 2k_i |r_{i2}|^2 \leq 0$$

Le paramètre k_i de la proposition 3.22 doit donc satisfaire $k_i \geq \frac{r_{i1}}{2|r_{i2}^2|}$ pour la performance de R_i stabilité. Une recherche linéaire unidimensionnelle consiste donc à résoudre le problème de synthèse en choisissant $k_i = \underline{k}_i + \kappa$ avec $\underline{k}_i = \frac{r_{i1}}{2|r_{i2}^2|}$, pour $\kappa \geq 0$.

En suivant le même raisonnement pour les autres performances, nous obtenons l'heuristique suivante :

Heuristique 3.23: Résolution des LMI S-Variable

Pour résoudre les LMI du théorème 3.20, une stratégie de recherche des valeurs A_{o_i} peut être de faire un parcours linéaire unidimensionnel sur $\kappa > 0$ tel que $A_{o_i} = -(\underline{k}_i + \kappa) r_{i2}^* I$, avec $r_{i2}^* = 1$ pour les performances autres que la R_i-stabilité, où :

- pour la R_i-stabilité : $\underline{k}_i = \frac{r_{i1}}{2|r_{i2}^2|}$,
- pour la performance Norme-à-Norme limitée par γ_{∞_i} :

$$\underline{k}_i = \max_{v_i = 1 \ldots \bar{v}_i} \frac{1}{\gamma_{\infty_i}} \sqrt{\lambda_{max}((C^{[v_i]} B^{[v_i]})^\top C^{[v_i]} B^{[v_i]})}$$

- pour la performance Impulsion-à-Norme limitée par γ_{2_i} :

$$\underline{k}_i = \max_{v_i = 1 \ldots \bar{v}_i} \frac{1}{2\gamma_{2_i}^2} \lambda_{max}((C^{[v_i]} B^{[v_i]})^\top C^{[v_i]} B^{[v_i]})$$

- pour la performance Impulsion-à-Crête limitée par γ_{IP_i} : $\underline{k}_i = 0$.

et rechercher les meilleures solutions en cherchant un $\kappa > 0$ de plus en plus grand tant que le problème n'est pas réalisable.

Remarque : Ces valeurs de $\underline{k}_i$ sont des valeurs nécessaires pour initialiser les LMI S-Variable avec cette définition scalaire des A_{o_i}, comme le montre la preuve ci-dessous. Toutefois, ces valeurs peuvent ne pas être suffisantes ; de même que la structure de A_{o_i} égale à un gain fois l'identité peut ne pas toujours avoir de solution. Cette heuristique donne une stratégie de recherche de solutions, mais si aucune solution n'est trouvée, il est alors nécessaire de rechercher d'autres stratégies.

Preuve : Les bornes $\underline{k}_i$, pour le choix de recherche des matrices A_{o_i} sous la forme $-(\underline{k}_i + \kappa) r_{i2}^* I$, sont obtenues en appliquant la proposition 3.21, comme effectué pour la R_i stabilité juste avant l'heuristique.

Pour la performance Norme-à-Norme : on résout directement la LMI (3.11) (avec $\dot{P}_5 = 0$ et les matrices variant dans le temps prise à une valeur fixe correspondant à un sommet du polytope), on obtient que le système Σ_{o_i} de la proposition 3.21 avec $A_{o_i} = -k_i I$ ($r_{i2} = 1$ dans le cas des performances entrées/sorties) satisfait la performance Norme-à-Norme si il existe $P_{5_i} \succ 0$ (avec $D_w = 0$) :

$$\begin{pmatrix} -2k_i P_{5_i} + C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} & P_{5_i} B^{[v_i]} \\ B^{[v_i]\top} P_{5_i} & -\gamma_{\infty_i}^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \preceq 0$$

Par congruence de cette inégalité avec la matrice $(B^{[v_i]\top}\ k_i I)^\top$, elle implique que :

$$\begin{pmatrix} B^{[v_i]\top} & k_i I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2k_i P_{5_i} + C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} & P_{5_i} B^{[v_i]} \\ B^{[v_i]\top} P_{5_i} & -\gamma_{\infty_i}^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{[v_i]} \\ k_i I \end{pmatrix} \preceq 0$$

Qui est équivalente à :

$$B^{[v_i]\top} C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} B^{[v_i]} - k_i^2 \gamma_{\infty_i}^2 I \preceq 0$$

Nous obtenons ainsi la condition nécessaire sur k_i suivante pour que la matrice A_{o_i} vérifie la contrainte Norme-à-Norme :

$$k_i \geq \frac{1}{\gamma_{\infty_i}} \sqrt{\lambda_{max}(B^{[v_i]\top} C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} B^{[v_i]})}$$

Il ne reste plus qu'à prendre la valeur maximale sur les sommets pour obtenir $\underline{k_i}$.

Pour la performance Impulsion-à-Norme : on résout directement la LMI (3.14) (avec $\dot{P}_6 = 0$ et les matrices variant dans le temps prise à une valeur fixe correspondant à un sommet du polytope), on obtient que le système Σ_{o_i} de la proposition 3.21 avec $A_{o_i} = -k_i I$ ($r_{i2} = 1$ dans le cas des performances entrées/sorties) satisfait la performance Impulsion-à-Norme si il existe $P_{6_i} \succ 0$:

$$\begin{cases} -2k_i P_{6_i} + C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} \preceq 0, \\ B^{[v_i]\top} P_{6_i} B^{[v_i]} \preceq \gamma_{2_i}^2 I_{n_w} \end{cases}$$

Par congruence de la première LMI avec la matrice $B^{[v_i]}$ on obtient :

$$B^{[v_i]\top} C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} B^{[v_i]} \preceq 2k_i B^{[v_i]\top} P_{6_i} B^{[v_i]}$$

En combinant avec la deuxième LMI cela donne :

$$2k_i \gamma_{2_i}^2 I_{n_w} \succeq B^{[v_i]\top} C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} B^{[v_i]}$$

Soit :

$$k_i \geq \frac{1}{2\gamma_{2_i}^2} \lambda_{max}(B^{[v_i]\top} C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} B^{[v_i]})$$

En prenant $\underline{k_i}$ égale au maximum de cette valeur sur tous les sommets, nous obtenons une borne inférieure pour la performance Impulsion-à-Norme.

Pour la performance Impulsion-à-Crête : en suivant la même procédure, on résout la LMI (3.17) :

$$\begin{cases} -2k_i P_7 \preceq 0 \\ B^{[v_i]\top} P_7 B^{[v_i]} \preceq \gamma_{IP}^2 I_{n_w} \\ C^{[v_i]\top} C^{[v_i]} \preceq P_7 \end{cases}$$

Ce qui donne que $k_i \geq 0$ suffit pour la performance Impulsion-à-Crête. ■

3.4 Exemple

3.4.1 Système de référence

Le cas de référence choisi pour illustrer les résultats de ce chapitre est le problème du contrôle du déplacement d'un assemblage masse-ressort comme représenté sur la figure 3.3.

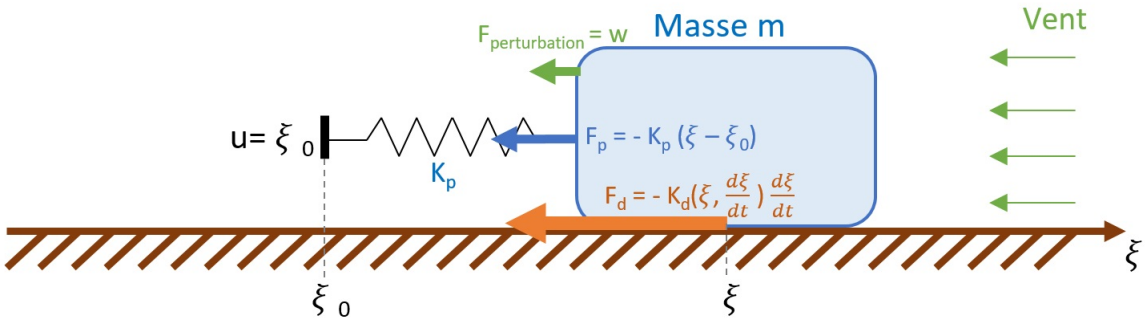

FIGURE 3.3 – Système masse-ressort de référence.

Le mouvement de l'ensemble est contrôlé à partir de la position de l'extrémité libre du ressort notée $\xi_0(t) = u(t)$: on suppose qu'un contrôleur agit sur l'extrémité du ressort avec un retard complet de sa chaine d'action de $\Delta T = 50ms$ (retards de mesures + calculs échantillonnés + temps de réponse de l'actionneur). Lorsque l'ensemble est à l'arrêt complet (ξ_0 =constante) et qu'aucune force extérieure ne s'applique (vent nul), la position de la masse est égale à celle de l'extrémité du ressort $\xi(t) = \xi_0$ (l'allongement du ressort est considéré nul).

On suppose connaitre très précisément la valeur de la masse m et de la raideur du ressort K_p considérées constantes. A l'inverse, le coefficient de frottement sur le sol, pour lequel existent différents modèles (notamment les lois de Coulomb avec deux phases : adhérence et glissement), est supposé ici incertain et variable en fonction

de la position (état de surface inégal) et de la vitesse de la masse, tout en restant cependant borné $K_d(\xi, \dot{\xi}) \in [K_{d_{min}}; K_{d_{max}}]$. Enfin, il s'applique sur la masse des forces de perturbations (par exemple un vent variable).

L'application du principe fondamental de la dynamique à la masse m dont la position est notée ξ nous donne l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{\xi} = F_p + F_d + F_{perturbation} = -K_p\xi - K_d(\xi, \dot{\xi})\dot{\xi} + w + K_p u \tag{3.34}$$

Le fait que le paramètre de frottement $K_d(\xi, \dot{\xi})$ soit variable et incertain rend ce système non linéaire.

Comme nous modélisons les forces de frottement comme étant bornées $K_d(\xi, \dot{\xi}) \in [K_{d_{min}}; K_{d_{max}}]$, les résultats de ce chapitre sur les systèmes variant dans le temps dont les matrices d'état sont incluses dans un polytope sont donc applicables pour ce système.

3.4.2 Spécifications

Le contrôleur venant piloter la position de l'extrémité du ressort $u(t) = \xi_0(t)$ doit garantir que le système en boucle fermée réponde aux spécifications suivantes :

- Π_1 : pas d'erreur statique ; le système en boucle fermée ne doit pas avoir d'erreur statique en régime permanent autour d'une consigne de position $\xi(t) = \xi_0 =$ constante.
- Π_2 : pas d'erreur de trainage d'ordre 1 ; le système en boucle fermée ne doit pas avoir d'erreur de trainage lors de phase de déplacement à vitesse constante le long de trajectoires de type rampe $\xi(t) = v_0 t$, avec $v_0 \neq 0$ une vitesse de déplacement constante.
- Π_3 : la constante de temps doit être supérieure à 2 fois le retard complet $\Delta T = 50ms$ de la chaine d'action du calculateur effectuant le contrôle, soit une constante de temps minimale $\tau_{min} > 0.1s$, c'est-à-dire un taux de décroissance supérieur à $\alpha_1 = -\frac{1}{\tau_{max}} rad/s = -10 rad/s$ (dans l'hypothèse où la commande est réalisée par un calculateur numérique, dont le pas de temps de calcul plus les délais capteurs et plus le temps de réponse des actionneurs est égal à $\Delta T = 50ms$, cette exigence a pour objectif d'avoir des dynamiques de la boucle fermée suffisamment lentes pour ne pas être affectée par l'échantillonage).
- Π_4 : le temps de réponse à 95% doit être inférieur à 1s, donnant une constante de temps maximale $\tau_{max} < 0.333s$, soit un taux de décroissance inférieur à $\alpha_2 = -\frac{1}{\tau_{max}} = -3 rad/s$.
- Π_5 : les réponses peuvent accepter un léger dépassement mais ne doivent pas avoir d'oscillations : le coefficient d'amortissement doit être supérieur à $\sqrt{2}/2$ ($\tan(\theta) \geq 1$).
- Π_6 : le transfert d'énergie des perturbations à la masse doit être minimisé : la performance Norme-à-Norme entre l'entrée de perturbation w et l'amplitude de la vitesse de la masse doit être minimisée.

3.4.3 Paramètres et outils

Pour répondre à l'ensemble des spécifications, notamment aux deux premières exigences d'annulation des erreurs statique et de trainage d'ordre 1, nous considérons l'ajout de deux intégrateurs au contrôleur dans l'équation de la dynamique (3.34), ce qui donne la définition du système suivante avec $k_p = K_p/m$ et $k_d(x) = K_d(x)/m \in [k_{d_{min}}; k_{d_{max}}]$:

Définition 3.24: Système masse-ressort à 2 intégrateurs

Le système masse-ressort décrit par l'équation de la dynamique (3.34), pour lequel on a ajouté au contrôleur 2 niveaux d'intégrateurs, a pour représentation d'état en boucle ouverte :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}(x)x(t) + B(u(t) + w(t)) \\ z(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.35}$$

avec $x(t) = (\eta_2 \ \eta_1 \ \xi \ \dot{\xi})^\top \in \mathbb{R}^4$, $w(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $z(t) \in \mathbb{R}$ et les matrices :

$$\hat{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_p & -k_d(x) \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_p \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système en boucle fermée Σ, avec un retour d'état $u(t) = Kx(t)$ et la matrice d'état en boucle fermée $A(t) = \hat{A}(t) + B(t)K$, contient donc la commande liée aux deux intégrateurs.

Les résultats ci-dessous sont calculés en prenant comme valeur des paramètres $k_p = 1$ et $k_d \in [\frac{2}{\alpha}; 2\alpha]$, avec $\alpha \in [1; +\infty]$. Les deux sommets de la plage d'évolution du coefficient d'amortissement du système masse-ressort naturel est ainsi centré sur 1 sur une échelle logarithmique, avec les valeurs inférieure et supérieure qui s'écartent symétriquement de 1 (l'une dans le domaine oscillant, l'autre dans le domaine très amorti) de manière logarithmique quand α devient grand :

$$\hat{A}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2/\alpha \end{pmatrix}, \ \hat{A}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2\alpha \end{pmatrix}$$

Les LMI des deux théorèmes de Lyapunov 3.17 et S-Variable 3.20 ont été codés manuellement dans Matlab à l'aide de la boîte à outils Yalmip et résolu avec le solveur SDPT-3. Des exemples de scripts sont présentés dans l'annexe C.1 page 115.

La boîte à outils Romuloc (voir [46]) pour Matlab, proposant des commandes pour effectuer directement la synthèse de contrôleur multi-objectif pour les systèmes polytopiques, peut aussi être utilisée pour résoudre les LMI du premier théorème de Lyapunov 3.17.

3.4.4 Simulations

Une recherche de la valeur maximale de α, décrivant l'amplitude d'incertitude et de variation de $k_d \in [\frac{2}{\alpha}; 2\alpha]$, pour laquelle le problème de synthèse a une solution, est effectuée par bissection avec les deux théorèmes. La valeur est la même pour les deux théorèmes : $\alpha = 1.223$.

Pour le théorème S-variable, les LMI sont faisables avec les valeurs de A_{o_i} telles que définies dans l'heuristique 3.23 page 50 à partir de $\kappa = 3.84$.

De plus, on observe bien la convergence entre les deux solutions de chaque théorème donnée par la proposition 3.22 page 49 lorsque κ devient très grand : les deux retours d'état solutions deviennent identiques à 0.5% près lorsque $\kappa > 10^8$.

Nous obtenons finalement les résultats suivants :

— avec le théorème de Lyapunov 3.17 :

$$K_X = [-2390 \ -1302 \ -298 \ -23.1]$$

Analyse de la performance Norme-à-Norme de la boucle fermée : $\gamma_{\infty_o} = 5\ .10^{-3}$.

— avec le théorème S-Variable 3.20, on obtient les valeurs de K_S et de performances Norme-à-Norme pour différentes valeurs de κ de l'heuristique 3.23 données dans le tableau suivant :

Kappa	KS				Gamma Infty
3.84	-541	-455	-142.8	-17.9	0.0103
10	-1074	-748.8	-197.1	-20.8	0.0075
50	-1638	-1051	-252.9	-22.3	0.0058
200	-1867	-1172	-275	-22.7	0.0053
500	-1947.5	-1211	-282.1	-22.9	0.0051
10^8	-2377	-1299.9	-297.6	-23.1	0.0050

En prenant comme loi d'évolution du coefficient d'amortissement $k_d(\xi) = (k_{d_{max}} - k_{d_{min}}) \exp(-\dot{\xi}^2) + k_{d_{min}}$ pour les simulations, on obtient le résultat présenté sur la figure 3.4 pour une réponse libre depuis la condition initiale $x(0) = (0\ 0\ 0\ 2.5)^\top$.

L'approche S-Variable ne permet pas dans ce résultat de démontrer une nette amélioration des performances du correcteur synthétisé. Le système original d'ordre 2 pour un polytope à 2 sommets ne présente a prioiri pas suffisamment de degrés de liberté pour que les deux méthodes se départagent clairement.

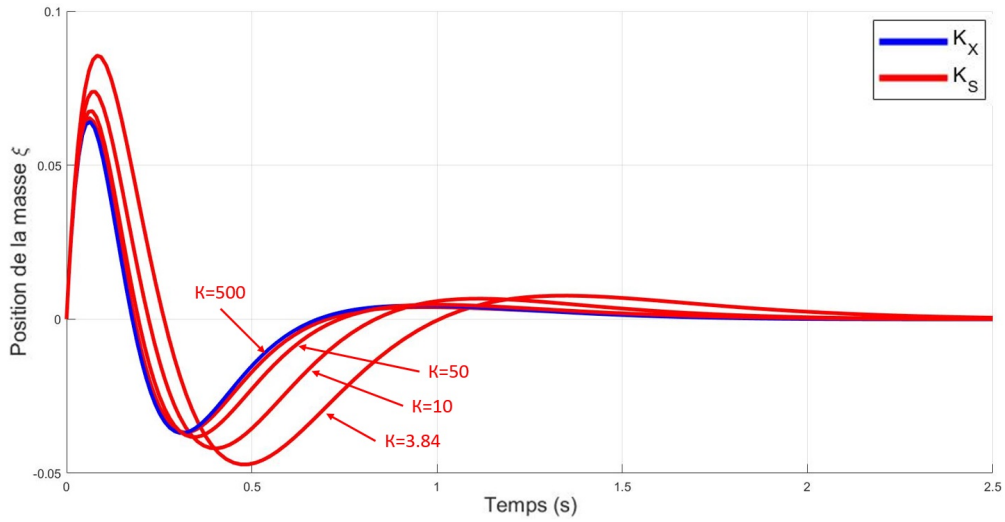

FIGURE 3.4 – Réponse à une impulsion en vitesse du système masse-ressort avec deux intégrateurs pour les deux synthèses de contrôleur.

3.5 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons développé des méthodes de synthèse de contrôleurs par retour d'état invariant dans le temps pour des systèmes variant dans le temps ou non linéaire avec perturbations, dont l'évolution est inscrite à l'intérieur d'un polytope, avec un comportement éventuellement discontinu, tout en respectant une spécification multi-performance.

Les critères de performances concernent d'une part les propriétés des réponses temporelles telles que le taux d'amortissement, le temps de réponse, la pulsation maximale, et d'autre part des performances entrées-sorties. Les formulations originales sous forme différentielles, découlant directement du théorème de Lyapunov, sont converties en conditions LMI pour ces systèmes bornés dans un polytope. Ces résultats LMI sont donnés dans le formalisme de Lyapunov avec un certificat commun à toutes les spécifications, et dans le formalisme S-Variable avec un certificat de Lyapunov spécifique pour chaque performance et une S-Variable commune à toutes les contraintes.

Le cas d'application de référence présenté dans cette partie ne présente a priori pas suffisamment de degrés de liberté (polytope à 2 sommets) pour mettre en valeur de manière visible l'amélioration obtenue avec l'approche S-Variable. Les résultats sont néanmoins cohérents entre eux et valident le fonctionnement de chaque méthode.

Nous allons voir maintenant dans le chapitre suivant comment appliquer ces méthodes au contrôle du mouvement de rotation d'un objet quelconque dans l'espace à trois dimensions qui est un système non linéaire.

4

Application au contrôle d'attitude

Cette partie de la thèse étudie le contrôle d'attitude d'un objet rigide quelconque tournant à 3 degrés de liberté entièrement commandé. Le problème spécifique étudié est le contrôle de la déviation de cet objet autour d'une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable. Le mouvement de rotation a un comportement non linéaire intrinsèque (trigonométrique, 2π-périodique) qui peut conduire à construire des contrôleurs non linéaires et hybrides. L'approche proposée ici est de considérer la modélisation de l'attitude avec le quaternion unitaire pour obtenir un modèle de représentation d'état non linéaire au plus proche d'un modèle linéaire, pour en déduire un contrôleur par retour d'état "quasi-linéaire" continu qui permet d'obtenir une stabilité asymptotique *presque* globale en boucle fermée ([42]). Les méthodes du chapitre précédent sur les systèmes variant dans le temps sont ensuite appliquées pour faire la synthèse d'un contrôleur localement stable en fonction de spécifications données. Nous proposons pour finir quelques conjectures pour ouvrir des pistes de recherche sur des contrôleurs à N intégrateurs qui auraient la propriété d'être *presque* globalement stables pour le contrôle d'attitude.

4.1 Le mouvement de rotation dans l'espace

4.1.1 Le quaternion unitaire

Le *quaternion unitaire* a été retenu dans cette thèse pour modéliser l'attitude d'un objet dans l'espace (cf. [11] pour les différents cadres mathématiques existants pour modéliser l'orientation dans l'espace). L'attitude instantanée d'un objet est représentée avec le quaternion comme un vecteur unitaire (de norme 1) à quatre coordonnées défini comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} q_o \\ q_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{4.1}$$

qui correspond à une rotation de l'objet d'un angle θ autour de l'axe défini par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^\top \in \mathbb{R}^3$, comme représenté sur la figure 4.1.

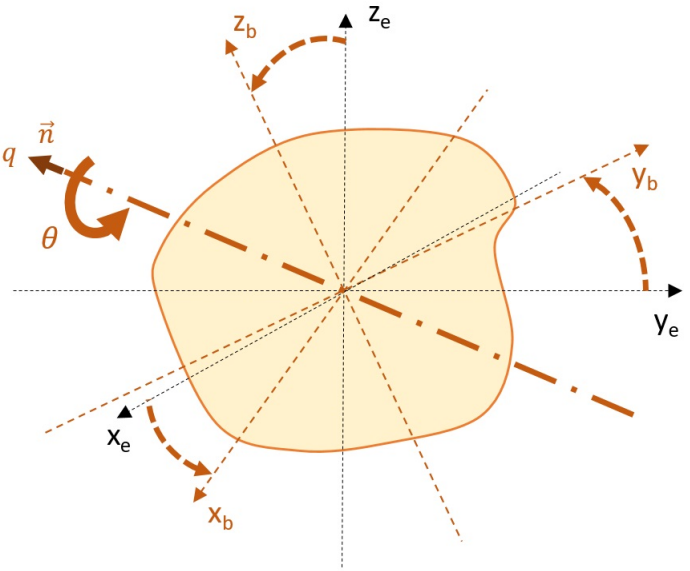

FIGURE 4.1 – Représentation de l'orientation, ou attitude, d'un objet quelconque dans l'espace à 3 dimensions avec le quaternion.

Il ne possède donc que 4 paramètres contre 9 pour la matrice de rotation, et il n'implique pas de développements trigonométriques directs comme les angles d'Euler (cf. l'annexe B page 109 pour plus de détails sur le mouvement de rotation et le quaternion). De plus, il convient au formalisme de la représentation d'état (vecteur d'état). Toutefois, la concentration des informations de rotation dans ces quatre paramètres ne font pas disparaître la complexité topologique du mouvement de rotation.

En effet, la topologie trigonométrique et périodique du mouvement de rotation génère avec le quaternion un problème de singularité appelé *double couverture* : un quaternion unitaire q et son opposé $-q$ représente la même attitude (cf. [41] pour l'algèbre détaillée des quaternions). Ce problème de singularité du quaternion peut générer un *phénomène de déroulement* (cf. [8], *unwinding phenomenon* en anglais) : l'objet contrôlé fait un tour complet sur lui-même "en marche arrière" alors qu'il était juste à proximité de l'attitude visée, parce qu'il était arrivé à cette position en ayant effectué une rotation complète sur lui-même, et il refait le même trajet en marche arrière (cf. figure B.1 page 112 dans l'annexe sur le quaternion).

Les étapes pour construire le modèle de déviation autour d'une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable pour un objet quelconque sont détaillées dans le paragraphe 4.2 page 60.

4.1.2 Application des résultats du chapitre précédent

Partant du cadre mathématique général de la "stabilité du mouvement" formalisé par la théorie de Lyapunov [36] exposé dans le chapitre 2 *Préliminaires théoriques*, le contrôle du mouvement d'un objet rigide est inclus dans la classe des systèmes non linéaires mécaniques lagrangiens comme présenté dans [43]. Pour cette classe de systèmes, de nombreuses stratégies de contrôle ont été étudiées, à commencer par le résultat de référence [44] qui propose une structure de contrôleur Proportionnel Dérivée (PD) de la déviation à une trajectoire ajoutée à une *commande optimale* (cf. [5]).

Le contrôle d'attitude utilisant spécifiquement le quaternion est toujours aujourd'hui largement étudié, la singularité de *double couverture* étant un des points critiques à gérer pour construire une commande. Certaines approches étudient des stratégies similaires à l'architecture de contrôle Proportionnel Dérivée lagrangienne précédente [33, 2]. D'autres construisent des contrôleurs non linéaires qui correspondent aux non linéarités et singularités de la cinématique du quaternion sur la base de fonctions de Lyapunov spécifiques [59, 25, 60, 61, 1]. Le problème de singularité est également géré avec une stratégie de contrôle hybride prenant en compte le signe de la *partie scalaire* du quaternion comme dans [38]. D'autres abordent la robustesse du contrôleur face aux perturbations ou aux incertitudes paramétriques [32, 21, 40].

Quel que soit le cadre mathématique utilisé pour modéliser le mouvement de rotation, comme démontré dans [8], la topologie du mouvement de rotation conduit à ne pas être en mesure de construire des lois de commande linéaires continues invariantes dans le temps, statiques ou dynamiques, globalement stables pour le contrôle d'attitude d'un objet rigide. Pour atteindre des propriétés de stabilité *globale*, il est donc nécessaire de chercher des contrôleurs non linéaires ou hybrides.

Dans cette thèse, nous proposons une structure de commande de déviation à une trajectoire théorique similaire aux approches Proportionnel Dérivée avec injection d'une *commande optimale*, mais avec comme nouvelle proposition de gérer de manière *continue* l'ambiguïté de signe de la *double couverture*. Cette opération est faite par une multiplication continue des termes qui doivent changer de direction lors d'un demi-tour de l'objet, par la *partie scalaire* du quaternion. Cette structure de contrôleur permet d'obtenir une propriété de stabilité *presque* globale.

Enfin, nous utilisons les nouveaux outils d'analyse LMI développés dans le chapitre 3 précédent pour les systèmes variant dans le temps, pour faire la synthèse d'un contrôleur localement stable, avec plusieurs intégrateurs pour être en mesure d'annuler différents profils de perturbations, en répondant à un cahier des charges multi-performance.

4.2 Modèle de déviation d'attitude

4.2.1 Principe Fondamental de la Dynamique

Le modèle mathématique décrivant la dynamique du mouvement de rotation est une partie du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) représenté sur la figure 4.2. Dans cette thèse, nous étudions uniquement le contrôle du mouvement de rotation, le contrôle du mouvement de translation étant supposé traité séparément.

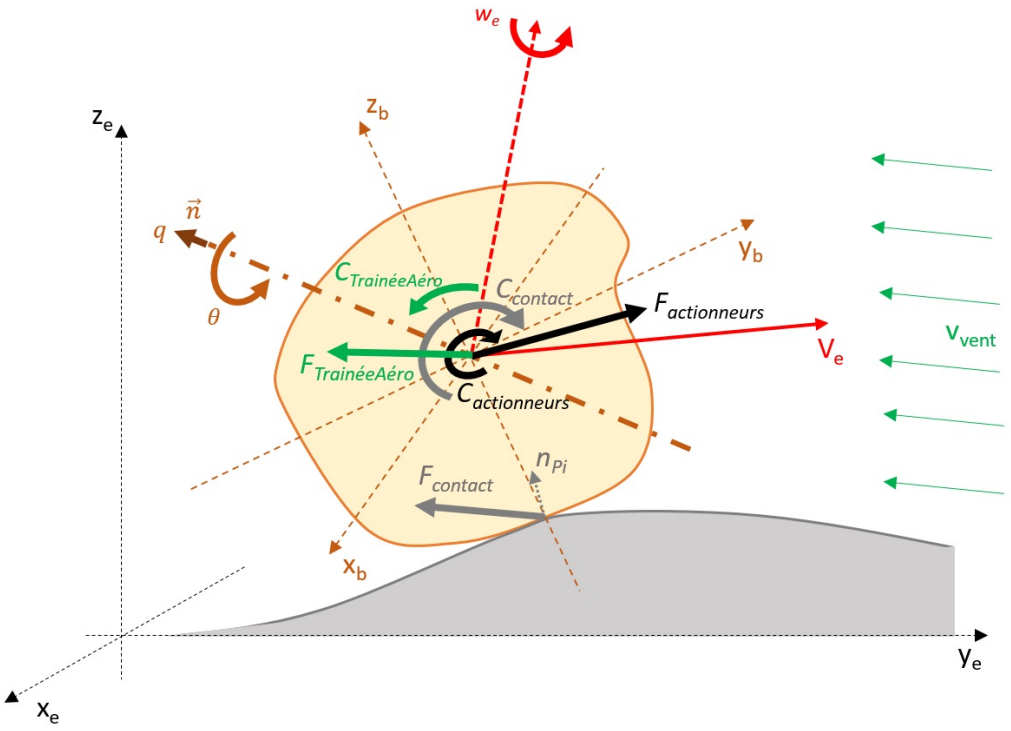

FIGURE 4.2 – Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliqué à un objet rigide quelconque.

Définition 4.1: Modèle du mouvement de rotation par quaternion

Le Principe Fondamental de la Dynamique pour le mouvement de rotation est défini par le système d'équations différentielles suivant :

$$\hat{H} : \begin{cases} \dfrac{d(q)}{dt} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_V \\ S_q(q) \end{pmatrix} \omega_b \\ J_b \dfrac{d(\omega_b)}{dt} + S_V(\omega_b) J_b \omega_b = C_{act_b} + C_{ext_b} \end{cases} \tag{4.2}$$

Avec toutes les variables sans index exprimées dans le référentiel terrestre, toutes les variables avec l'index "$_b$" exprimées dans le référentiel en mouvement lié à l'objet

rigide, et avec :

— l'attitude instantanée représentée par le quaternion unitaire

$$q = \begin{pmatrix} q_o \\ q_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{4.3}$$

correspondant à une rotation de l'objet d'un angle θ autour de l'axe défini par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^\top \in \mathbb{R}^3$. La position d'attitude sans l'ambiguïté de la *double couverture* peut être définie par : $sign(q_o)q_V$.

Pour rappel des notations : $S_q(q) = \begin{pmatrix} q_o & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} = q_o I_3 + S_V(q_V)$

— $\omega_b \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de vitesse de rotation,

— C_{act_b}, $C_{ext_b} \in \mathbb{R}^3$ sont respectivement les couples appliqués par les actionneurs et l'environnement extérieur (traînée de l'air, objets ou murs en contact avec l'objet).

La deuxième équation est intégralement exprimée dans le référentiel du corps rigide en rotation pour que l'inertie J_b apparaisse comme une constante. Dans ce référentiel, les entrées sont également directement égales aux actions des actionneurs (actionneurs attachés à l'objet en mouvement). On suppose avoir un objet complètement commandé, c'est-à-dire des actionneurs agissant indépendamment sur les trois composantes du vecteur d'entrée de commande C_{act_b}.

4.2.2 Représentation d'état du modèle de déviation

On suppose maintenant que l'objet doit suivre une trajectoire théoriquement réalisable comme représenté sur la figure 4.3.

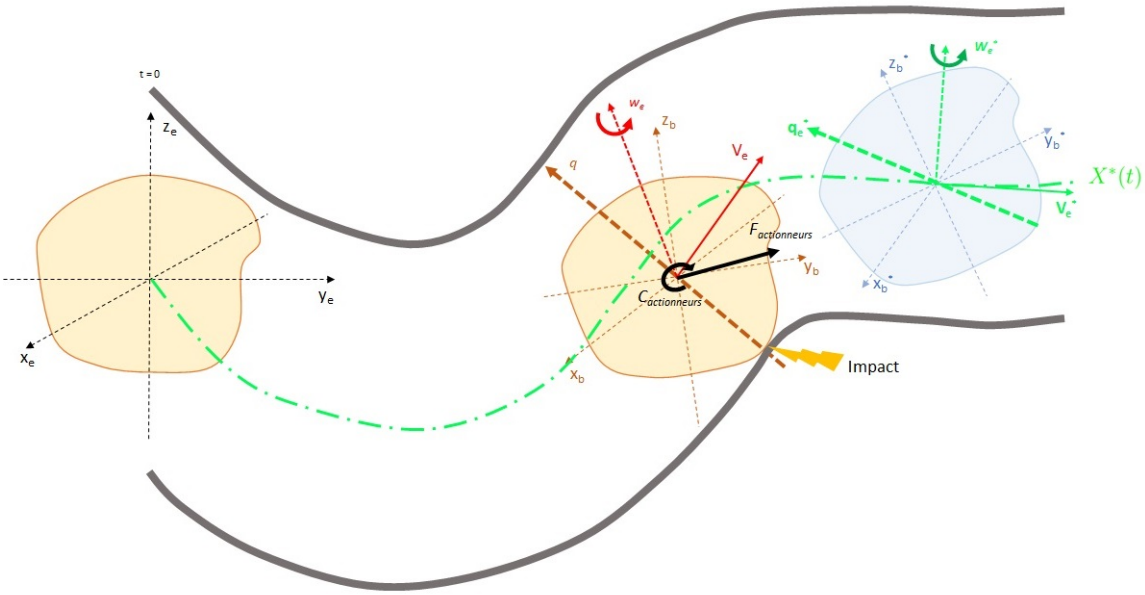

FIGURE 4.3 – Suivi d'une trajectoire théoriquement réalisable (l'étude porte uniquement sur le contrôle temps-réel de l'attitude de l'objet).

Définition 4.2: Trajectoire théorique de rotation

Le problème de *commande optimale* (cf. [5]) est considéré résolu pour le système (4.2) théorique, avec une inertie théorique J_b^*, sans aucune perturbation externe ($C_{ext_b} = 0$), menant à la définition d'une trajectoire théoriquement réalisable (q^*, ω_b^*) avec son entrée optimale $C_{act_b}^*$ solution de (4.2) :

$$H^* : \begin{cases} \dfrac{d(q^*)}{dt} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_V^* \\ S_q(q^*) \end{pmatrix} \omega_b^* \\ J_b^* \dfrac{d(\omega_b^*)}{dt} + S_V(\omega_b^*) J_b^* \omega_b^* = C_{act_b}^* \end{cases} \tag{4.4}$$

Toutes les valeurs théoriques sont notées avec un exposant *.

Le problème de *commande optimale* menant à l'élaboration d'une telle trajectoire théorique n'est pas traitée dans cette thèse : nous considérons uniquement le fait que la trajectoire est solution de l'équation (4.4) et que l'objet et ses équipements embarqués (capteurs, actionneurs, calculateurs) sont dimensionnés pour pouvoir la réaliser.

Nous souhaitons asservir en temps-réel l'objet autour de cette trajectoire d'attitude selon la méthode exposée en préliminaire et résumée par le schéma 2.5 page 13. Ce schéma est reproduit de manière simplifiée pour le contrôle spécifique de l'attitude de l'objet dans la figure 4.4 suivante.

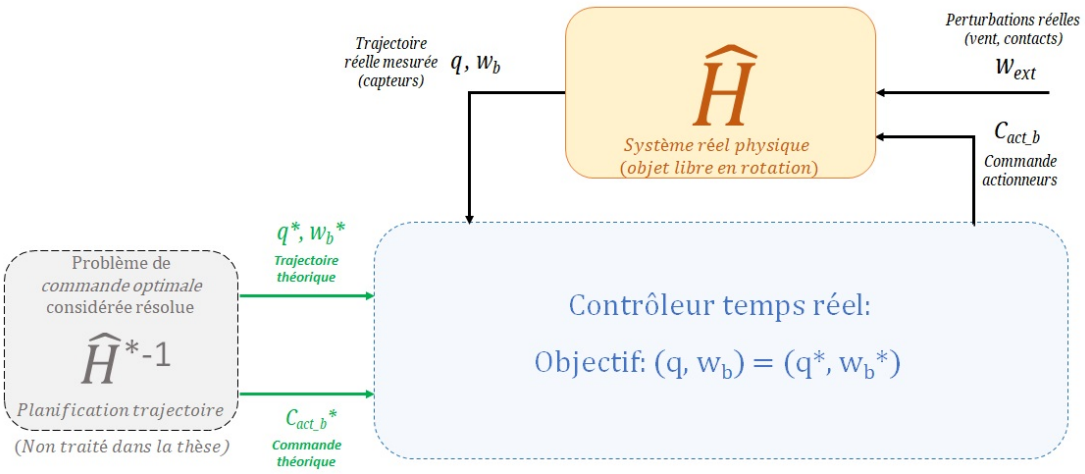

FIGURE 4.4 – Stratégie de contrôle du mouvement de rotation le long d'une trajectoire théorique.

Proposition 4.3: Modèle de déviation d'attitude

Le modèle décrivant la dynamique de la déviation du mouvement de rotation de l'objet décrit par (4.2), par rapport la trajectoire d'attitude théorique (4.4), (c'est-à-dire "$\hat{H} - \hat{H}^*$") a la représentation d'état suivante :

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x} = \hat{A}(x)x + B(u+w) \\ z_q = C_q x \\ z_\omega = C_\omega x \\ y = x \end{cases} \tag{4.5}$$

Avec l'état $x = \begin{pmatrix} q_V^{\varepsilon\top} & \omega_b^{\varepsilon^*\top} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^6$ et les matrices d'état :

$$\hat{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}S_q(q^\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ I_3 \end{pmatrix}, \; C_q = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \end{pmatrix}, \; C_\omega = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

La *partie scalaire* du quaternion q_o^ε à l'intérieur de la matrice $S_q(q^\varepsilon) = q_o^\varepsilon I_3 + S_V(q_V^\varepsilon)$ dans la matrice $A(x)$ est la fonction non linéaire de l'état solution de :

$$\frac{dq_o^\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{2} q_V^{\varepsilon\top} \omega_b^{\varepsilon^*} = -\frac{1}{4} x^\top \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} x \tag{4.6}$$

Elle respecte également la contrainte de norme unitaire du quaternion :

$$q_o^{\varepsilon 2} + ||q_V^\varepsilon||^2 = 1$$

Commentaire : La partie scalaire du quaternion q_o^ε n'est pas considérée comme un état du système. q_V^ε décrit entièrement la position d'attitude de l'objet à l'ambiguïté de signe près de la *double couverture* du quaternion. Pour lever cette ambiguïté, l'état complet suivant est utilisé pour l'analyse des résultats :

$$x_c = (sign(q_o^\varepsilon) q_V^{\varepsilon\top} \quad \omega_b^{\varepsilon^*\top})^\top \in \mathbb{R}^6 \tag{4.7}$$

Une attention particulière devra être prise pour lire des courbes de x_c qui a un comportement hybride lors du changement de signe de q_o (saut du signe des trois composants du terme $sign(q_o^\varepsilon) q_V$ dans x_c).

Toutefois, l'ambiguïté de la *double couverture* n'affecte pas la définition du point d'équilibre : le point d'équilibre est la valeur unique $x = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^\top$, ce qui signifie que l'objet est exactement sur la trajectoire d'attitude lorsque l'état original x ou l'état complet x_c est nul.

Preuve : Le système de déviation d'attitude $\hat{\Sigma}$ est obtenu en effectuant la "différence" (non linéaire du fait du quaternion) entre (4.2) et (4.4) donnant les définitions de variables suivantes :

— l'état $x = \begin{pmatrix} q_V^{\varepsilon\top} & \omega_b^{\varepsilon^*\top} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^6$ défini par :

— q_V^ε la partie vectorielle de l'erreur d'attitude au format quaternion correspondant à :

$$q^\varepsilon = \begin{pmatrix} q_o^\varepsilon \\ q_V^\varepsilon \end{pmatrix} = q \star q^{*-1} = \begin{pmatrix} q_o & -q_V \\ q_V & S_q(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_o^* \\ -q_V^* \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

avec l'opération $\star$ correspondant à la multiplication de quaternions de l'algèbre des quaternions (cf. annexe B). On peut aussi écrire cette relation : $q = q^\varepsilon \star q^*$, signifiant que q^ε est la correction de rotation à effectuer pour amener l'objet de l'attitude théorique q^* à l'attitude réelle courante q. L'objet est sur la trajectoire signifiant $q = q^*$, si et seulement si $q^\varepsilon = (\pm 1\ 0\ 0\ 0)^\top$, les deux valeurs (*double couverture*) représentant la même attitude de référence correspondant à aucune correction de rotation.

— $\omega_b^{\varepsilon^*}$ l'erreur de vitesse de rotation :

$$\omega_b^{\varepsilon^*} = Q_q(q^*)\omega_b^\varepsilon = Q_q(q^*)(\omega_b - \omega_b^*) \tag{4.9}$$

La multiplication du vecteur de l'erreur de vitesse de rotation $\omega_b^\varepsilon = \omega_b - \omega_b^*$ par la matrice de rotation $Q_q(q^*)$ (cf. annexe B pour le lien entre matrice de rotation et quaternion) ne change pas sa norme qui est égale à : $||\omega_b^\varepsilon|| = ||\omega_b - \omega_b^*|| = ||\omega_b^{\varepsilon^*}||$. Donc, quand $\omega_b^{\varepsilon^*} = 0$, on obtient $\omega_b = \omega_b^*$, ce qui correspond au fait d'être sur la trajectoire de vitesse de rotation.

— l'entrée de correction u définie de telle sorte que la commande de couple total C_{act_b} de (4.2) soit égale à :

$$\begin{aligned} C_{act_b} = {} & J_b^*\dot{\omega}_b^* + S_V(\omega_b^*)J_b^*\omega_b^* \\ & + S_V(\omega_b^*)(2J_b^* - Tr(J_b^*)I_3)\omega_b^\varepsilon + S_V(\omega_b^\varepsilon)J_b^*\omega_b^\varepsilon \\ & + J_b^* Q_q(q^*)^{-1}u \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous pouvons remarquer que en dehors du terme de correction u et de l'erreur de vitesse de rotation ω_b^ε (obtenue par mesure et fusion de données), la commande complète est fonction uniquement de paramètres théoriques, donc connus, correspondant à la description de l'objet théorique J_b^* et de la trajectoire théorique q^* et ω_b^*.

— l'entrée de perturbation $w = w_\Delta + w_{ext}$ telle que :

— w_Δ est l'entrée de perturbation interne générée par l'approximation du système par un modèle théorique effectuée lors du calcul de la commande optimale $C_{act_b}^*$ avec $J_b^* = J_b - \Delta J_b$:

$$\begin{aligned} w_\Delta = Q_q(q^*)J_b^{-1}\Big[& -\Delta J_b\dot{\omega}_b^* - S_V(\omega_b^*)\Delta J_b\omega_b^* \\ & - S_V(\omega_b^*)(2\Delta J_b - Tr(\Delta J_b)I_3)\omega_b^\varepsilon - S_V(\omega_b^\varepsilon)\Delta J_b\omega_b^\varepsilon \\ & - \Delta J_b Q_q(q^*)^{-1}u\Big] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nous pouvons remarquer que :

- s'il n'y a aucune incertitude $\Delta J_b = J_b - J_b^* = 0$, alors cette entrée est nulle ($w_\Delta = 0$),

- si $\Delta J_b \neq 0$ et si la trajectoire théorique est une rotation à vitesse constante ($\omega_b^* =$ constante), alors l'entrée de perturbation est au moins égale au biais constant $S_V(\omega_b^*)\Delta J_b \omega_b^*$, plus les autres termes variables fonction de l'erreur à la trajectoire ω_b^ε et de l'entrée de correction u.

- si $\Delta J_b \neq 0$ et si la trajectoire théorique est une rotation à vitesse en rampe ($\omega_b^* = \omega_1 t$, $\omega_1 \in \mathbb{R}^3$ non nulle), alors l'entrée de perturbation est au moins égale au terme en $S_V(\omega_1)\Delta J_b \omega_1 t^2$, plus les autres termes variables fonction de l'erreur à la trajectoire ω_b^ε et de l'entrée de correction u.

ΔJ_b ne pouvant être strictement nulle pour un système réel, w_Δ va donc engendrer une entrée de pertubation non nulle même si l'objet est exactement sur la trajectoire dès que l'objet sera en mouvement ($\omega_b^* \neq 0$). Pour une trajectoire très dynamique avec de fortes variations de ω_b^*, la perturbation sera d'autant plus dynamique du fait du produit vectoriel.

— w_{ext} est l'entrée de perturbation externe due aux interactions avec l'environnement (trainée aérodynamique, vents, contact avec obstacles) :

$$w_{ext} = Q_q(q^*) J_b^{-1} C_{ext_b} \tag{4.12}$$

De manière générale, en vol libre dans l'air, sans parler d'éventuels impacts sur des obstacles, la norme de cette entrée sera d'autant plus importante que la vitesse de rotation ω_b^* est grande.

— la sortie de performance de suivi de trajectoire z_q correspondant à la déviation d'attitude q_V^ε.

— la sortie de performance de suivi de trajectoire z_ω correspondant à l'écart de vitesse de rotation $\omega_b^{\varepsilon^*}$.

— les mesures $y = x$ considérées disponibles via des capteurs physiques embarqués et un post-traitement de fusion de données (exemple du filtre de Kalman pour l'attitude [37]). q_o^ε est également disponible grâce à (4.6). ■

Avec cette définition du modèle de déviation, nous pouvons donc rechercher une structure de contrôleur de retour d'état qui rend $x = 0$ un point d'équilibre stable asymptotique du système, en répondant à des exigences spécifiques, telles que définies dans le chapitre précédent. Nous pouvons notamment utiliser l'heuristique 3.15 qui consiste à garantir que l'attitude reste à l'intérieur d'un tube de tolérance d'écart angulaire δ_θ^* autour de la trajectoire d'attitude ($||z_q|| < \sin(\delta_\theta^*/2)$) pour la pire des manœuvres opérationnelles, permettant à la matrice d'état $\hat{A}(x)$ de rester bornée à l'intérieur d'un polytope sur lequel on peut faire la synthèse de ce retour d'état.

4.3 Synthèse de contrôleurs

4.3.1 Préliminaires

Comme le confirme la preuve du lemme 4.5 ci-dessous, malgré le couplage des trois directions des vitesses de rotation dû au terme $S_V(q_V^\varepsilon)$ dans la matrice $\hat{A}(x)$, le système de déviation $\hat{\Sigma}$ est homogène dans les trois dimensions de l'espace (x, y, z). Ainsi, il est possible de simplifier le système $\hat{\Sigma}$ défini par (4.5) d'ordre 6, en un système *réduit* d'ordre 2 comme suit :

Définition 4.4: Modèle *réduit* de déviation d'attitude

On nomme par système *réduit* du système $\hat{\Sigma}$ décrit par (4.5) le système du second ordre non linéaire du défini par :

$$\hat{\Sigma}_r : \begin{cases} \dot{x}_r = \hat{A}_r(x_r)x_r + B_r(u_r + w_r) \\ z_{q_r} = C_{q_r}x_r \\ z_{\omega_r} = C_{\omega_r}x_r \\ y_r = x_r \end{cases} \tag{4.13}$$

Avec l'état *réduit* $x_r = (q_{V_r}^\varepsilon \;\; \omega_{b_r}^{\varepsilon^*})^\top = (\sin(\theta^\varepsilon/2) \;\; \dot{\theta}^\varepsilon)^\top \in \mathbb{R}^2$, la commande *réduite* $u_r \in \mathbb{R}$ et la perturbation *réduite* $w_r \in \mathbb{R}$ correspondant aux projections scalaires des entrées d'origine u et w sur l'axe instantané $\vec{n}^\varepsilon$ ($\vec{n}^\varepsilon(t)$ étant le vecteur d'orientation instantané défini par $q_V^\varepsilon = \sin(\theta^\varepsilon/2)\vec{n}^\varepsilon$) ; et avec les matrices :

$$\hat{A}_r(x_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2q_o^\varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{q_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, C_{\omega_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et avec toujours q_o^ε solution de :

$$\dot{q}_o^\varepsilon = -\frac{1}{2}q_{V_r}\omega_{b_r}^{\varepsilon^*} = -\frac{1}{4}x_r^\top \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_r \tag{4.14}$$

qui respecte également la contrainte de norme unitaire du quaternion :

$$q_o^{\varepsilon 2} + {q_{V_r}^\varepsilon}^2 = 1$$

Lemme 4.5: Contrôle d'attitude scalaire

Un retour d'état variable dans le temps

$$u_r = [-k_p(t, x_r) \ -k_d(t, x_r)]x_r, \ k_p(t, x_r), k_d(t, x_r) \in \mathbb{R}$$

rend $x_r = 0$ asymptotiquement stable pour le système *réduit* (4.13) et $V_r(t, x_r) = x_r^\top P_r(t, x_r)x_r$, avec $P_r(t, x_r) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice symétrique positive définie variant dans le temps, est une fonction de Lyapunov qui le démontre,
si et seulement si le retour d'état

$$u = [-k_p(t, x)I_3 \ -k_d(t, x)I_3]x$$

rend $x = 0$ asymptotiquement stable pour le système de déviation original (4.5) et la fonction de Lyapunov $V(t, x) = x^\top P(t, x)x$ avec $P(t, x) = P_r(t, x) \otimes I_3$ est un certificat.

Commentaire : $\hat{\Sigma}_r$ correspond à la projection instantanée de $\hat{\Sigma}$ sur la direction du vecteur unitaire $\vec{n}^\varepsilon(t)$, c'est-à-dire à l'objet en rotation autour de l'axe $\vec{n}^\varepsilon(t)$ quelconque dans l'espace, qui devient constant égal à sa valeur initiale. Cet axe de rotation mène l'objet en une seule rotation du point courant au point d'équilibre. Ce système correspond aussi au problème de contrôle à une dimension d'un objet tournant autour d'un seul axe fixe.

Le système "complément" $(\hat{\Sigma} - \hat{\Sigma}_r \otimes n^\varepsilon)$ pourrait être défini pour étudier spécifiquement l'influence des perturbations sur la projection instantanée des trajectoires sur la tangente aux équipotentielles de position d'attitude z_q , c'est-à-dire la projection des trajectoires orthogonalement à la direction menant en ligne droite du point courant au point d'équilibre.

Preuve : Notons que la matrice d'état $\hat{A}(x)$ de (4.5) peut être décomposée comme suit :

$$\hat{A}(x) = \hat{A}_r(x) \otimes I_3 + \hat{A}_V(x) \tag{4.15}$$

Avec $\otimes$ le produit de Kronecker et avec :

$$\hat{A}_V = \begin{pmatrix} 0 & 1/2S_V(q_V^\varepsilon) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifie pour n'importe quelle matrice symétrique $P(t, x) = P_r(t, x) \otimes I_3$ avec $P_r(t, x) \in \mathbb{S}^2$:

$$x^\top(\hat{A}_V(x)^\top P(t, x) + P(t, x)\hat{A}_V(x))x = 0 \tag{4.16}$$

En effet en développant cette équation en prenant en compte que $S_V(q_V^{\varepsilon\top}) =$

$-S_V(q_V^\varepsilon)$ est antisymétrique, le terme de gauche est égal à :

$$(q_V^{\varepsilon\top}\ \omega_b^{\varepsilon^*\top})\Big(\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1/2S_V(q_V^\varepsilon) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}(t,x)I_3 & p_{12}(t,x)I_3\\ p_{12}(t,x)I_3 & p_{22}(t,x)I_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_{11}(t,x)I_3 & p_{12}(t,x)I_3\\ p_{12}(t,x)I_3 & p_{22}(t,x)I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1/2S_V(q_V^\varepsilon)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Big)\begin{pmatrix}q_V^\varepsilon\\ \omega_b^{\varepsilon^*}\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{p_{11}}{2}(t,x)\omega_b^{\varepsilon^*\top}S_V(q_V^\varepsilon)q_V^\varepsilon - \frac{p_{12}}{2}(t,x)\omega_b^{\varepsilon^*\top}S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*}$$
$$+\frac{p_{11}}{2}(t,x)q_V^{\varepsilon\top}S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*} + \frac{p_{12}}{2}(t,x)\omega_b^{\varepsilon^*\top}S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*}$$
$$= 0$$

en remarquant que $S_V(q_V^\varepsilon)V$ réalise un produit vectoriel de q_V^ε avec $V \in \mathbb{R}^3$, et donc par conséquent $S_V(q_V^\varepsilon)q_V^\varepsilon = 0$ et $S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*}$ est orthogonal à q_V^ε et $\omega_b^{\varepsilon^*}$:
$q_V^{\varepsilon\top}S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*} = 0$,
$\omega_b^{\varepsilon^*\top}S_V(q_V^\varepsilon)\omega_b^{\varepsilon^*} = 0$.

Ces propriétés font que la matrice $\hat{A}_V(x)$ s'annule dans la dérivée d'une fonction quadratique de Lyapunov de la forme $V(t,x) = x^\top P(t,x)x$ avec $P(t,x) = P_r(t,x) \otimes I_3$, $P_r(t,x) \in \mathbb{S}_{++}{}^2$ et on obtient bien l'équation (4.16).

Ce qui mène au résultat :

$$\dot{V} = x^\top(A(x)^\top P(t,x) + P(t,x)A(x) + \dot{P}(t,x))x$$

$$\dot{V} = x^\top\Big((A_r(x)^\top P_r(t,x) + P_r(t,x)A_r(x) + \dot{P}_r(t,x)) \otimes I_3\Big)x$$

$\dot{V} < 0$ *si et seulement si* $\dot{V}_r < 0$, le lemme est prouvé. ■

Commentaire : Nous pouvons remarquer qu'en multipliant à gauche la première ligne de l'équation différentielle de (4.5), $\dot{q}_V^\varepsilon = 1/2(q_o^\varepsilon I_3 + S_V(q_V^\varepsilon))\omega_b^{\varepsilon^*}$, par $2q_V^{\varepsilon\top}$, le terme $S_V(q_V^\varepsilon)$ disparaît donnant :

$$d||q_V^\varepsilon||^2/dt = q_o^\varepsilon q_V^{\varepsilon\top}\omega_b^{\varepsilon^*}$$

Par conséquent le terme $S_V(q_V^\varepsilon)$ dans la première équation différentielle de (4.5) ne change pas la norme de q_V^ε, c'est-à-dire la distance au point d'équilibre. Il correspond à une rotation orthogonale à la direction menant à la déviation nulle $q_V^\varepsilon = 0$, ce qui est cohérent avec sa disparition dans la dérivée de la fonction de Lyapunov.

Grâce à ce lemme, nous pouvons donc chercher des structures de lois de commande pour le contrôle d'attitude similaire à un contrôleur "Proportionnel Dérivée" en la déviation de position d'attitude q_V^ε et en l'écart de vitesse de rotation $\omega_b^{\varepsilon^*}$ (les paramètres sont notées k_p comme un gain "Proportionnel" et k_d comme un gain "Dérivée"), en effectuant l'analyse de stabilité sur le système *réduit*.

Cette structure de contrôleur est semblable aux approches de contrôle d'attitude fondées sur le quaternion couramment développées dans d'autres travaux, comme dans [55], qui sont des combinaisons linéaires constantes des erreurs de la partie

vectorielle du quaternion et de la vitesse de rotation, après injection des termes de cinématique non linéaire.

Comme expliqué au début de ce chapitre et démontré dans [8], le problème topologique de la *double couverture* conduit à ne pas être en mesure de construire une loi de commande linéaire continue invariante dans le temps, statique ou dynamique, globalement stable pour le contrôle d'attitude d'un objet rigide.

Ainsi, une loi de contrôle $u = -k_p q_V^{\varepsilon} - k_d \omega_b^{\varepsilon^*}$, avec $k_p, k_d \in \mathbb{R}$ deux constantes, ne pourra pas rendre le point d'équilibre $x = 0$ globalement stable pour le système $\hat{\Sigma}$ (ou le système *réduit* $\hat{\Sigma}_r$) en boucle fermée avec cette commande u.

En s'inspirant de la stratégie de contrôle hybride relativement connue aujourd'hui, développée dans [38], permettant d'obtenir une propriété de stabilité globale du contrôle d'attitude, nous recherchons dans le paragraphe suivant à reproduire la même opération "d'inversion du sens" de la commande de rotation au passage du demi-tour, mais cette fois de manière continue.

4.3.2 Retour d'état non linéaire *presque* globalement stable

Comme exposée dans [38], la commande hybride prend en compte le signe de la *partie scalaire* $q_o^{\varepsilon^*}$ du quaternion pour inverser de manière discrète le sens de la commande liée à l'attitude, au moment du changement de signe de $q_o^{\varepsilon^*}$ qui indique le passage du demi-tour :

$$u = -k_p h q_V^{\varepsilon} - k_d \omega_b^{\varepsilon^*}$$

avec $h = +1$ quand $q_o^{\varepsilon^*} > 0$, et $h = -1$ quand $q_o^{\varepsilon^*} < 0$, avec un hystérésis sur le seuil du passage autour de $q_o^{\varepsilon^*} = 0$ pour éviter des changements de signe intempestifs entre $+1$ et -1 autour des points d'équilibre instable, qui pourraient être générés à cause de l'échantillonage du calculateur lorsque l'objet se retrouve à faible vitesse autour de ces points (appartition de cycles limites autour des points d'équilibre instable pouvant être appelés "bagotements").

Ici on reproduit la même opération d'inversion de la commande de manière continue en multipliant par q_o^{ε} les termes dont le signe doit être inversé dans le retour d'état :

$$u = -k_p q_o^{\varepsilon} q_V^{\varepsilon} - k_d \omega_b^{\varepsilon^*}$$

q_o^{ε} est du signe nécessaire à l'inversion de l'ambiguïté de signe de la *double couverture* et est égal à 1 en valeur absolue au point d'équilibre. Il remplace exactement le rôle de l'inverseur h de la commande hybride mais en faisant cette fois-ci l'inversion de signe de manière continue, pour obtenir une propriété de stabilité *presque* globale.

La définition de stabilité *presque* globale est reprise de [42] :

Définition 4.6: Stabilité *presque* gobale

Un système autonome défini par $\dot{x} = f(x)$, où $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ (suffisant pour assurer l'existence et l'unicité des solutions au problème de la valeur initiale) et $f(0) = 0$, est *presque* globalement asymptotiquement stable si toutes les trajectoires sauf un ensemble réduit de mesure de Lebesgue nulle convergent asymptotiquement vers l'origine.

Proposition 4.7: Retour d'état non linéaire *presque* globalement stable

Un retour d'état non linéaire de la forme :

$$u(x) = -k_p q_o^\varepsilon q_V^\varepsilon - k_d \omega_b^{\varepsilon^*} = K(x)x \tag{4.17}$$

Donnant le système non linéaire en boucle fermée sans perturbations ($w = 0$) :

$$\begin{aligned} \Sigma : \dot{x} = A(x)x &= \left(\hat{A}(x) + BK(x)\right) x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/2\ S_q(q^\varepsilon) \\ -k_p q_o^\varepsilon I_3 & -k_d I_3 \end{pmatrix} x \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec $K(x) = (-k_p q_o^\varepsilon I_3 \ -k_d I_3)$, $k_p, k_d > 0$ deux constantes scalaires, rend ce système en boucle fermée *presque* globalement asymptotiquement stable pour l'ensemble compact invariant défini par $\mathcal{W} = \{0, \bar{X}\}$, avec $\bar{X} = \{\bar{x} = (\bar{q}_V^{\varepsilon\top} 0\ 0\ 0)^\top | ||\bar{q}_V^\varepsilon|| = 1\}$.

Commentaires : Σ est un système périodique pour lequel les attitudes correspondant exactement à un demi-tour de l'objet dans n'importe quelle direction depuis le point d'équilibre $x = 0$, ensemble de position d'attitude défini par $\bar{X}$ ($||\bar{q}_V^\varepsilon|| = 1$), sont des points d'équilibre instables avec le contrôleur défini par (4.17) (cet ensemble équivaut à la condition $q_o^\varepsilon = \bar{q}_o^\varepsilon = 0$).

q_o^ε est égal à 1 en valeur absolue au voisinage du point d'équilibre, donc sans effet lorsque le système est à l'équilibre, ce qui nous permet de conserver les performances du contrôleur statique original localement au voisinage du point d'équilibre.

A l'opposé, lorsque l'objet est à l'envers, l'autorité de ce contrôleur pour ramener l'objet au point d'équilibre diminue jusqu'à disparaître aux points d'équilibre instable ($q_o^\varepsilon = 0$ donc $-k_p q_o^\varepsilon q_V^\varepsilon = 0$). Il n'y a donc pas de problématique de cycle limite ("bagotements") autour des points d'équilibre instable et donc pas d'hystérésis à mettre en place pour l'éviter avec ce contrôleur continu, mais les performances temporelles peuvent être très ralenties au voisinage de ces points.

Toutefois, ces points d'équilibre instable sont à l'opposé du tube de tolérance de suivi de trajectoire dans lequel le contrôleur doit maintenir l'objet (c'est-à-dire

probablement loin du dimensionnement de la plage des actionneurs). Ainsi, cette structure de contrôleur pourrait être une stratégie intéressante pour gérer continûment la saturation des actionneurs.

Preuve : La preuve de la proposition 4.7 est effectuée en utilisant les propriétés de stabilité asymptotique *presque* globale telles que définies dans [42], précédemment mentionnées comme le dual du théorème de stabilité de Lyapunov [49], qui est un dérivé du théorème de stabilité de Lyapunov [36] pour les systèmes à plusieurs équilibres ou ensembles invariants.

Nous utilisons précisément directement le résultat dérivé récent présenté dans [20] qui est une relaxation des conditions de Stabilité-d'Entrée-à-Etat (Input-to-State-Stability, ISS) pour les systèmes périodiques multi-stables, qui nous dit, pour résumer, qu'il suffit de trouver une fonction de Lyapunov strictement négative partout sauf sur l'ensemble invariant où elle s'annule pour démontrer que le système est *presque* globalement asymptotiquement stable (l'exemple dans [20] est précisément la démonstration de la stabilité *presque* globale du problème du contrôle du mouvement de rotation autour d'un axe fixe équivalent au système *réduit* (4.13)).

En utilisant le lemme 4.5 et en s'inspirant des matrices de Lyapunov des systèmes LTI définis dans l'annexe A page 103, on peut définir pour tout $\alpha \in]0;1[$, la classe de fonctions de Lyapunov $V(x) = x^\top P(x) x$ avec la matrice $P(x)$ affine en q_o^ε égale à :

$$P(x) = \begin{pmatrix} (2k_p + 4\alpha k_d^2) I_3 & 2\alpha k_d q_o^\varepsilon I_3 \\ 2\alpha k_d q_o^\varepsilon I_3 & I_3 \end{pmatrix} \succ 0 \tag{4.19}$$

En rappelant que $q_o^\varepsilon \in [-1;1]$, $P(x)$ est bien définie positive quels que soient $k_p, k_d > 0$ et quel que soit $\alpha \in]0;1[$.

La dérivée de la fonction de Lyapunov $V(x)$ pour les trajectoires du système en boucle fermée (4.18) est égale à :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^\top [A(x)^\top P(x) + P(x) A(x) + \dot{P}(x)] x \\ &= x^\top \begin{pmatrix} -4\alpha k_p k_d q_o^{\varepsilon 2} I_3 & 0 \\ 0 & -2k_d(1 - \alpha q_o^{\varepsilon 2}) I_3 \end{pmatrix} x - 8\alpha k_d (\dot{q}_o^\varepsilon)^2 \\ &< 0 \quad \forall x \notin \mathcal{W} \end{aligned} \tag{4.20}$$

$\dot{V}$ est strictement négative partout sauf pour tout $x \in \mathcal{W}$ où elle s'annule. A partir des résultats de [20], nous pouvons conclure que V est une fonction ISS Lyapunov qui démontre la propriété de stabilité asymptotique *presque* globale du système en boucle fermée. ■

Représentation physique du contrôleur *presque* globalement stable

La figure 4.5 représente un assemblage physique équivalent à l'action du contrôleur non linéaire (4.17) pour le problème du contrôle de rotation autour d'un axe fixe, c'est-à-dire le système *réduit* Σ_r.

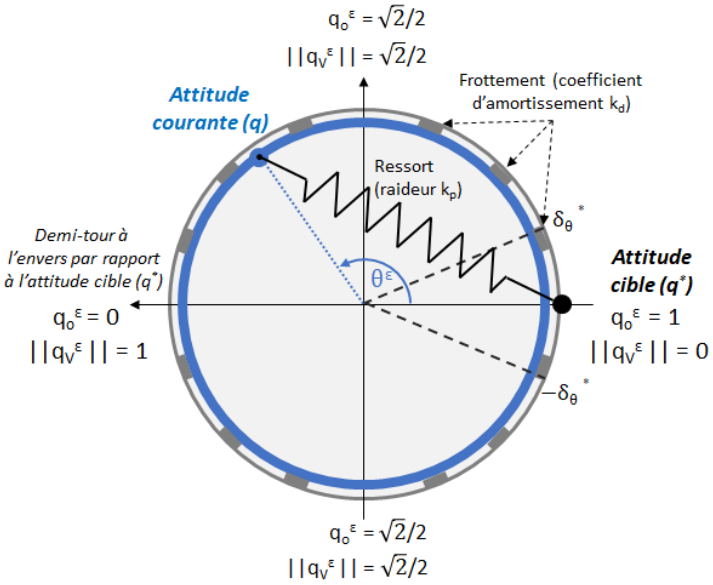

FIGURE 4.5 – Assemblage physique équivalent au comportement du système *réduit* Σ_r en boucle fermée avec le contrôleur (4.17).

Le système en boucle fermée avec la structure de contrôleur (4.17) est assimilé au mouvement d'un cylindre bleu d'inertie normalisée égale à un, qui tourne à l'intérieur d'un cylindre gris fixe avec un coefficient global d'amortissement de frottement k_d. Un ressort de raideur k_p attaché aux deux points de chaque cylindre devant coïncider, ramène le cylindre bleu en rotation à l'attitude requise dans le cylindre gris fixe. Nous pouvons constater que si le cylindre bleu est positionné sans vitesse initiale exactement de telle sorte que le point bleu soit diamétralement opposé au point noir, c'est-à-dire au point d'équilibre instable $\bar{x}$, alors le ressort sera tendu sans ramener d'un côté ni de l'autre, le point du cylindre bleu sur le point noir : cela illustre bien le point d'équilibre instable et la stabilité *presque* globale de cette structure de contrôleur.

Plan de phase du système *réduit* en boucle fermée

Une représentation dans le plan de phase du système *réduit* (4.13) en boucle fermée avec le contrôleur (4.17) traçant l'évolution de l'état complet $x_c = (\text{sign}(q_o^\varepsilon) q_V^\varepsilon \quad \omega_b^{\varepsilon^*})$ défini par (4.7) depuis différentes conditions initiales, est donnée figure 4.6.

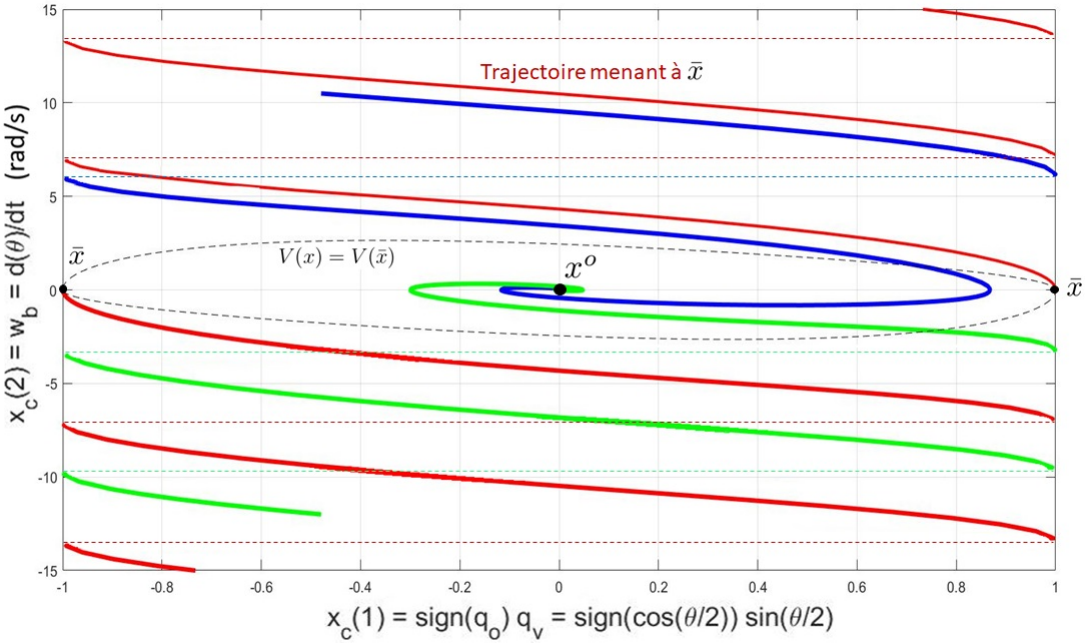

FIGURE 4.6 – Plan de phase pour le système *réduit* Σ_r en boucle fermée avec le contrôleur non linéaire (4.17) avec $k_p = 2$ et $k_d = 1$: courbes bleue et verte sont des trajectoires depuis des C. I. quelconques convergeant asymptotiquement vers le point d'équilibre stable $x_c = 0$; les deux trajectoires en rouge correspondent aux deux trajectoires symétriques (l'objet pouvant tourner dans les deux sens) de mesure nulle conduisant aux points d'attitude d'équilibre instable $\bar{x}_r = (\pm 1\ 0)^\top$.

Une attention particulière devra être prise pour lire la figure 4.6 : elle représente l'évolution de l'état complet x_c qui a un comportement mathématique hybride. Cependant cette singularité mathématique ne représente aucun comportement physique discontinu : avec la définition du quaternion, une rotation complète correspond pour $q^\varepsilon_{V_r}$ au segment $[-1; 1]$, et la multiplication par $sign(q^\varepsilon_o)$ fait faire un saut à la première composante de x_c lorsque l'objet fait plus d'un demi-tour. C'est une façon de représenter la 2π-périodicité du mouvement de rotation avec le quaternion.

Les deux trajectoires en rouge menant aux points d'attitude d'équilibre instable sont obtenues par intégration du système théorique *réduit* Σ_r sans perturbation ($w_r = 0$) en remontant le temps, à partir de points au voisinage des équilibres instables. Ces trajectoires donnent l'ensemble des conditions initiales menant aux points d'équilibre instable. Le moindre écart sur les conditions initiales ou la moindre perturbation le long de ces trajectoires entrainera le système à converger vers le point d'équilibre stable.

4.3.3 Retour d'état invariant localement stable

Si une loi de contrôle $u = -k_p q^\varepsilon_V - k_d \omega^{\varepsilon^*}_b$, avec $k_p, k_d \in \mathbb{R}$ deux constantes, ne pourra pas rendre le point d'équilibre $x = 0$ globalement stable (ni *presque*, engen-

drant éventuellement des *phénomènes de déroulement*) pour le système (4.5), elle permet néanmoins d'obtenir une propriété de stabilité locale autour de la trajectoire :

Proposition 4.8: Retour d'état localement stable

Un retour d'état statique du type

$$u = -k_p q_V^{\varepsilon} - k_d \omega_b^{\varepsilon^*} \tag{4.21}$$

avec $k_p, k_d > 0$ deux constantes, rend le point d'équilibre $x = 0$ localement stable pour le système (4.5) en boucle fermée dont la matrice d'état est :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} S_q(q^{\varepsilon}) \\ -k_p I_3 & -k_d I_3 \end{pmatrix}$$

Preuve : La preuve de stabilité locale est faite pour le système *réduit* Σ_r, qui, grâce au lemme 4.5 page 68, s'applique au système original Σ.

La matrice d'état du système *réduit* en boucle fermée est :

$$A_r(x_r) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 q_o^{\varepsilon} \\ -k_p & -k_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -k_p & -k_d \end{pmatrix} = I(q_o^{\varepsilon}) A^o$$

La matrice d'état constante A^o est Hurwitz avec $k_p, k_d > 0$ (cf. critère Routh-Hurwitz de stabilité [23]). Il existe donc une matrice $P \in \mathbb{S}_{++}^2$ constante, certificat de stabilité de Lyapunov du système $\dot{x} = A^o x$, telle que :

$$P A^o + A^{o\top} P = Q^o \prec 0$$

Nous montrons maintenant que la fonction $V(x_r) = x_r^{\top} P x_r^{\top}$ avec cette même matrice P constante est une fonction de Lyapunov du sytème réduit $\dot{x}_r = A_r(x_r) x_r$ pour un voisinage du point d'équilibre. En calculant la dérivée de cette fonction pour les trajectoires du système réduit $\dot{x}_r = A_r(x_r) x_r$ on obtient :

$$P A_r(x_r) + A_r^{\top}(x_r) P = P I(q_o^{\varepsilon}) A^o + A^{o\top} I(q_o^{\varepsilon}) P = Q(q_o^{\varepsilon})$$

qui est donc une fonction matricielle affine en q_o^{ε} qui vérifie $Q(1) = Q^o \prec 0$.

Par continuité de la fonction $Q(q_o^{\varepsilon})$ affine en q_o^{ε}, q_o^{ε} étant égal à 1 au point d'équilibre $x = 0$ ($I(q_o^{\varepsilon}) = I$ au point d'équilibre), il existe donc un voisinage de $q_o^{\varepsilon} = 1$ défini par $q_o^{\varepsilon} \in [q_o^{\varepsilon *}; 1]$, $q_o^{\varepsilon *} \in]0; 1[$, pour lequel l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\forall q_o^{\varepsilon} \in [q_o^{\varepsilon *}; 1],\ P A_r(x_r) + A_r^{\top}(x_r) P = Q(q_o^{\varepsilon}) \prec 0$$

La fonction $V(x_r) = x_r^{\top} P x_r^{\top}$ est donc une fonction dont la dérivée pour les trajectoires de Σ_r est strictement négative pour un voisinage du point d'équilibre $x_r = 0$.

La fonction $V(x_r)$ ainsi définie est donc une fonction de Lyapunov qui démontre la stabilité locale du système Σ_r.

Par le lemme 4.5, le système en boucle fermée Σ est donc localement stable au voisinage du point d'équilibre $x = 0$, correspondant à $q_o^\varepsilon \in [q_o^{\varepsilon *}; 1]$, avec la matrice d'état variable évoluant dans le polytope correspondant. ■

Commentaires : Ce type de loi de commande peut donc très bien suffire si on suppose que l'objet ne sortira jamais du tube de tolérance d'attitude autour de la trajectoire, sans jamais faire de demi-tour sur lui-même.

La stabilité locale est démontrée pour une valeur maximale d'écart à la trajectoire correspondant à une borne $q_o^{\varepsilon *} \in]0; 1[$, c'est-à-dire pour un écart d'attitude par rapport à la trajectoire strictement inférieure à un demi-tour dans n'importe quelle direction. Rappelons que $q_o^{\varepsilon *}$ peut évoluer dans $[-1; 1]$ (cf. figure B.1 page 112 de l'annexe B) : si l'objet fait plus d'un demi-tour sur lui-même, $q_o^{\varepsilon *}$ change alors de signe et le retour d'état statique ne garantit plus alors de stabilité du point d'équilibre $x = 0$, des *phénomènes de déroulement* pouvant notamment avoir lieu.

Le système (4.5) avec ce retour d'état invariant en boucle fermée rentre donc exactement dans le cadre du chapitre 3 précédent. Il est donc possible d'utiliser les résultats de synthèse LMI du chapitre précédent pour faire la synthèse de ce retour d'état statique localement stable le long de la trajectoire, pour un tube de tolérance d'attitude donné, en l'ayant au préalable augmenté d'intégrateurs pour annuler d'éventuelles erreurs statiques ou de trainage.

Pour illustrer le détail du modèle augmenté de N intégrateurs, comme donné de manière générique par la définition 3.2 page 28 pour les systèmes variant dans le temps, nous donnons ici sa définition détaillée pour le contrôle de la déviation de l'attitude :

Définition 4.9: Modèle de déviation d'attitude en boucle fermée avec N intégrateurs

Le retour d'état (4.21) augmenté de $N \in \mathbb{N}^*$ intégrateurs est défini par

$$u_N(x_N) = -\sum_{j=1}^{N} k_{i_j} \eta_{V_j}^{\varepsilon} - k_p q_V^{\varepsilon} - k_d w_b^{\varepsilon^*} \tag{4.22}$$

avec l'état augmenté défini par $x_N = (\eta_{V_N}^{\varepsilon\top} \ \dots \ \eta_{V_1}^{\varepsilon\top} \ q_V^{\varepsilon\top} \ w_b^{\varepsilon^*\top})^\top \in \mathbb{R}^{3(2+N)}$, donnant le système non linéaire (4.5) en boucle fermée sans perturbations ($w = 0$) :

$$\Sigma_N : \ \dot{x}_N = A_N(x_N) x_N$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/2S(q^{\varepsilon})I_3 \\ -k_{i_N} I_3 & -k_{i_{N-1}} I_3 & -k_{i_{N-2}} I_3 & \dots & -k_{i_1} I_3 & -k_p I_3 & -k_d I_3 \end{pmatrix} x_N \tag{4.23}$$

Comme le modèle de déviation $\hat{\Sigma}$ défini par (4.5) que nous souhaitons asservir possède une entrée de perturbation $w = w_\Delta + w_{ext}$ liée aux incertitudes de modélisation et aux actions de l'environnement extérieur sur l'objet, nous aurons nécessairement une erreur statique avec une structure de correcteur de retour d'état. De plus, si la trajectoire théorique à suivre est très dynamique, avec des variations de vitesse de rotation importante, l'entrée de perturbations liée aux incertitudes et aux trainées de l'air sur l'objet peuvent générer des erreurs de trainage du premier ordre, voire d'ordre supérieur.

En application directe du paragraphe 3.1.1 du chapitre précédent sur la gestion de la précision, il est donc nécessaire d'ajouter au minimum deux intégrateurs au contrôleur original (4.21) pour annuler ces erreurs.

Cette stratégie de contrôle, qui n'a pas encore fait l'objet de cas concret d'application, est à adapter en fonction de l'objet que l'on cherche à contrôler et de la nature de ses actionneurs, notamment leur saturation. Par exemple pour les satellites, les actionneurs sont souvent des volants d'inertie pour lesquels l'application d'une commande constante dans un sens, pour compenser un biais ou une perturbation constante, n'est pas possible du fait de la saturation des volants d'inertie.

A priori, elle pourrait être adaptée pour des objets tournant dans tous les sens

avec de fortes dynamiques de rotation et des actionneurs ayant pleine autorité pour toutes les trajectoires opérationnelles (saturation des actionneurs loin du domaine opérationnel nominal du mouvement - par exemple pour des drones, des engins de l'espace à venir tournant dans tous les sens,...).

Nous sommes donc maintenant en mesure d'effectuer la synthèse de ce type de contrôleur (4.22) en utilisant la méthode du chapitre précédent pour garantir la stabilité locale de l'objet autour d'une trajectoire d'attitude, dans un tube de tolérance donnée, selon une spécification multi-objectif.

4.4 Résultats et simulations

4.4.1 Spécifications de l'asservissement

Le contrôleur doit permettre au système en boucle fermée de répondre aux spécifications suivantes le long de la trajectoire théoriquement réalisable :

- Π_1 : le système en boucle fermée ne doit pas avoir d'erreur statique en régime permanent autour d'une attitude fixe.
- Π_2 : le système en boucle fermée ne doit pas avoir d'erreur de trainage lors de phase de rotation à vitesse constante.
- Π_3 : taux de décroissance supérieur à $\alpha_1 = -\frac{1}{\tau_{min}} rad/s$,
- Π_4 : taux de décroissance inférieur à $\alpha_2 = -\frac{1}{\tau_{max}} rad/s$,
- Π_5 : coefficient d'amortissement supérieur à $\sqrt{2}/2$ ($\tan(\theta) \geq 1$),
- Π_6 : performance Norme-à-Norme entre l'entrée de perturbation w et la sortie z_ω doit être minimisée :
$$Min \sup_{w \in \mathcal{L}_2, w \neq 0} \frac{||z_\omega||_2}{||w||_2}$$
- Π_7 : l'attitude de objet doit rester à l'intérieur d'un tube de tolérance d'attitude $\theta^\varepsilon \in [-\delta_\theta^*; \delta_\theta^*]$, $\delta_\theta^* \in]0; \pi[$ autour de la trajectoire théorique, équivalent à $q_o^\varepsilon \in [q_o^{\varepsilon *}; 1] = [\cos(\delta_\theta^*/2); 1]$ ou $||q_V|| < \delta q = \sin(\delta_\theta^*/2)$.
  Cela correspond à la performance Impulsion-à-Crête induite $||z_q|| = ||q_V|| < \delta q$ pour tout $x(0) = B_w \alpha, B_w = \delta\omega_{b_{max}} B, \alpha_q \in \mathbb{R}, |\alpha_q| = 1$:
$$\sup_{t \geq 0, \alpha_q \in \mathbb{R}, |\alpha_q|=1} ||z_q(t)|| < \delta q$$
  garantissant que l'objet reste dans le tube de tolérance autour de la trajectoire pour les conditions initiales opérationnelles les plus défavorables, considérées ici comme l'attitude de l'objet est exactement sur la trajectoire et l'objet subit un choc instantané lui donnant un écart de vitesse angulaire pire cas $\delta\omega_{b_{max}}$ dans n'importe quelle direction.
  Elle correspond à la *performance dimensionnante* de l'heuristique 3.15 qui permet de borner la matrice d'état $A(x)$ dans un polytope, et ainsi de faire la

synthèse du retour d'état avec la démarche du chapitre précédent.

4.4.2 Paramètres et outils

Pour les applications numériques, la commande d'entrée complète (4.10) est injectée dans le système non linéaire d'origine (4.2) avec les valeurs et hypothèses suivantes :

- $J_b^* = \text{diag}((0.025 \quad 0.03 \quad 0.02)^\top)$,
- $J_b = J_b^* + \Delta J_b$ avec $\Delta J_b = diag((0.1 \quad -0.1 \quad 0.1)^\top) J_b^*$ (hypothèse de 10% d'erreurs liées aux incertitudes de modélisation),
- la trajectoire cible $(q^*(t), \omega_b^*(t))$ est une rotation à vitesse constante autour de l'axe $\vec{n} = 1/\sqrt{3}\ (1\ 1\ -1)^\top$ avec $\theta^*(t) = 1t$,
- le tube de tolérance autour de la trajectoire a pour amplitude $\delta_\theta^* = 0.635rad (\simeq 36^o = 0.1tr)$, donnant les plages d'évolution pour le quaternion : $q_o^\varepsilon \in [0.95; 1]$ et $||q_V^\varepsilon|| < \delta q = 0.31$,
- $[\tau_{min}; \tau_{max}] = [0.1s; 0.2s]$, soit $\alpha_1 = -10rad/s$ et $\alpha_2 = -5rad/s$,
- L'objet subit une déviation impulsionnelle de la trajectoire à $t = 1s$ telle que $x(1) = (0\ 0\ 0 \quad \delta\omega_{b_{max}}(1 \quad -1\ 1))^\top$ avec $\delta\omega_{b_{max}} = 1rad/s (\simeq \frac{\delta_\theta^*}{3\tau_{max}})$.

Pour répondre aux exigences d'annulation d'erreurs Π_1 et Π_2, nous considérons la synthèse d'un retour d'état pour le système de déviation d'attitude augmenté de deux intégrateurs :

Définition 4.10: Système de déviation d'attitude réduit avec 2 intégrateurs

Le système de déviation d'attitude *réduit* défini par le lemme 4.5 page 68 augmenté de deux intégrateurs a pour représentation d'état en boucle ouverte :

$$\hat{\Sigma}_{r_2} : \dot{x}_{r_2} = \hat{A}_{r_2}(x_{r_2}) x_{r_2} + Bu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2\ q_o^\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_{r_2} + Bu \qquad (4.24)$$

avec l'état *réduit* augmenté de deux intégrateurs $x_{r_2} = (\eta_{2_r}\ \eta_{1_r}\ q_{V_r}^\varepsilon\ \omega_{b_r}^{\varepsilon^*})^\top = (\eta_{2_r}\ \eta_{1_r}\ \sin(\theta^\varepsilon/2) \quad \dot{\theta}^\varepsilon)^\top \in \mathbb{R}^4$, et q_o^ε toujours solution de la même équation différentielle (4.14) $\dot{q}_o^\varepsilon = -\frac{1}{2} q_{V_r} \omega_{b_r}^{\varepsilon^*}$, respectant la contrainte de norme unitaire du quaternion : ${q_o^\varepsilon}^2 + {q_{V_r}^\varepsilon}^2 = 1$.

On peut définir pour ce système réduit augmenté les deux sommets du polytope incluant l'évolution complète de la matrice d'état $\hat{A}_{r_2}(x_{r_2})$ dans le tube de tolérance

défini par Π_7 :

$$\hat{A}_{r_2}^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(qui correspond au système linéarisé au point d'équilibre), et

$$\hat{A}_{r_2}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2q_o^{\varepsilon *} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les scripts codés dans Matlab avec Yalmip du chapitre précédent et résolus avec le solveur SDPT-3, correspondant aux deux théorèmes de Lyapunov 3.17 et S-Variable 3.20, sont utilisés pour résoudre le problème de synthèse 1 de retour d'état sur le polytope à deux sommets $\hat{A}_{r_2}^{[1]}$ et $\hat{A}_{r_2}^{[2]}$.

4.4.3 Synthèse et simulations

Rappelons que q_o^{ε} évolue dans l'intervalle $[-1; 1]$, est égal à 1 ou -1 au point d'équilibre (*double couverture*) et est égal à 0 quand l'objet a fait exactement un demi-tour par rapport à l'attitude visée. Une recherche de la valeur minimale de $q_o^{\varepsilon *} \in [0; 1]$, décrivant la largeur maximale du tube d'attitude dans lequel l'objet doit rester pour que le problème de synthèse sur les deux sommets $\hat{A}_{r_2}^{[1]}$ et $\hat{A}_{r_2}^{[2]}$ ait une solution pour les deux théorèmes, est effectuée par bissection. On obtient avec le théorème de Lyapunov 3.17 :

$$q_o^{\varepsilon *} \geq 0.51$$

c'est-à-dire la plage $q_o^{\varepsilon *} \in [0.51; 1]$, correspondant à la plage de déviation d'attitude $\theta^{\varepsilon} \in [-2.07rad;\ 2.07rad]$ ou en degré $\theta^{\varepsilon} \in [-118^o;\ 118^o]$.

Pour le théorème S-Variable 3.20 avec les valeurs initiales des matrices A_{o_i} données par l'heuristique 3.23 page 50, on obtient la même plage pour

$$\kappa \geq 734$$

Le théorème S-Variable devient par ailleurs faisable pour le seul sommet $\hat{A}_{r_2}^{[1]}$ à partir de la valeur $\kappa \geq 1.4$. La réduction du pessimisme par l'augmentation de degrés de liberté qu'apportent les S-Variable aurait pu faire penser qu'une plage plus large de $q_o^{\varepsilon *}$ soit obtenue avec les S-Variable comparée à celle obtenue avec la première approche de Lyapunov. La dépendance aux A_{o_i} et dans ce cas précis la nature "peu variée" du polytope à deux sommets uniquement, font que le problème S-Variable

ne permet apparemment pas de trouver de solutions pour un polytope plus large que l'approche de Lyapunov.

La spécification de largeur du tube maximale d'attitude devra donc être définie pour que $q_o^{\varepsilon *} \geq 0.51$. L'amplitude $\delta_\theta^* = 0.635 rad (\simeq 36^o = 0.1 tr)$ donnée par l'exigence Π_7 , donnant les plages d'évolution pour le quaternion : $q_o^\varepsilon \in [0.95; 1]$ et $||q_V^\varepsilon|| < \delta q = 0.31$, est donc incluse dans la région de faisabilité des LMI et donnera des solutions.

Résultats :

Les synthèses multi-objectif de contrôleurs par retour d'état sont réalisées en utilisant les deux théorèmes 3.17 et 3.20, et comparées à un placement de pôles pour le système linéarisé :

— pour le système LTI linéarisé $\dot{x}_{r_2} = (A_{2_r}^{[1]} + BK_o)x_{r_2}$, le retour d'état de référence est calculé pour un placement des 4 pôles à un taux de décroissance fixé à $\alpha_o = -\sqrt{|\alpha_1|.|\alpha_2|} = -7.07 rad/s$ (constante de temps $\tau_o = 0.141 s$) et un taux d'amortissement égal à 1 :

$$K_o = [-5000 \ -2828 \ -600 \ -28.3]$$

Analyse de la performance Norme-à-Norme de la boucle fermée : $\gamma_{\infty_o} = 2.5 \ .10^{-3}$.

— pour le théorème de Lyapunov 3.17 on obtient :

$$K_X = [-9036 - 4011 - 701.6 - 27.6]$$

Analyse de la performance Norme-à-Norme de la boucle fermée : $\gamma_{\infty_X} = 2.4 \ .10^{-3}$.

— pour le théorème S-Variable 3.20, on obtient les valeurs de K_S et de performances Norme-à-Norme pour différentes valeurs de κ de l'heuristique 3.23 données dans le tableau suivant :

Kappa	KS				Gamma Infty
30	-7530	-3541	-655	27.4	0.0025
50	-8361	-3817	-685.9	-27.8	0.0024
75	-8813	-3965	-702	-27.9	0.0023
100	-9181	-4083	-715	-28.1	0.0023
500	-9972	-4310	-739	-28.2	0.0022
1000	-10014	-4322	-741	-28	0.0022
5000	-10153	-4363	-746	-28	0.0022
100000	-10146	-4368	-746	-28	0.0022

La valeur $\kappa = 1000$ est retenue pour tracer les réponses à une impulsion avec les différents correcteurs K_o, K_X et K_S sur la figure 4.7.

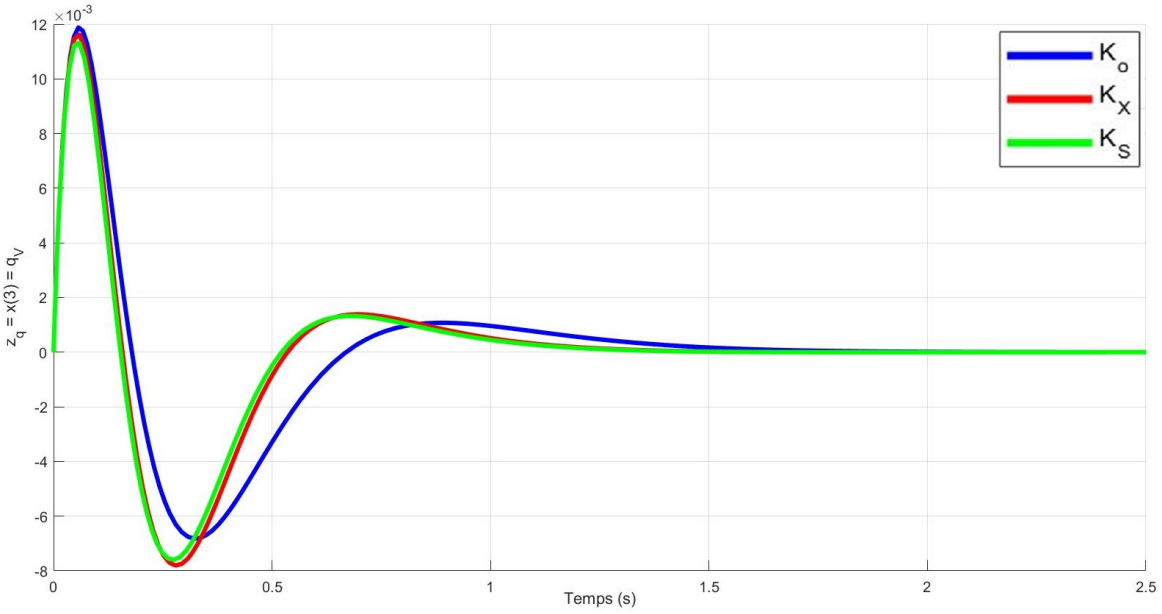

FIGURE 4.7 – Réponse libre de la sortie $x(3) = q_V$ du système de déviation non linéaire en boucle fermée Σ_{r_2} depuis $x(0) = (0\ 0\ 0\ 100\delta q)^T$ avec les différents contrôleurs.

Les méthodes LMI du chapitre précédent sont à nouveau validées sur cet exemple par la cohérence des résultats obtenus pour les deux théorèmes de Lyapunov et S-Variable. Ces résultats montrent cette fois-ci une légère amélioration de la performance Norme-à-Norme avec le contrôleur synthétisé par l'approche S-Variable : $\gamma_{\infty_S} = 2.2\ .10^{-3}$ contre $\gamma_{\infty_X} = 2.4\ .10^{-3}$, soit une amélioration 8.3%.

Simulations du système non linéaire original :

La courbe de simulation précédente représente le comportement du système de *déviation* en boucle fermée. Le problème original que nous cherchons à adresser est le contrôle d'attitude d'un objet quelconque, dont le modèle est donné par l'équation (4.2) page 60.

L'étape suivante est donc d'injecter dans le système original (4.2) la commande complète (4.10) page 65, pour rappel :

$$\begin{aligned} C_{act_b} = {} & J_b^* \dot{\omega}_b^* + S_V(\omega_b^*) J_b^* \omega_b^* \\ & + S_V(\omega_b^*)(2J_b^* - Tr(J_b^*) I_3)\omega_b^\varepsilon + S_V(\omega_b^\varepsilon) J_b^* \omega_b^\varepsilon \\ & + J_b^* Q_q(q^*)^{-1} u \end{aligned}$$

avec le contrôleur u dont on a fait la synthèse pour le modèle de déviation.

Pour rappel, d'après la construction du modèle de déviation donné par la proposition 4.3 page 64, le comportement du système réel original est équivalent à celui du modèle de déviation avec une entrée de perturbation (4.11) page 65 dont l'équation est :

$$\begin{aligned} w_\Delta = Q_q(q^*)J_b^{-1}\Big[& -\Delta J_b\dot{\omega}_b^* - S_V(\omega_b^*)\Delta J_b\omega_b^* \\ & - S_V(\omega_b^*)(2\Delta J_b - Tr(\Delta J_b)I_3)\omega_b^\varepsilon - S_V(\omega_b^\varepsilon)\Delta J_b\omega_b^\varepsilon \\ & - \Delta J_b Q_q(q^*)^{-1}u\Big] \end{aligned}$$

Dans le cas présent, nous avons supposé un niveau d'incertitude ΔJ_b de 10% sur tous les axes pour le système réel. Une erreur d'orientation de $0.1rad$ du repère de calcul de la matrice d'inertie est aussi ajoutée dans les simulations suivantes. Avec les opérateurs $S_V(.)$ représentant des produits vectoriels, ces incertitudes génèrent un couplage complet des perturbations entre les trois directions x, y et z, dans w_Δ. Les corrections de la commande u réinjectent également des perturbations dans le système.

De plus, dès que la trajectoire à suivre est variable, soit que ω_b^* est variable, l'expression de w_Δ montre que cette entrée devient d'autant plus variable et d'amplitude potentiellement importante.

Nous illustrons ci-dessous l'efficacité des contrôleurs par des simulations temps-réel pour trois cas différents :

— le premier cas de simulation considère une trajectoire à vitesse de rotation constante, dont le suivi de trajectoire est effectué par différents contrôleurs synthétisés par un placement de pôles comme pour K_o, dont on augmente le nombre d'intégrateurs,

— le second cas de simulation considère une trajectoire de vitesse de rotation plus complexe, avec des évolutions du vecteurs vitesse de rotation dans toutes les directions, dont le suivi de trajectoire est effectué par les mêmes contrôleurs que le cas précédent,

— le dernier cas de simulation considère la même trajectoire de rotation complexe que le cas précédent, mais avec les trois contrôleurs à 2 intégrateurs K_o, K_X et K_S dont on vient de faire la synthèse.

Les deux premiers cas de simulation sont réalisés pour illustrer la façon dont l'ajout d'intégrateurs permet d'augmenter le nombre de degrés de liberté du contrôleur pour réaliser un rejet de perturbations de plus en plus efficace. Le dernier cas de simulation permet lui de comparer les performances des correcteurs obtenus par les différentes techniques de synthèse proposées dans cette thèse pour une même structure de contrôleur.

Le premier cas de simulation sur la figure 4.8 suivante présente donc une trajectoire à vitesse de rotation constante, soit ω_b^* constant, subissant à l'instant

$t = 1s$ un impact venant réinitialiser la vitesse de rotation à une valeur différente de la valeur courante (l'attitude, elle, n'étant pas changée). Différents contrôleurs (nombres d'intégrateurs) sont comparés pour réaliser ce suivi de trajectoire.

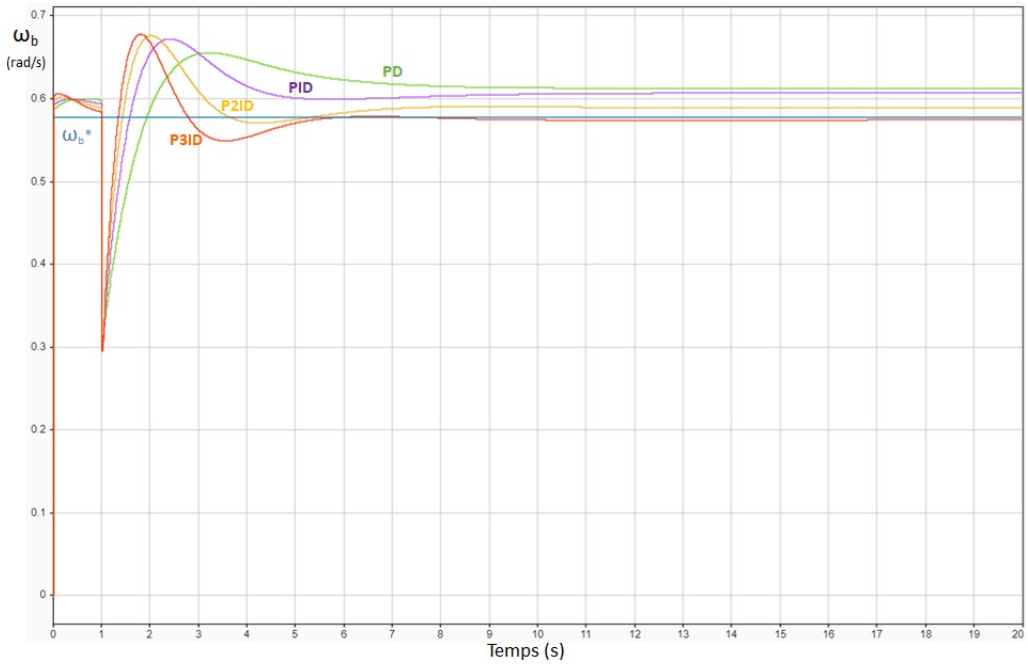

FIGURE 4.8 – Suivi d'une trajectoire à vitesse de rotation constante avec 4 types de contrôleurs différents, tous réglés à la même constante de temps et avec un coefficient d'amortissement de 1.

Logiquement le contrôleur Proportionnel Dérivée ne permet pas d'annuler l'erreur statique due au biais de la matrice d'inertie (courbe verte). Cependant, un seul intégrateur ne permet pas non plus de faire converger l'erreur statique vers zéro.

Nous observons que 2 intégrateurs, puis 3 intégrateurs, améliorent la précision de l'asservissement, sans toutefois garantir une annulation complète de l'erreur en régime permanent.

Les couplages des trois directions x, y et z dans la perturbation w_Δ générés par l'erreur de matrice d'inertie ΔJ_b de 10% sur chaque axe, et par le terme contenant la multiplication avec $S_V \omega_b^*$, sont sûrement à l'origine de l'incapacité des intégrateurs à réduire strictement la déviation à zéro, la compensation de l'un sur un axe venant perturbé l'autre sur un autre axe.

Le second cas de simulation propose le suivi d'une trajectoire beaucoup plus

complexe comme représentée sur la figure 4.9.

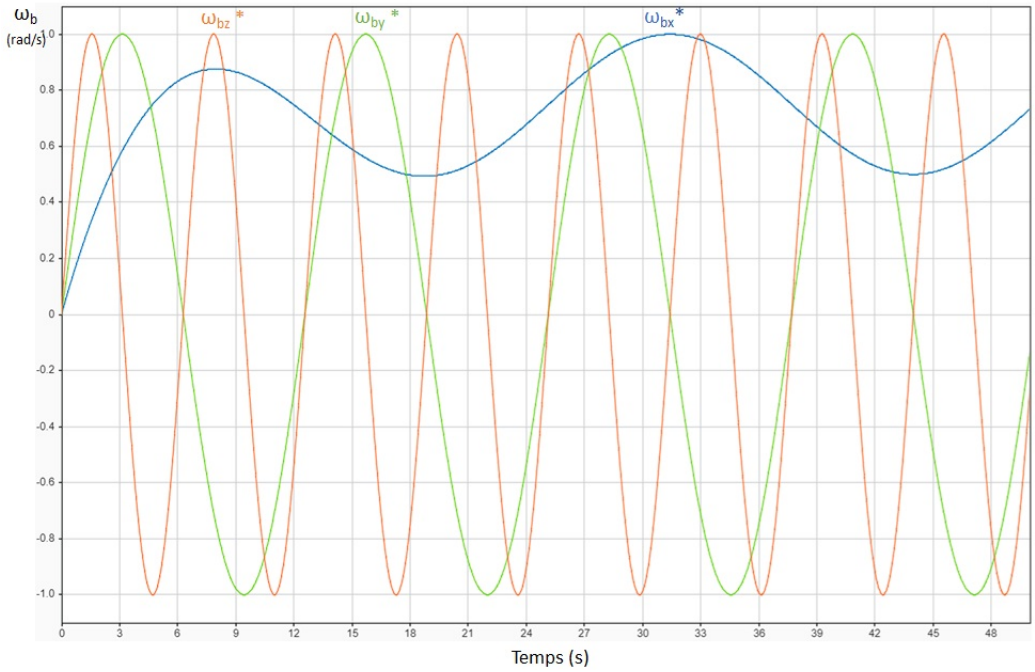

FIGURE 4.9 – Trajectoire théorique d'attitude couplant des mouvements de rotation différents sur les trois axes.

Le choix est d'avoir des comportements de vitesse de rotation théorique très différents sur chaque axe x, y et z pour que les composantes de la perturbation w_Δ soient le plus "aléatoires" possible.

La figure 4.10 représente le suivi de la trajectoire ω_{bx}^* avec différents types de contrôleurs : deux Proportionnel Dérivée réglés à deux constantes de temps différentes en orange et en vert (la deuxième constante de temps correspondant à peu près à celle de K_o, la première étant deux fois plus lente), et un PID en violet réglé à la même constante de temps que le Proportionnel Dérivée le plus rapide. Ce dernier contrôleur génère une trajectoire réelle pratiquement superposée à la trajectoire théorique tracée en bleue.

La dernière figure 4.11 représente l'erreur de suivi de la trajectoire ω_{bx}^* avec les mêmes contrôleurs que pour la figure précédente 4.10, plus un contrôleur à 2 intégrateurs (P(2I)D) en bleu.

Cette dernière courbe permet de visualiser que la réduction du temps de réponse du contrôleur Proportionnel Dérivée, tout en conservant un taux d'amortissement égal à 1, permet logiquement de suivre d'autant mieux la trajectoire. En effet, plus le contrôleur est rapide, plus il sera capable de réduire rapidement un écart qui apparaît du fait des variations de la trajectoire.

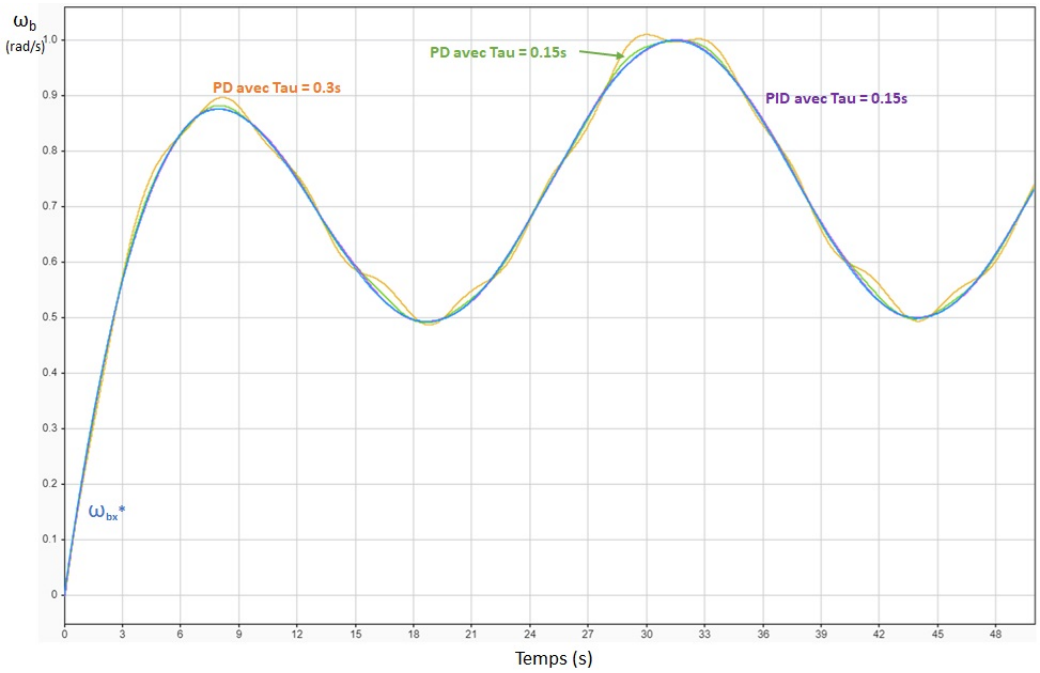

FIGURE 4.10 – Suivi de la composante ω_{bx}^* de la trajectoire d'attitude de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs.

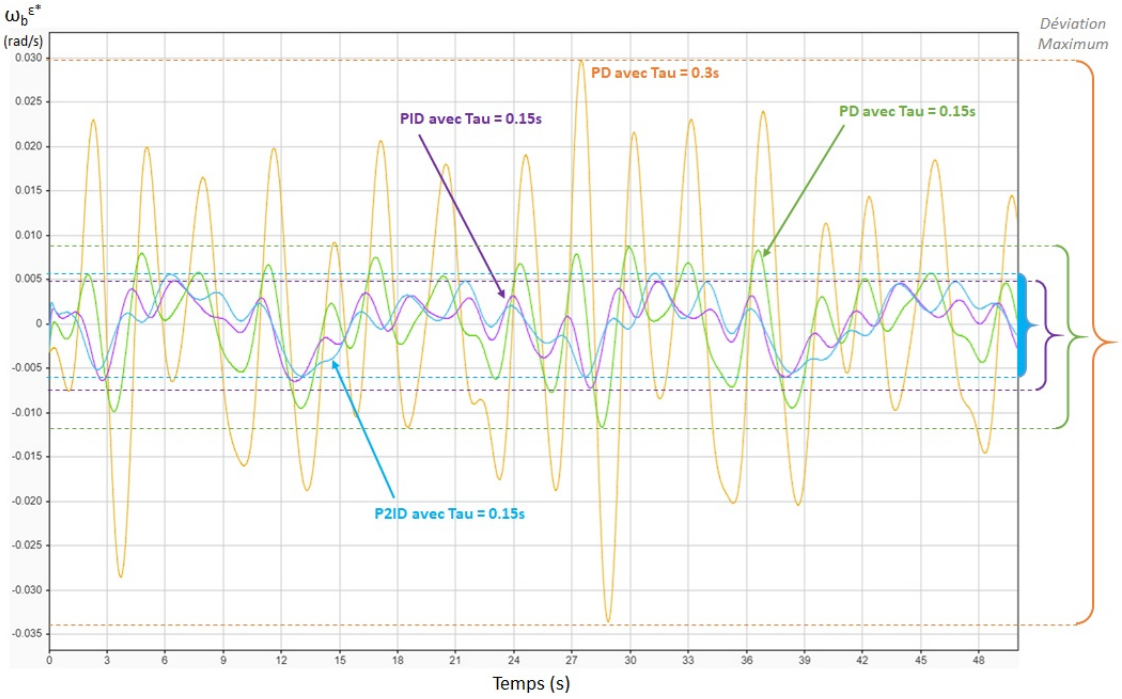

FIGURE 4.11 – Erreurs de suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs.

Cette figure illustre comment l'ajout d'intégrateurs permet de rejeter des perturbations variables. L'ajout d'un seul intégrateur, puis de 2 intégrateurs, permet en effet de réduire à chaque fois l'amplitude de la déviation maximale à la trajectoire.

La figure 4.12 représente les différentes composantes de la commande complète C_{act_b}, soit :

— la commande de référence identique à toutes les simulations notée $C_b^* = J_b^*\dot{\omega}_b^* + S_V(\omega_b^*)J_b^*\omega_b^*$,

— la commande liée à la correction du contrôleur u pour lequel on trace le terme $u^* = J_b^* Q_q(q^*)^{-1}u$ pour être homogène à C_b^*.

La partie non linéaire réinjectée dans C_{act_b} correspondant au terme $S_V(\omega_b^*)(2J_b^* - Tr(J_b^*)I_3)\omega_b^\varepsilon + S_V(\omega_b^\varepsilon)J_b^*\omega_b^\varepsilon$, elle, n'est pas tracée sur la courbe du fait qu'elle est d'un ordre 10 fois plus petit que C_b^*.

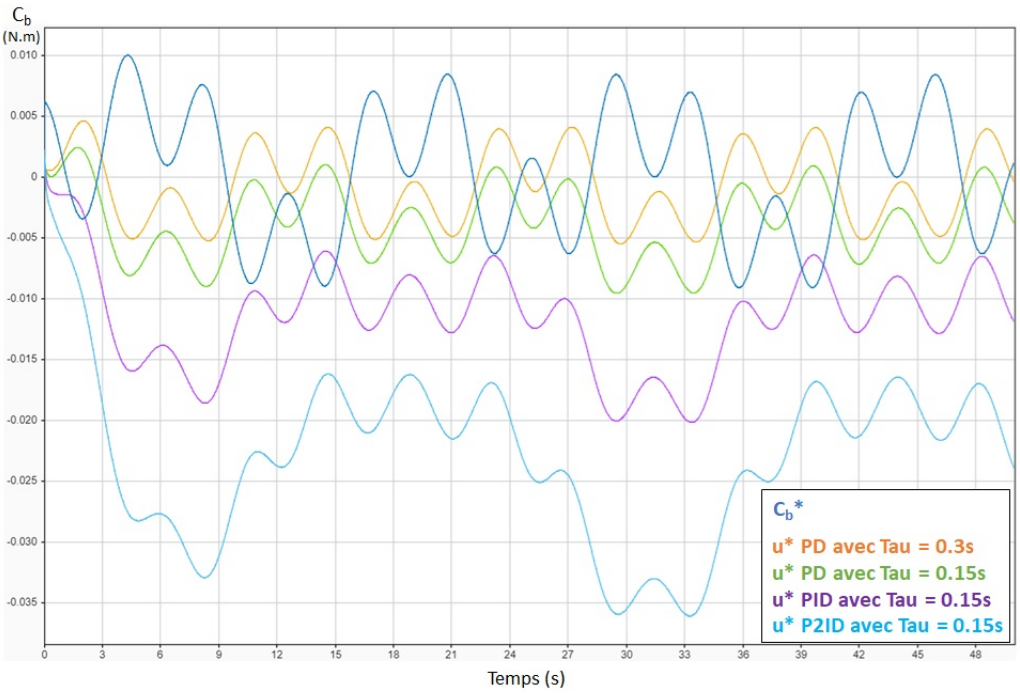

FIGURE 4.12 – Commande de référence et correction de commande pour le suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec différents types de contrôleurs.

Ces deux premiers cas de simulation illustrent bien comment l'ajout d'intégrateurs permet de rejeter davantage des perturbations variables.

Le dernier cas de simulation présente enfin la comparaison entre les réglages K_o, K_X et K_S, obtenus par les trois méthodes de synthèse décrites au début de ce paragraphe, pour le suivi de cette dernière trajectoire complexe avec une structure

de contrôleur à deux intégrateurs.

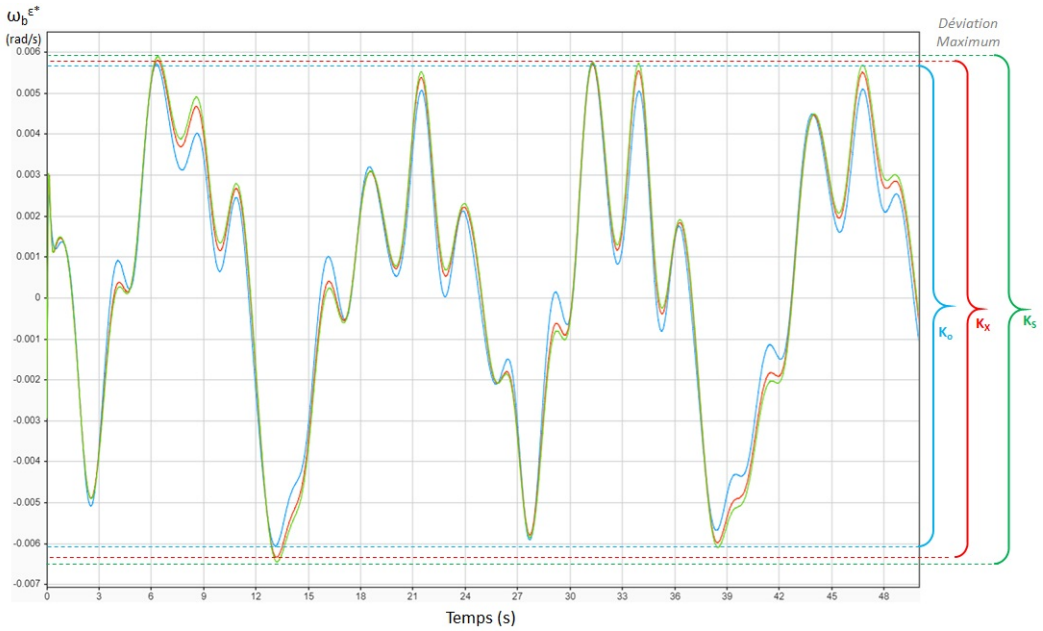

FIGURE 4.13 – Erreurs de suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec les trois contrôleurs K_o, K_X et K_S.

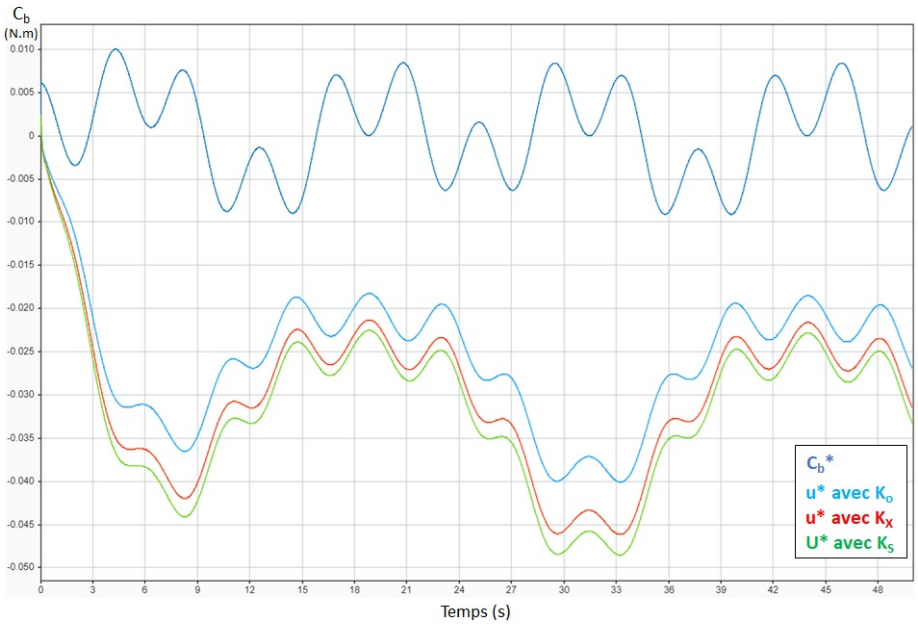

FIGURE 4.14 – Commande de référence et correction de commande pour le suivi de trajectoire d'attitude de la composante ω_{bx}^* de la figure 4.9 avec les trois contrôleurs K_o, K_X et K_S.

Ces dernières courbes figures 4.13 et 4.14 ne permettent pas d'illustrer clairement le gain de performance Norme-à-Norme obtenue par l'analyse LMI du critère sur le polytope encadrant le modèle de déviation (γ_∞ pour K_o à 2.5 10^{-3} ; pour K_X à 2.4 10^{-3} ; pour K_S à 2.2 10^{-3}). Les déviations à la trajectoire sont en effet très proches les unes des autres et sont décalées les unes par rapport aux autres dans l'ordre inverse du gain de performance associé à chaque correcteur. Le couplage des composantes x, y et z dans la perturbation w_Δ et les rebouclages avec la commande u et l'erreur ω^ε en sont peut-être l'origine.

4.5 Perspectives pour le contrôle d'attitude

4.5.1 Résumé

Dans ce chapitre, nous avons développé des contrôleurs par retour d'état invariant dans le temps localement stable, respectant des spécifications multi-performances, potentiellement augmentés d'intégrateurs pour annuler différents niveaux d'erreurs, pour le contrôle de la déviation de l'attitude d'un objet quelconque autour d'une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable.

Les simulations permettent de montrer une légère amélioration des performances des contrôleurs obtenus par l'approche S-Variable, sans pour autant les démarquer véritablement. Les résultats sont toutefois cohérents entre eux et permettent de valider l'application de la démarche du chapitre précédent aux systèmes non linéaires.

Ces contrôleurs permettent de réaliser le suivi d'une trajectoire à l'intérieur d'un tube de tolérance définie autour de la trajectoire théorique. Si l'objet est amené à sortir du tube de tolérance, voire à faire un tour sur lui-même, ces types de contrôleurs invariant n'ont pas la garantie d'être stables, et des *phénomènes de déroulement* peuvent apparaître.

Pour remédier à ce problème dans le cas d'un objet qui serait amené à effectuer des tours sur lui-même, une structure de contrôleur continu non linéaire par retour d'état, au plus proche de la structure d'un retour d'état invariant, ayant la propriété d'être *presque* globalement asymptotiquement stable a donc été recherchée. Très proche de la structure du contrôleur hybride proposé par [38], la structure obtenue est équivalente au voisinage du point d'équilibre au retour d'état invariant. Elle réalise par ailleurs de manière continue l'inversion du sens de la commande lorsque l'objet fait un demi-tour sur lui-même, permettant d'obtenir la propriété de stabilité *presque* globale.

Pour ouvrir des perspectives, nous pouvons donc envisager différentes stratégies pour obtenir des contôleurs plus évolués ayant la propriété d'être *presque* globalement stable, pour le contrôle de la déviation de l'attitude d'un objet autour d'une trajectoire théorique.

Une première pourrait être d'utiliser directement les deux résultats de ce chapitre en couplant de manière hybride ([10]) le retour d'état non linéaire *presque* globalement stable sans intégrateur lorsque l'objet est loin de la trajectoire d'attitude, avec le retour d'état avec N intégrateurs lorsque l'objet est à l'intérieur du tube de tolérance permettant d'annuler les erreurs de suivi de trajectoire. Une difficulté est alors de gérer proprement la zone de transition, avec sûrement l'introduction d'un hysteresis.

Une seconde stratégie, qui demande à nouveau une recherche théorique de fonc-

tion de Lyapunov relativement importante, comme le montrent les conjectures qui suivent ci-dessous, serait d'extrapoler le résultat de retour d'état non linéaire *presque* globalement stable avec l'utilisation du paramètre variable q_o^ε, à des configurations de contrôleurs avec N intégrateurs qui permettrait d'obtenir un système en boucle fermée *presque* globalement stable :

Heuristique 4.11: Recherche de contrôleurs continus à N intégrateurs *presque* globalement stables

En appliquant le même principe que pour le retour d'état non linéaire simple (sans intégrateurs) *presque* globalement stable défini par l'équation (4.17) :

$$u(x) = -k_p q_o^\varepsilon q_V^\varepsilon - k_d \omega_b^{\varepsilon^*}$$

on se propose d'étudier les possibilités d'inverser/inhiber continûment un à un chaque intégrateur, par des multiplications de chaque intégrateur par une puissance de la variable q_o^ε, pour essayer d'obtenir la propriété de stabilité presque *globale de la boucle fermée.*

Deux exemples de structures de système en boucle fermée à N intégrateurs avec une proposition de pilotage des intégrateurs par des puissances de q_o^ε sont données ci-dessous sous forme de conjectures.

4.5.2 PID continu *presque* globalement stable ?

Une première proposition spécifique pour l'ajout d'un seul intégrateur, équivalent à un contrôleur PID, est faite tout d'abord :

Conjecture 4.1: PID *presque* globalement stable

Pour tous scalaires $k_{i_1}, k_p, k_d > 0$ tels que $k_{i_1} < k_p k_d$, le correcteur Proportionnel Intégral Dérivée de la forme :

$$u_1(x_1) = -k_{i_1}\eta^{\varepsilon}_{V_1} - 2k_p q^{\varepsilon}_o q^{\varepsilon}_V - k_d w^{\varepsilon^*}_b = K_1(x_1)x_1 \tag{4.25}$$

avec $\eta^{\varepsilon}_{V_1}$ l'intégrale de l'erreur d'attitude solution de : $\dot{\eta}^{\varepsilon}_{V_1} = 2q^{\varepsilon}_o q^{\varepsilon}_V$, l'état défini par : $x_1 = (\eta^{\varepsilon^\top}_{V_1} \; q^{\varepsilon^\top}_V \; w^{\varepsilon^{*\top}}_b)^\top \in \mathbb{R}^9$, donnant le système non linéaire en boucle fermée sans perturbations ($w = 0$) :

$$\Sigma_1 : \dot{x}_1 = A_1(x_1)x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2q^{\varepsilon}_o I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\; S(q^{\varepsilon}) \\ -k_{i_1} I_3 & -2k_p q^{\varepsilon}_o I_3 & -k_d I_3 \end{pmatrix} x_1 \tag{4.26}$$

rend ce système en boucle fermée *presque* globalement asymptotiquement stable pour l'ensemble compact invariant défini par $\mathcal{W}_1 = \{0, \bar{X}_1\}$, avec $\bar{X}_1 = \{\bar{x}_1 = (0\ 0\ 0\ \bar{q}^{\varepsilon^\top}_V 0\ 0\ 0)^\top | \|\bar{q}^{\varepsilon}_V\| = 1\}$.

Commentaire : La boucle fermée du système réduit (4.13), correspondant au contrôle d'un objet en rotation autour d'un seul axe fixe, avec cette structure de contrôleur PID peut aussi s'écrire :

$$\ddot{\theta}^{\varepsilon} = -k_{i_1}\int_0^t \sin(\theta^{\varepsilon})dt - k_p \sin(\theta^{\varepsilon}) - k_d\dot{\theta}^{\varepsilon} \tag{4.27}$$

Cette formulation fait apparaître le choix d'avoir multiplié par 2 l'intégrale et le terme de correction proportionnelle k_p pour revenir à une expression homogène en θ^{ε} et $\sin(\theta^{\varepsilon})$.

Ebauche de preuve : La matrice d'état en boucle fermée $A_1(x_1)$ peut être décomposée :

$$A_1(x_1) = \left(R_{q_{o1}}(q^{\varepsilon}_o) R^{-1}_{2_1} A^o_1 R_{2_1} R_{q_{o1}}(q^{\varepsilon}_o)\right) \otimes I_3 + A_{V_1}(x_1)$$

$$\text{avec } A^o_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_{i_1} & -k_p & -k_d \end{pmatrix},\ R_{2_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ R_{q_{o1}}(q^{\varepsilon}_o) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^{\varepsilon}_o & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{V_1}(x_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 S_V(q^{\varepsilon}_V) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le montre le lemme 4.5, le terme $A_{V_1}(x_1)$ ne réduit pas la distance au point d'équilibre et disparait dans la dérivée des fonctions de Lyapunov.

Concernant la matrice A_1^o, le critère de stabilité Routh-Hurwitz permet de dire que cette matrice est Hurwitz si et seulement si $k_{i_1}, k_p, k_d > 0$ et $k_{i_1} < k_p k_d$ (cf. [23]).

Grâce à cette décomposition, une première étape de démonstration de la stabilité *locale* de ce contrôleur peut se faire comme la preuve du retour d'état invariant de la proposition 4.8, par continuité d'un certificat de Lyapunov quadratique constant au voisinage du point $x_1 = 0$ ($q_o^\varepsilon = 1$).

Concernant la stabilité *presque* globale, la multiplication par q_o^ε de l'intégrateur permet d'effectuer la même inversion continue du signe de l'erreur à intégrer lors du demi-tour, et permet d'effectuer le figeage de l'intégrateur ($q_o^\varepsilon = 0$) au point opposé au point d'équilibre. Nous reproduisons ainsi les mêmes inversions continues de signe qui avait été faites pour le retour d'état simple sur le terme proportionnel q_V^ε pour annuler le problème de la *double couverture*.

En utilisant la fonction de Lyapunov (4.19) construite pour démontrer la stabilité *presque* globale du retour d'état simple :

$$P(x) = \begin{pmatrix} (2k_p + 4\alpha k_d^2) & 2\alpha k_d q_o^\varepsilon \\ 2\alpha k_d q_o^\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \otimes I_3 \succ 0$$

une tentative d'extrapolation de cette fonction à l'ordre trois en utilisant l'annexe A page 103 a été faite pour démontrer ce même résultat pour le PID, la dernière candidate obtenue ayant la forme :

$$P_1(x_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 k_{i_1} k_d + \alpha_2 k_p^2 q_o^{\varepsilon 2} & 2(k_{i_1} + \alpha_2 k_p k_d) q_o^\varepsilon & \alpha_2 k_p q_o^{\varepsilon 2} \\ 2(k_{i_1} + \alpha_2 k_p k_d) q_o^\varepsilon & 4((1-\alpha_2) k_p q_o^{\varepsilon 2} + \alpha_1 k_d^2) & 2\alpha_1 k_d q_o^\varepsilon \\ \alpha_2 k_p q_o^{\varepsilon 2} & 2\alpha_1 k_d q_o^\varepsilon & q_o^{\varepsilon 2} \end{pmatrix} \otimes I_3$$

définie pour $\alpha_1 \in]\alpha; 1[$ tel que $\alpha = k_{i_1}/(k_p k_d) \in]0; 1[$ (hypothèse de la conjecture 4.1), et pour $\alpha_2 \in]0; \bar{\alpha}_2[$ tel que $\bar{\alpha}_2 \in]0; \alpha_1 - \alpha[$ (à calculer selon l'annexe A page 103).

Malheureusement, avec cette définition de fonction de Lyapunov $V_1(x_1) = x_1^\top P_1(x_1) x_1$ la dérivée n'est pas strictement négative partout en dehors de $\mathcal{W}_1 = \{x_1 = 0, x_1 = (0\ 0\ 0\ \bar{q}_V^{\varepsilon\top}\ 0\ 0\ 0)^\top | \|\bar{q}_V^\varepsilon\| = 1\}$:

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1^\top [A_1(x_1)^\top P_1(x_1) + P_1(x_1) A_1(x_1) + \dot{P}_1(x_1)] x_1$$

donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x_1) = &- q_o^{\varepsilon 2} x_1^\top R_{2_1} Q_o R_{2_1} x_1 \\ &- q_o^\varepsilon (q_V^{\varepsilon\top} w_b^\varepsilon) x_1^\top \begin{pmatrix} \alpha_2 k_p^2 & 0 & \alpha_2 k_p \\ 0 & 4(1-\alpha_2)k_p & 0 \\ \alpha_2 k_p & 0 & 1 \end{pmatrix} x_1 \\ &- (q_V^{\varepsilon\top} w_b^\varepsilon) x_1^\top \begin{pmatrix} 0 & k_{i_1} + \alpha_2 k_p k_d & 0 \\ k_{i_1} + \alpha_2 k_p k_d & 0 & \alpha_1 k_d \\ 0 & \alpha_1 k_d & 0 \end{pmatrix} x_1\end{aligned}$$

avec $Q_o = \begin{pmatrix} 2\alpha_2 k_p k_{i_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\alpha_1 - (\alpha + \alpha_2))k_d k_p & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\alpha_1)k_d \end{pmatrix} \succ 0$

Le premier terme est strictement négatif pour toute valeur de $x_1 \notin \mathcal{W}_1 = \{x_1 = 0, x_1 = (0\ 0\ 0\ \bar{q}_V^{\varepsilon\top} 0\ 0\ 0)^\top : ||\bar{q}_V^\varepsilon|| = 1\}$. Les deux derniers termes de cette équation ne sont pas strictement négatifs mais sont d'ordre deux inférieurs au premier terme au voisinage de $x_1 = 0$. Par conséquent, il existe un voisinage de $x_1 = 0$ pour lequel $\dot{V}_1 < 0$, ce qui démontre la stabilité locale pour un certain voisinage du point d'équilibre.

Cependant, cette fonction de Lyapunov n'est pas suffisante pour démontrer la stabilité *presque* globale de ce contrôleur. ■

Cette proposition de structure PID non linéaire reste donc une conjecture et une piste pour construire et manipuler les contrôleurs avec un intégrateur pour le contrôle d'attitude.

4.5.3 P(N.I)D continu *presque* globalement stable ?

Dans la continuité du PID, pour le cas générique d'ajout de N intégrateurs, l'inversion de signe pour les intégrateurs au delà du premier n'est plus nécessaire, vu que l'on intègre en série depuis le premier intégrateur de l'erreur η_{V_1} qui est déjà "dans le bon sens" : $\dot{\eta}_{V_1}^\varepsilon = 2 q_o^\varepsilon q_V^\varepsilon$ étant multiplié par q_o^ε qui est du signe nécessaire à l'inversion de sens.

Nous pouvons donc envisager des multiplications par des puissances paires de q_o^ε pour effectuer uniquement un figeage des intégrateurs d'ordres supérieurs lors du demi-tour, sans inversion de signe :

Conjecture 4.2: P(N.I)D *presque* globalement stable

La boucle fermée à N intégrateurs suivante sans perturbations ($w = 0$) :

$$\Sigma_N : \ \dot{x}_N = A_N(x_N)x_N$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & q_o^{\varepsilon 2(N-1)} I_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_o^{\varepsilon 2} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2q_o^{\varepsilon} I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1/2S(q^{\varepsilon}) I_3 \\ -k_{i_N} q_o^{\varepsilon 2N} I_3 & -k_{i_{N-1}} q_o^{\varepsilon 2(N-1)} I_3 & \dots & -k_{i_1} q_o^{\varepsilon 2} I_3 & -2k_p q_o^{\varepsilon} I_3 & -k_d I_3 \end{pmatrix} x_N \tag{4.28}$$

rend le point d'équilibre $x_N = 0$ *presque* globalement stable pour le système en boucle fermée Σ_N, dans le cas où la matrice A_N^o, définie dans l'ébauche de preuve ci-dessous, est Hurwitz.

Ebauche de preuve : La matrice d'état en boucle fermée $A_N(x_N)$ peut être décomposée :

$$A_N(x_N) = \left(R_{q_{oN_L}}(q_o^{\varepsilon}) R_{2_N}^{-1} A_N^o R_{2_N} R_{q_{oN_R}}(q_o^{\varepsilon}) \right) \otimes I_3 + A_{V_N}(x_N)$$

$$\text{avec } A_N^o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -k_{i_N} & -k_{i_{N-1}} & \dots & -k_{i_1} & -k_p & -k_d \end{pmatrix} \text{ supposée Hurwitz,}$$

$$R_{2_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A_{V_N}(x_N) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1/2S_V(q_V^{\varepsilon}) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{q_{oN_L}}(q_o^\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & q_o^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{q_{oN_R}}(q_o^\varepsilon) = \begin{pmatrix} q_o^{\varepsilon 2N} & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_o^{\varepsilon 2(N-1)} & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & q_o^{\varepsilon 2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & q_o^\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grâce à cette décomposition, la démonstration de la stabilité *locale* de ce système en boucle fermée peut être réalisée en utilisant la même approche que celle de la preuve du retour d'état invariant de la proposition 4.8, par continuité d'un certificat de Lyapunov quadratique constant au voisinage du point $x_N = 0$ ($q_o^\varepsilon = 1$).

Malheureusement, malgré cette structure qui émerge de cette décomposition et qui permet de manipuler les dérivées de fonctions de Lyapunov candidates, il n'a pas été possible de trouver une fonction de Lyapunov démontrant la stabilité *presque* globale de Σ_N. ■

Si ces deux conjectures ne permettent pas de conclure sur la propriété de stabilité *presque* globale, elles permettent néanmoins d'ouvrir un champ de recherche sur ces structures de contrôleur à N intégrateurs continûment inversés ou inhibés pour le mouvement de rotation, dans l'objectif d'obtenir une propriété de stabilité globale ou *presque*.

Des simulations des systèmes réduits dans le plan de phase $(q_{V_r}^\varepsilon \ \omega_{br}^{\varepsilon^*})^\top$ de ces systèmes en boucle fermée, proposés par ces deux conjectures, ont été réalisées avec des matrices Hurwitz arbitraires. Les résultats graphiques n'ont pas été ajoutés ici, donnant des courbes similaires à la figure 4.6 page 74 du système réduit en boucle fermée (4.18) *presque* globalement stable sans intégrateurs.

Ces simulations n'ont notamment pas permis de mettre en évidence des comportements instables ou des oscillations autour des points d'équilibre instable, confortant le fait que ces conjectures proposent de bons candidats de contrôleurs *presque* globalement stables à N intégrateurs pour le contrôle d'attitude.

Inversement, nous pouvons aussi dire que ces perspectives de recherche proposent d'étudier comment "circulariser" le système LTI *globalement stable* sur $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}_{N_r} = A_N^o x_{N_r} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ -k_{i_N} & -k_{i_{N-1}} & ... & -k_{i_1} & -k_p & -k_d \end{pmatrix} x_{N_r}$$

avec A_N^o Hurwitz, en utilisant les opérations précédentes de multiplication par q_o^ε, pour qu'il devienne la représentation d'une dynamique de contrôle de l'attitude en boucle fermée à N intégrateurs *presque* globalement stable.

5 Conclusions et Perspectives

5.1 Une approche LMI pour les systèmes non linéaires

L'approche LMI présentée dans cette thèse permet de faire la synthèse de contrôleurs par retour d'état invariant dans le temps pour des systèmes variant dans le temps ou non linéaires dont l'évolution est inscrite à l'intérieur d'un polytope, avec un comportement éventuellement discontinu, tout en respectant une spécification multi-performance. L'existence d'un tel contrôleur dépend de l'ensemble polytopique encadrant le système original non linéaire ou variant dans le temps : évidemment, si l'ensemble polytopique est trop large, il peut ne pas exister de solution de retour d'état invariant dans le temps quelle que soit la spécification. Par ailleurs, les contraintes de performance doivent aussi être cohérentes entre elles pour ne pas surcontraindre le problème de synthèse, rendant inexistant une solution au problème.

Enfin, si le problème de synthèse multi-performance est faisable, les LMI peuvent ne pas fournir de solution en raison du pessimisme. Le résultat de l'approche S-variable, étant potentiellement moins pessimiste, peut donner des solutions lorsque les formules plus pessimistes du paradigme de mise en forme de Lyapunov échouent.

L'inconvénient du résultat de l'approche S-variable réside dans la nécessité de choisir a priori la valeur de certaines inconnues présentes dans les contraintes matricielles pour qu'elles deviennent des LMI. Pour faire face à ce problème, des lignes directrices sont proposées pour faire le choix de ces paramètres. Elles permettent d'obtenir des résultats qui sont cohérents mais ne convergent pas systématiquement ; d'autres stratégies pour déterminer la valeur de ces inconnues pourront être recherchées dans des études futures.

Les résultats de simulation valident la cohérence des méthodes LMI et leur capacité à faire de la synthèse multi-objectif. Toutefois, ces simulations n'ont pas permis de départager clairement les méthodes entre elles. Ceci est peut-être dû à la simplicité des exemples d'ordre peu élevé et à deux sommets uniquement ; d'autres simulations sur des systèmes d'ordre plus élevé et à plus de sommets pourront aussi être réalisées dans le futur pour étudier plus précisément l'apport de chaque méthode.

Enfin, des solutions encore moins pessimistes peuvent être dérivées par un traitement plus avancé des formulations *différentielles* (DLMI) originales du problème multi-performances.

5.2 Le contrôle d'attitude

L'application de ces résultats de synthèse LMI au problème du contrôle du mouvement de rotation d'un objet quelconque le long d'une trajectoire d'attitude illustre un cas d'exploitation de ces résultats pour les systèmes non linéaires.

Une fois le modèle de déviation d'attitude décrite par quaternion unitaire d'un objet quelconque par rapport à une trajectoire d'attitude théoriquement réalisable obtenu, cette représentation d'état fait émerger l'opportunité de construire une structure de contrôleur non linéaire continue *presque* globalement asymptotiquement stable, au plus proche de la structure d'un retour d'état invariant.

Ce résultat, similaire au contrôleur hybride proposé par [38], réalise de manière continue l'inversion du sens de la commande pour obtenir la propriété de stabilité *presque* globale. Ce premier contrôleur non linéaire est équivalent au voisinage du point d'attraction à un contrôleur Proportionnel Dérivé, par conséquent pouvant laisser apparaitre des erreurs statiques ou de trainage en régime permanent.

Après augmentation de ce contrôleur avec des intégrateurs pour annuler ces erreurs, la procédure de synthèse LMI multi-performances est appliquée sur le polytope du système non linéaire correspondant au tube de tolérance dans lequel on souhaite voir évoluer l'objet. Pour cette synthèse, on considère que l'objet restera à l'intérieur du tube tout le temps, par conséquent ne fera jamais de demi-tour sur lui-même. Ainsi, la procédure de synthèse considère un retour d'état statique invariant, c'est-à-dire sans la non linéarité de la commande introduite précédemment permettant d'obtenir la propriété de stabilité *presque* globale. Le retour d'état invariant obtenu permet donc de contrôler l'objet localement à l'intérieur du tube spécifié.

La structure de contrôleur non linéaire continue *presque* globalement asymptotiquement stable fait ressortir les propriétés très intéressantes de la *partie scalaire* du quaternion. Semblable à une fonction duale de Lyapunov ([49]), si ce n'est qu'elle est égale à 1 en valeur absolue au point d'attraction et non à l'infini, elle permet d'inverser et d'inhiber continûment les termes du contrôleur pour annuler le problème de *double couverture* du quaternion, comme proposé dans les deux dernières conjectures du chapitre 4.

Ces dernières propositions ouvrent des perspectives pour la recherche plus avancée de contrôleurs pour le mouvement de rotation. Une méthode LMI avec des S-variables telles que définies dans [19] pour les synthèses de retour de sortie, pourrait

notamment être étudiée afin de résoudre la conception structurée de retour de sortie pour ces formats de contrôleurs non linéaires.

A

Annexe : décomposition en "éléments simples" des matrices de Lyapunov des systèmes LTI

Cette partie définit une structure élémentaire des matrices de Lyapunov pour les systèmes stables LTI d'ordre 2 et 3, pour la forme canonique compagne de commande et d'observation (cf. [23] pour plus de détails sur les systèmes LTI).

A.1 Matrices de Lyapunov élémentaires de commande

A.1.1 Pour les systèmes LTI du 2^{nd} ordre

Proposition A.1: Matrice de Lyapunov pour les systèmes LTI d'ordre 2 en forme compagne de commande

Soit A_{c2} une matrice Hurwitz d'un système stable LTI du second ordre dans sa représentation compagne de commande définie par :

$$A_{c2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

avec les deux scalaires $k_1, k_2 > 0$ (critère de stabilité Routh-Hurwitz nécessaire et suffisant, cf. [23]).
Pour toute constante $\alpha_1 \in]0;1[$, définissons :

$$\bar{\varepsilon}_1 = min(\sqrt{\alpha_1(1-\alpha_1)}, 1/2(1/k_1^2 + \alpha_1(1-\alpha_1)/k_2))$$

Pour toute constante $\varepsilon_1 \in]-\bar{\varepsilon}_1; \sqrt{\alpha_1(1-\alpha_1)}[$, la classe suivante de matrice définie positive :

$$P_{c2} = \begin{pmatrix} k_2 + \alpha_1 k_1^2 + 2\varepsilon_1 k_1^2 k_2 & \alpha_1 k_1 \\ \alpha_1 k_1 & 1 \end{pmatrix} \succ 0 \tag{A.2}$$

est une classe de matrice de Lyapunov qui démontre que A_{c2} est Hurwitz (valeurs propres à partie réelle strictement négative).
Son équation de Lyapunov correspondante est :

$$\begin{aligned} A_{c2}^\top P_{c2} + P_{c2} A_{c2} &= -Q_{c2} \\ &= \begin{pmatrix} -2\alpha_1 k_1 k_2 & 2\varepsilon_1 k_1^2 k_2 \\ 2\varepsilon_1 k_1^2 k_2 & -2(1-\alpha_1)k_1 \end{pmatrix} \prec 0 \end{aligned} \tag{A.3}$$

qui est une matrice définie négative pour tout $\alpha_1 \in]0;1[$ et pour tout $\varepsilon_1 \in]-\bar{\varepsilon}_1; \sqrt{\alpha_1(1-\alpha_1)}[$.

Preuve : par construction (calcul).

A.1.2 Pour les systèmes LTI du 3^e ordre

Proposition A.2: Matrice de Lyapunov pour les systèmes LTI d'ordre 3 en forme compagne de commande

Soit A_{c3} une matrice Hurwitz d'un système stable LTI d'ordre 3 dans sa représentation compagne de commande définie par :

$$A_{c3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_3 & -k_2 & -k_1 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Avec les trois scalaires $k_1, k_2, k_3 > 0$ et $k_3 < k_1 k_2$ (critères de stabilité Routh-Hurwitz nécessaires et suffisants, cf. [23]), définissons $\alpha \in]0;1[$ tel que $k_3 = \alpha k_1 k_2$.
Pour toute constante $\alpha_1 \in]\alpha;1[$, il existe $\bar{\alpha}_2 \in]0;\alpha_1 - \alpha[$ tel que pour tout $\alpha_2 \in]0;\bar{\alpha}_2[$, la classe suivante de matrice définie positive :

$$P_{c3} = \begin{pmatrix} \alpha_1 k_1 k_3 + \alpha_2 k_2^2 & k_3 + \alpha_2 k_1 k_2 & \alpha_2 k_2 \\ k_3 + \alpha_2 k_1 k_2 & (1-\alpha_2)k_2 + \alpha_1 k_1^2 & \alpha_1 k_1 \\ \alpha_2 k_2 & \alpha_1 k_1 & 1 \end{pmatrix} \succ 0 \tag{A.5}$$

est une matrice de Lyapunov qui démontre la stabilité Hurwitz de A_{c3}.
Son équation de Lyapunov correspondante est :

$$\begin{aligned} & A_{c3}^\top P_{c3} + P_{c3} A_{c3} = -Q_{c3} \\ & = \begin{pmatrix} -2\alpha_2 k_2 k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -2(\alpha_1 - (\alpha + \alpha_2))k_1 k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-\alpha_1)k_1 \end{pmatrix} \prec 0 \end{aligned} \tag{A.6}$$

qui est une matrice définie négative pour les valeurs spécifiées de α_1 et α_2.

Preuve : par construction (calcul).

Cas particulier : Si $\frac{1-\alpha^2}{\alpha} < \frac{k_1^2}{k_2}$, alors $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1 - \alpha$ convient.

A.2 Problème dual ou matrices de Lyapunov élémentaires d'observation

Considérer le problème du système dual peut également apporter des informations sur la définition d'une décomposition en *éléments simples* des matrices de

Lyapunov.

En effet, rechercher une matrice $P_c \succ 0$ telle que $A_c^\top P_c + P_c A_c \prec 0$, pour démontrer que A_c est Hurwitz, équivaut à rechercher une matrice $X_c \succ 0$ ($X_c = P_c^{-1}$) telle que $X_c A_c^\top + A_c X_c \prec 0$. Ce qui équivaut à rechercher une matrice $P_o \succ 0$ telle que $P_o A_o + A_o^\top P_o \prec 0$ avec $P_o = X_c$ et $A_o = A_c^\top$.

Ce qui signifie que rechercher la matrice duale de Lyapunov d'une matrice d'état LTI en forme compagne de commande équivaut à rechercher la matrice de Lyapunov de sa représentation compagne d'observation.

Proposition A.3: Matrice de Lyapunov pour les systèmes LTI d'ordre 2 en forme compagne d'observation

Soit A_{o2} une matrice Hurwitz d'un système stable LTI du second ordre dans sa représentation compagne d'observation définie par :

$$A_{o2} = \begin{pmatrix} 0 & -k_2 \\ 1 & -k_1 \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

avec les deux scalaires $k_1, k_2 > 0$ (critères de stabilité Routh-Hurwitz nécessaires et suffisants, cf. [23]), pour toute constante $\beta_1 \in]0;1[$, définissons :

$$\bar{\eta}_1 = min(\sqrt{\beta_1(1-\beta_1)}, 1/2(1/(k_1^2 k_2) + \beta_1(1-\beta_1)/k_2^2))$$

Pour toute constante $\eta_1 \in]-\bar{\eta}_1; \sqrt{\beta_1(1-\beta_1)}[$, la classe suivante de matrice définie positive :

$$P_{o2} = \begin{pmatrix} k_2 + \beta_1 k_1^2 + 2\eta_1 k_1^2 k_2^2 & -\beta_1 k_1 k_2 \\ -\beta_1 k_1 k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \succ 0 \tag{A.8}$$

est une matrice de Lyapunov qui démontre la stabilité Hurwitz de A_{o2}.

Son équation de Lyapunov correspondante est :

$$\begin{aligned} A_{o2}^\top P_{o2} + P_{o2} A_{o2} &= -Q_{o2} \\ &= \begin{pmatrix} -2\beta_1 k_1 k_2 & -2\eta_1 k_1^2 k_2^3 \\ -2\eta_1 k_1^2 k_2^3 & -2(1-\beta_1) k_1 k_2^2 \end{pmatrix} \prec 0 \end{aligned} \tag{A.9}$$

qui est une matrice définie négative pour tout $\beta_1 \in]0;1[$ et tout $\eta_1 \in]-\bar{\eta}_1; \sqrt{\beta_1(1-\beta_1)}[$.

Preuve : Par construction (calcul).

A.3 Perspectives

Il peut être remarqué qu'en divisant une inégalité de Lyapunov par le dernier coefficient en bas à droite de la matrice de Lyapunov, que l'on notera $\lambda = (P)_{nn}$, on peut toujours se ramener à une matrice de Lyapunov avec le dernier coefficient en bas à droite égal à 1 :

$$\frac{1}{\lambda}(A^\top P + PA) \prec 0$$
$$(A^\top \tilde{P} + \tilde{P}A) \prec 0$$

Avec $\tilde{P} = \frac{1}{\lambda}P$ et $(\tilde{P})_{nn} = 1$.

Conjecture : par construction, ces classes de matrice de Lyapunov pourraient générer l'ensemble des matrices de Lyapunov du système : c'est-à-dire que pour toute matrice de Lyapunov $P \succ 0$ de A en forme compage de commande ou d'observation comme précédemment défini pour l'ordre 2 et 3, il existerait $\lambda > 0$ et une matrice $\tilde{P}$ comme définie par les propositions précédentes telles que $P = \lambda\tilde{P}$. Avec les propositions précédentes, pour l'ordre 2 on aurait alors la définition de toutes les matrices de Lyapunov pour les formes compagnes de commande et d'observation ; pour l'ordre 3, uniquement celles pour la forme compagne de commande permettant d'avoir $A^\top P + PA$ diagonale.

D'où la proposition d'appeler cette annexe comme une décomposition en *"éléments simples"* des matrices de Lyapunov.

Conjecture : En utilisant le critère de stabilité de Routh-Hurwtiz et en construisant un processus de récurrence, en suivant la même méthode que pour le deuxième et le troisième ordre, il est peut être possible de construire une décomposition en "éléments simples" similaires des matrices de Lyapunov pour tout système LTI d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Le passage à l'ordre 3 a cependant déjà présenté une difficulté bien supérieure qu'à l'ordre 2 pour être résolu, ne donnant un résultat partiel que pour les inégalités de Lyapunov diagonales, pour lequel néanmoins le résultat semble complet. La recherche de telle structure de matrice de Lyapunov à l'ordre n, si un tel résultat est formalisable, sera peut être un travail tout de même fastidieux à la vue de l'imbrication des coefficients du critère de Routh-Hurwtiz.

B

Annexe : définition et propriétés du Quaternion

Une documentation complète sur le quaternion et son lien avec la géométrie dans l'espace est donnée dans [41]. Les principales propriétés des quaternions utilisées dans cette thèse sont répertoriées ci-dessous.

B.1 Algèbre du Quaternion

Un quaternion est un vecteur de $\mathbb{R}^4$ généralement noté : $q = \begin{pmatrix} q_o \\ q_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o \\ - \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

q_o étant nommée la *partie scalaire* du quaternion et $q_V = (q_1\ q_2\ q_3)^\top$ la *partie vectorielle*.

Voici les principales propriétés d'algèbres utilisées dans cette thèse :

— Un vecteur tridimensionnel $\vec{V} = (v_x\ v_y\ v_z)^\top \in \mathbb{R}^3$ peut être associé au quaternion V_q avec zéro comme *partie scalaire* et le vecteur lui-même comme *partie vectorielle* : $V_q = (0\ v_x\ v_y\ v_z)^\top \in \mathbb{R}^4$ est le quaternion associé au vecteur $\vec{V}$.

— La matrice associée à un quaternion q est la matrice réelle $M_q(q) \in \mathbb{R}^{4\times4}$ définie par :

$$M_q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4\times4}$$
$$q \mapsto M_q(q) = q_o I + q_1 J + q_2 K + q_3 L$$

Avec :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, la matrice associée peut aussi s'écrire :

$$M_q(q) = \begin{pmatrix} q_o & -q_V^\top \\ q_V & S_q(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_o & -q_V^\top \\ q_V & q_o I_3 + S_V(q_V) \end{pmatrix}$$

— La matrice "antisymétrique" d'un quaternion est définie comme suit :

$$S_q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$$
$$q \mapsto S_q(q) = \begin{pmatrix} q_o & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix}$$

L'utilisation du nom "antisymétrique" est abusif pour le quaternion du fait que $S_q(q)^\top = q_o I_3 - S_V(q_V)$ n'est pas égal à $-S_q(q)$, par conséquent $S_q(q)$ n'est pas une matrice antisymétrique.
Pour un vecteur $\vec{V} = (v_x\ v_y\ v_z)^\top$, selon la définition de son quaternion associé, la matrice antisymétrique est :

$$S_V(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{pmatrix} = S_q(V_q)$$

La matrice antisymétrique est utile car elle réalise matriciellement le produit vectoriel usuel. Soit $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = S_V(\vec{V_1})\vec{V_2}$$

Nous avons donc aussi la relation :

$$S_q(q) = q_o I_3 + S_V(q_V)$$

La matrice inverse de la matrice antisymétrique du quaternion est égale à, pour tout $q_o \neq 0$:

$$S_q(q)^{-1} = \frac{1}{q_o} I_3 - \frac{1}{1+q_o^2} S_V(q_V) + \frac{1}{q_o(1+q_o^2)} S_V(q_V)^2 \tag{B.1}$$

— La loi de multiplication des quaternions dans ce document sera notée à l'aide du symbole suivant : $\star$

Soit q_a et q_b deux quaternions, la multiplication de ces deux quaternions est alors définie par la règle de multiplication matricielle suivante :

$$q_a \star q_b = M_q(q_a) q_b = \begin{pmatrix} q_{o_a} q_{o_b} - q_{V_a}^\top q_{V_b} \\ q_{o_a} q_{V_b} + q_{o_b} q_{V_a} + S(q_{V_a}) q_{V_b} \end{pmatrix}$$

— La loi de multiplication d'un quaternion q avec le quaternion $V_q = (0\ v_x\ v_y\ v_z)^\top$ associé à un vecteur $V = (v_x\ v_y\ v_z)^\top$, abusivement notée $q \star V$, conduit à la définition de la sous-matrice associée suivante :

$$q \star V = q \star V_q = M_q(q) \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} = L_q(q)V$$

Avec la sous-matrice associée définie par :

$$L_q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{4\times 3}$$
$$q \mapsto L_q(q) = \begin{pmatrix} -q_V^\top \\ S(q) \end{pmatrix}$$

— Le conjugué d'un quaternion est défini par : $\overline{q} = \begin{pmatrix} q_o \\ -q_V \end{pmatrix}$

— Soit q_a et q_b deux quaternions : $\overline{q_a \star q_b} = \overline{q_b} \star \overline{q_a}$

— La norme d'un quaternion est définie par : $||q||^2 = q^\top q = q_o^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$
Cela donne aussi la relation : $q \star \overline{q} = ||q||^2 I_q$

— $I_q = (1\ 0\ 0\ 0)^\top$ est le quaternion identité pour la loi de multiplication des quaternions $\star$.

— L'inverse d'un quaternion non nul pour la loi de multiplication $\star$ est défini par : $q^{-1} = \frac{1}{||q||^2}\overline{q}$
Avec $q \star q^{-1} = I_q = (1\ 0\ 0\ 0)^\top$.

L'inverse d'un quaternion unitaire (norme égale à 1) est donc égal à son conjugué : $q^{-1} = \overline{q}$

B.2 Quaternion et géométrie de $\mathbb{R}^3$

Dans cette partie, on suppose que le quaternion décrit l'*attitude* ou *orientation* d'un objet quelconque dans l'espace à trois dimensions :

— Un quaternion unitaire peut être associé à une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'un angle θ dans l'orientation trigonométrique directe autour de l'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x\ n_y\ n_z)^\top$ comme défini ci-dessous :

$$q = \begin{pmatrix} q_o \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Avec cette formule, nous pouvons remarquer que la périodicité 2π de la rotation dans $\mathbb{R}^3$ conduit à avoir la relation :

$$
\begin{aligned}
q &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos((\theta+2\pi)/2) \\ \sin((\theta+2\pi)/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2+\pi) \\ \sin(\theta/2+\pi) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= -q
\end{aligned}
$$

q et $-q$ représente donc la même rotation dans l'espace. L'application qui associe un quaternion unitaire et une orientation dans l'espace a donc deux éléments neutres : $(1\ 0\ 0\ 0)^\top$ et $(-1\ 0\ 0\ 0)^\top$. C'est ce qu'on appelle la *double couverture* du quaternion qui peut entrainer un *phénomène de retournement* comme illustré par la figure B.1.

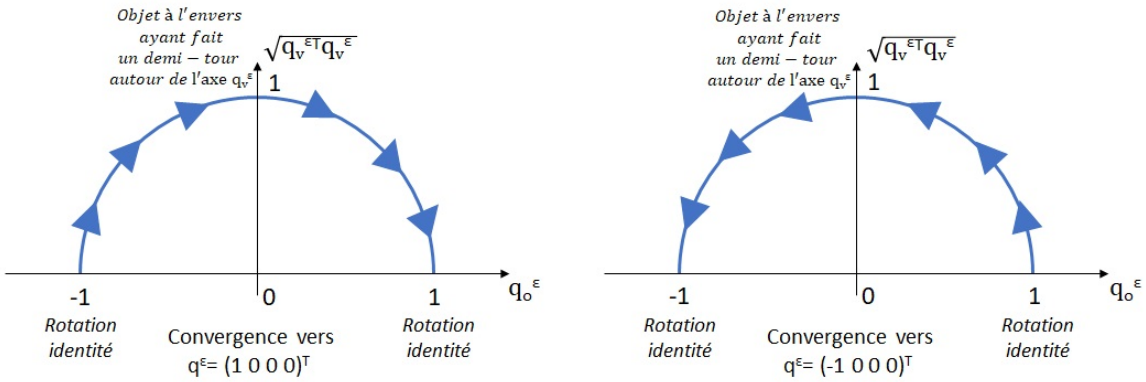

FIGURE B.1 – Convergence de l'attitude avec le quaternion et illustration du *phénomène de retournement* dû à la *double couverture* (figure de [38] reprise et modifiée).

— Deux rotations successives, une de θ_1 autour de $\vec{n}_1$ décrite par le quaternion q_1, puis une de θ_2 autour de $\vec{n}_2$ décrite par q_2, sont équivalentes à l'unique rotation définie par le quaternion :

$$q = q_2 \star q_1$$

— La rotation d'un vecteur V d'un angle θ autour d'un axe défini par le vecteur unitaire $\vec{n} = (n_x\ n_y\ n_z)^\top$, équivalent au quaternion q, est obtenue, à l'aide

du quaternion et d'opérations de l'algèbre des quaternions, par l'action de conjugaison suivante :

$$\begin{aligned} R_q : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ V &\mapsto R_q(V) = q \star V \star q^{-1} \end{aligned}$$

— La matrice de rotation $Q_q(q)$ équivalente à la rotation définie par le quaternion unitaire q, dont l'opération de rotation sur un vecteur est définie par l'opération de conjugaison précédente, telle que $R_q(V) = Q_q(q)V$, est donnée par :

$$\begin{aligned} Q_q : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^{3\times 3} \\ q &\mapsto Q_q(q) = \begin{pmatrix} q_V & S(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_V^\top \\ S(q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ou aussi :

$$\begin{aligned} Q_q(q) &= I_3 + 2S(q_V)S(q) \\ &= I_3 + 2q_o S(q_V) + 2S(q_V)^2 \\ &= I_3 + \sin(\theta)S(\vec{n}) + (1 - \cos(\theta))S(\vec{n})^2 \end{aligned}$$

La matrice de rotation inverse, au sens de la rotation d'un angle $-\theta$ autour de $\vec{n}$, correspondant au quaternion unitaire inverse au sens du quaternion, qui est aussi son conjugué pour le quaternion unitaire, $q^{-1} = \bar{q} = (q_o \ -q_V^\top)^\top$, est donc directement :

$$Q_q(q)^{-1} = Q_q(q^{-1}) = I_3 - 2q_o S_V(q_V) + 2S_V(q_V)^2$$

— Soit $\omega_e = (\omega_{x_e} \ \omega_{y_e} \ \omega_{z_e})^\top$ le vecteur de rotation instantané de l'objet dans le référentiel terrestre. L'attitude instantanée de l'objet dans ce référentiel est décrite par le quaternion q_e dont le comportement est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dq_e}{dt}_{|e} = \frac{1}{2}\omega_e \star q_e$$

La relation entre la vitesse de rotation exprimée dans le référentiel terrestre et celle exprimée dans le référentiel du corps rigide en mouvement est donnée par : $\omega_e = q_e \star \omega_b \star q_e^{-1}$

Cela conduit à l'équation différentielle équivalente suivante :

$$\frac{dq_e}{dt}_{|e} = \frac{1}{2}q_e \star \omega_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -q_{V_e}^\top \\ S(q_e) \end{pmatrix} \omega_b \tag{B.2}$$

Cette dernière expression est intéressante car la vitesse de rotation ω_b dans le référentiel du corps rigide est directement mesurable à partir de capteurs embarqués, par exemple à partir de gyromètres sur chaque axe. Par conséquent, il donne un moyen "direct" de calculer l'attitude au format du quaternion en

intégrant cette équation.

On peut remarquer que le quaternion est un vecteur à 4 paramètres qui décrit une orientation à 3 degrés de liberté dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, il contient des informations redondantes. En effet, un quaternion décrivant une attitude est un quaternion unitaire, donc il respecte la contrainte algébrique : $||q_e||^2 = q_e^\top . q_e = 1$. En dérivant cette équation, cette contrainte algébrique équivaut à : $\frac{d||q_e||^2}{dt} = 2\dot{q_e}^\top q_e = 0$

Cette contrainte algébrique est en effet incluse dans l'équation différentielle (B.2) du quaternion comme on peut aussi l'écrire :

$$2q_e^{-1} \star \frac{dq_e}{dt}_{|e} = 2M_q(q_e^{-1})\dot{q_e} = \omega_b$$

ω_b étant un vecteur de $\mathbb{R}^3$, ayant donc un 0 comme *partie scalaire* dans cette équation de quaternion, la première ligne de cette équation est donc la contrainte algébrique précédente $2\dot{q_e}^\top q_e = \frac{d||q_e||^2}{dt} = 0$.

— Cette équation différentielle de quaternion est équivalente pour sa matrice de rotation associée à :

$$\frac{dQ_q(q_e)}{dt} = Q_q(q_e)S_V(\omega_b)$$

C

Annexe : scripts MATLAB et modèles de simulation

C.1 Scripts d'analyse et de synthèse LMI

Ce premier script Matlab est le code qui initialise le problème de référence présenté dans le paragraphe 3.4 page 52 et qui appelle les fonctions pour résoudre les LMI de chaque théorème de Lyapunov 3.17 et S-Variable 3.20 indépendamment :

```
%%%%%%%%   Time Varying system multi-objective
   performance state feedback   %%%%%%%%
% Designer: PhD Student Thomas CONORD
% Team : LAAS-CNRS team MAC
% Development period : 01/10/2018 - 01/10/2021
%
% PhD Project : Linear Time Varying system robust control
%
% Script function : Static state feedback synthesis for
   polytopic systems
%
% Description : This file sets the initial values of a
   Linear Time Varying system
% embedded in a polytope to make the synthesis of a
   robust multi-objective static state
% feedback.
%
% Code version: 1
%
% Other needed files: FLMI_Rob_MultiObj.m,
   FLMI_SV_Rob_MultiObj.m, FNL_Syst.m
%
% Dev. software: Matlab 2019a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
close all
```

```
addpath(genpath('C:/Program␣Files/MATLAB/R2019b/toolbox/
   YALMIP'));
addpath(genpath('C:/Program␣Files/MATLAB/R2019b/toolbox/
   sdpt3-master'));
%addpath(genpath('C:/Program Files/MATLAB/R2019b/toolbox/
   SeDuMi_1_3'));

%%%%%%       LTV System polytope      %%%%%%%%

% Two mass-spring vertices definition:
kp = 1;
kd = 2;
a = 1.223; % defined between 1 and +infinity, 1 being kd
   is the single value 2 (no uncertainty).

kd_min = kd/a;
kd_max = kd*a;

Aj(:,:,1) = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 -kp -kd_min];
Aj(:,:,2) = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 -kp -kd_max];

B = [0;0;0;1];

Cx = [0 0 1 0];
Cv = [0 0 0 1];

%%%%%%       Controller parameters requirements
   %%%%%%%%

% Lower time constant bound:
Tau_min = 0.1; % Time constant in s
alpha_1 = -1/Tau_min; % decay rate in rad/s

% Upper time constant bound:
Tau_max = 1/3; % Time constant in s
alpha_2 = -1/Tau_max; % decay rate in rad/s

% Damping ratio:
theta = 0.5*pi/2; % Damping angle in the pole complex
   plane : sin(theta) = Tzeta (LTI system poles damping
   ratio)

% R_i matrices definition:
R_min = [2*alpha_1 -1;-1 0];
R_max = [-2*alpha_2 1;1 0];
```

```
R_damp = [0 exp(-i*theta) ; exp(i*theta) 0];


%%% Impulse to peak maximum initial conditions:

gamma_IP = 0.5; %  Tolerance tube in position around the
   trajectory

%wb_max = Tolq/(3*Tau_max); % Maximum speed error impulse
    along the trajectory
v_max = 5*gamma_IP;

B0 = [0; 0; 0; v_max]; % Maximum initial conditions so
   that the object shall not go out from
% the required tube tolerance along the trajectory.



%%%%%%%%%      Single Lyapunov Multi-objective robust
   controller synthesis        %%%%%%%

% Robust multi-objective state feedback synthesis:
[KX] = FLMI_Rob_MultiObj(Aj,B,B0,Cx,Cv,gamma_IP,alpha_1,
   alpha_2,theta);


%%%%%%%%%      Slack variable Multi-objective robust
   controller synthesis        %%%%%%%

% Initial guess slack matrices A_oi:
kappa = 100;

Ao1 = (alpha_1+kappa)*eye(4); % R_i stability lower bound
Ao2 = (alpha_2-kappa)*eye(4); % R_i stability upper bound
Ao3 = - kappa*exp(-i*theta)*eye(4); % R_i stability
   damping ratio

Ao4 = -kappa*eye(4); % Impulse-to-Peak bound
Ao5 = -(1/0.1+kappa)*eye(4); % Norm-to-Norm bound

%%% Robust multi-objective state feedback synthesis:
[KS] = FLMI_SV_Rob_MultiObj(Aj,B,B0,Cx,Cv,gamma_IP,R_damp
   ,R_min,R_max,Ao1,Ao2,Ao3,Ao4,Ao5);


%%%%%%%%%      Controller results simulation      %%%%%%%
```

```
t = [0 2.5];

x0 = B0;

[tX,yX] = ode45(@(t,y) FNL_Syst_REF(t,y,kd_min,kd_max,B,
   KX),t,x0);

[tS,yS] = ode45(@(t,y) FNL_Syst_REF(t,y,kd_min,kd_max,B,
   KS),t,x0);

grid on
hold on
plot(tX,yX(:,3),'b','LineWidth',3)
hold on
plot(tS,yS(:,3),'r','LineWidth',3)

xlabel('time␣(s)');
ylabel('Mass␣position␣\xi');
legend('K_X','K_S');
```

Ce second script Matlab ci-dessous est la fonction qui résout le premier théorème de Lyapunov 3.17 page 46 pour faire la synthèse du retour d'état statique multi-performance sur un polytope avec un certificat de Lyapunov commun :

```
function [K] = FLMI_Rob_MultiObj(Aj,B,B0,Cx,Cv,gamma_IP,
   alpha_1,alpha_2,theta)


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Designer: PhD Student Thomas CONORD
% Team : LAAS-CNRS team MAC
% Development period : 01/10/2018 - 01/10/2021
%
% PhD Project : Linear Time Varying system robust control
%
% Script function : Lyapunov static state feedback
   synthesis
%
% Description : This file solves the Lyapunov set of LMIs
% to perform the static state feedback synthesis of a
   Linear
% Time Varying system embedded in a polytope, according
% to a multi-objective specification.
%
```

```
% Code version: 1
%
% Other needed files: Called in Main_REF.m
%
% Dev. software: Matlab 2019a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Number of states and vertices:
[n,~,N] = size(Aj);

% Number of command:
[~,nc] = size(B);

% Number of performance output:
[nx,~] = size(Cx);
[nv,~] = size(Cv);

% Robust multi-objective LMI Lyapunov constraints :
X = sdpvar(n,n); % Lyapunov common dual certificate to be
    found
Y = sdpvar(nc,n); % Dual state feedback to be found

%invgamma2 = sdpvar(1); % Norm-To-Norm bound to be
   optimized to be found
% not declared as solver does not converge.


% Dual certificate X positiveness + Impulse-To-Peak
   performance LMI:
F = [ X >= 10^(-10)*eye(n), B0*B0' - gamma_IP*gamma_IP*X
   <= -10^(-10)*eye(n), Cx * X * Cx' - eye(nx) <=
   -10^(-10)*eye(nx)]; % invgamma2 <= - 10^(-10)];

for jj = 1:N % For all the vertices for a common Lyapunov
    dual certificate X

    % R_i stability time constant lower bound:
    F = [F , -Aj(:,:,jj)*X-B*Y-X*Aj(:,:,jj)'-Y'*B'+2*
   alpha_1*X <= -10^(-10)*eye(n)];

    % R_i stability time constant upper bound:
    F = [F , Aj(:,:,jj)*X+B*Y+X*Aj(:,:,jj)'+Y'*B'-2*
   alpha_2*X <= -10^(-10)*eye(n)];

    % R_i stability damping ratio upper bound:
    F = [F , exp(-i*theta)*(Aj(:,:,jj)*X + B*Y)+exp(i*
```

```
   theta)*(X*Aj(:,:,jj)' + Y'*B') <= -10^(-10)*eye(n)];

    % Norm-To-Norm LMI : not included as the optimisation
    solver does not
    % converge for the search of invgamma2 declared as an
    sdpvar.
    % F = [F, [Aj(:,:,jj)*X + B*Y + X*Aj(:,:,jj)' + Y'*B'
    - invgamma2*Bv*Bv', X*Cv'; Cv*X, -eye(nx)] <=
   -10^(-10)*eye(n+nc)]; %
end

%% Solve the set F of LMIs for X and Y:
sol = optimize(F);

% Save solution in other variables:
Xfeas = value(X);
Yfeas = value(Y);

% Not solved for:
%invgamma2feas = value(invgamma2);
%gamma = 1/sqrt(-invgamma2feas);

%% Verification if all LMI constraints are satisified:
Feasible = checkset(F);

if all(Feasible>0)
disp('OK feasible')
else
disp('infeasible or numerical problems')
end

%% Computation of the state feedback controller gain:
K = Yfeas * Xfeas^(-1);

end
```

Le dernier script Matlab ci-dessous est la fonction qui résout le second théorème S-Variable 3.20 page 48 pour faire la synthèse du retour d'état statique multi-performance sur un polytope avec plusieurs certificats de Lyapunov, chacun dédié à une performance, et un certificat S-Variable commun :

```
function [K] = FLMI_SV_Rob_MultiObj(Aj,B,B0,Cx,Cv,
   gamma_IP,R_damp,R_min,R_max,Ao1,Ao2,Ao3,Ao4,Ao5)
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Designer: PhD Student Thomas CONORD
% Team : LAAS-CNRS team MAC
% Development period : 01/10/2018 - 01/10/2021
%
% PhD Project : Linear Time Varying system robust control
%
% Script function : S-Variable static state feedback
   synthesis
%
% Description : This file solves the S-Variable set of
   LMIs
% to perform the static state feedback synthesis of a
   Linear
% Time Varying system embedded in a polytope, according
% to a multi-objective specification.
%
% Code version: 1
%
% Other needed files: Called in Main_REF.m
%
% Dev. software: Matlab 2019a
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Number of constraints:
Nconstraints = 5;

% Number of states and vertices:
[n,~,N] = size(Aj);

% Number of command:
[~,nc] = size(B);

% Number of performance output:
[nx,~] = size(Cx);
[nv,~] = size(Cv);

% Robust multi-objective LMI S-Variable constraint :
X = sdpvar(n,n,Nconstraints); % Lyapunov dual
   certificates specific for each performance to be found
S = sdpvar(n,n); % S-Variable common dual certificate to
   be found
T = sdpvar(nc,n); % S-Variable state feedback to be found

%invgamma2 = sdpvar(1); % Norm-To-Norm bound to be
   optimized to be found
```

```
%not declared as solver does not converge


% Dual certificates Xi positiveness:
F = [X(:,:,1) >= 10^(-10)*eye(n), X(:,:,2) >= 10^(-10)*
   eye(n), X(:,:,3) >= 10^(-10)*eye(n), X(:,:,4) >=
   10^(-10)*eye(n), X(:,:,5) >= 10^(-10)*eye(n)]; %
   invgamma2 <= -10^(-10)

for i = 1:N % For all the vertices for a common S-
   Variable certificate S

    % R_i stability time constant lower bound:
    F = [F , kron(R_min, X(:,:,1)) <= [Aj(:,:,i)*S + B*T;
    -S]*[Ao1' -eye(n)] + ([Aj(:,:,i)*S + B*T; -S]*[Ao1' -
   eye(n)])'];

    % R_i stability time constant upper bound:
    F = [F , kron(R_max, X(:,:,2)) <= [Aj(:,:,i)*S + B*T;
    -S]*[Ao2' -eye(n)] + ([Aj(:,:,i)*S + B*T; -S]*[Ao2' -
   eye(n)])'];

    % R_i stability damping ratio upper bound:
    F = [F , kron(R_damp, X(:,:,3)) <= [Aj(:,:,i)*S + B*T
   ; -S]*[Ao3' -eye(n)] + ([Aj(:,:,i)*S + B*T; -S]*[Ao3'
   -eye(n)])'];

    % Impulse-To-Peak performance:
    F = [F, B0*B0' - X(:,:,4) <= -10^(-10)*eye(n), Cx * X
   (:,:,4) * Cx' - gamma_IP*gamma_IP*eye(nx) <= -10^(-10)
   *eye(nx)];
    F = [F , [zeros(n,n), X(:,:,4); X(:,:,4), zeros(n,n)]
    <= [Aj(:,:,i)*S + B*T; -S]*[Ao4' -eye(n)] + ([Aj(:,:,
   i)*S + B*T; -S]*[Ao4' -eye(n)])'];

    % Norm-To-Norm LMI : not included as the optimisation
    solver does not
    % converge for the search of invgamma2 declared as an
    sdpvar.
    % F = [F , [zeros(n,n), X(:,:,5), X(:,:,5)*Cv'; X
   (:,:,5), -invgamma2*B*B', zeros(n,nv); Cv*X(:,:,5),
   zeros(nv,n), zeros(nv,nv)] <= [Aj(:,:,i)*S + B*T; -S;
   zeros(nv,n)]*[Ao5, -eye(n), zeros(n,nv)] + ([Aj(:,:,i)
   *S + B*T; -S; zeros(nv,n)]*[Ao5, -eye(n), zeros(n,nv)
   ])'];
    % F = [F , [-eye(nv), Cv*X(:,:,5), zeros(nv,n); X
```

```
   (:,:,5)*Cv', -invgamma2*B*B', X(:,:,5); zeros(n,nv), X
   (:,:,5), zeros(n,n)] <= [zeros(nv,n); Aj(:,:,i)*S + B*
   T; -S]*[zeros(n,nv), Ao5, -eye(n)] + ([zeros(nv,n); Aj
   (:,:,i)*S + B*T; -S]*[zeros(n,nv), Ao5, -eye(n)])'];
end

%% Solve the set F of LMIs for the Xi, S and T:
sol = optimize(F); %,invgamma2

% Save solution in other variables:
Xfeas = value(X);
Sfeas = value(S);
Tfeas = value(T);

% Not solved for:
% invgamma2feas = value(invgamma2);
% gamma = 1/sqrt(-invgamma2feas);

%% Verification if all LMI constraints are satisified:
Feasible = checkset(F);

if all(Feasible>0)
disp('OK feasible')
else
disp('infeasible or numerical problems')
end

%% Computation of the state feedback controller gain:
K = Tfeas * Sfeas^(-1);

end
```

C.2 Simulateur représentatif temps-réel Simulink

Un modèle représentatif complet d'un objet générique en mouvement (translation + rotation), comme illustré par la figure 4.3 page 62, dont on cherche à contrôler le mouvement pour qu'il suive une trajectoire théorique selon la stratégie de contrôle représentée sur le schéma 4.4 page 63, a été codé dans Matlab Simulink.

Le premier niveau de ce modèle Simulink est donné dans la figure C.1.

Une représentation 3D en temps réel de l'objet quelconque en mouvement est réalisée dans un monde virtuel Matlab dont une capture d'écran est proposée sur la figure C.2.

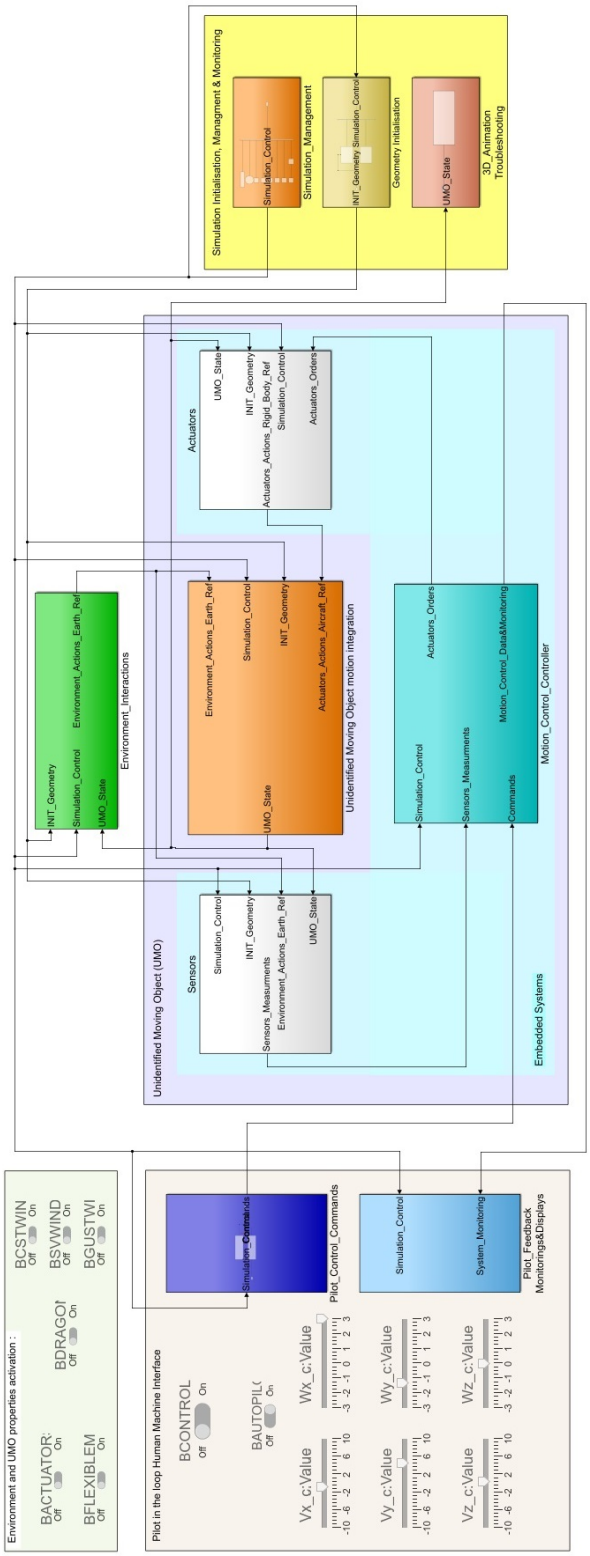

FIGURE C.1 – Modèle de simulation MATLAB Simulink temps réel représentatif pour le contrôle d'un objet générique le long d'une trajectoire.

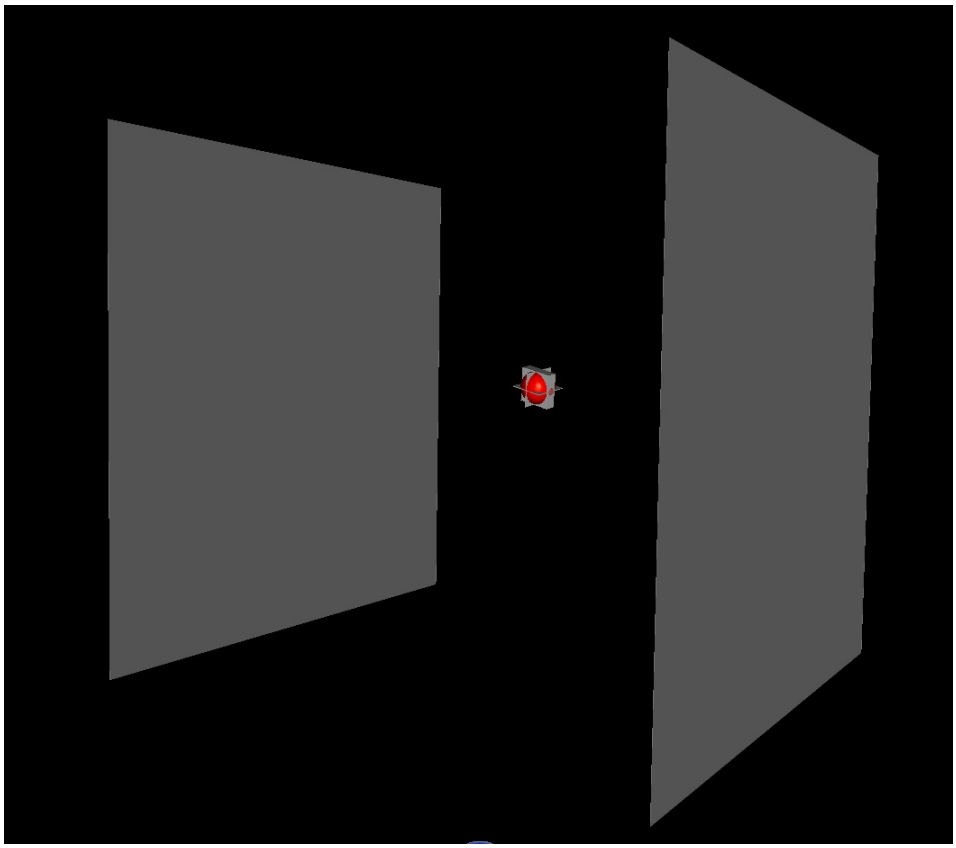

FIGURE C.2 – Représentation virtuelle en temps réel d'un objet générique en mouvement le long d'une trajectoire.

Cette activité de modélisation et de simulation a fait l'objet d'une proposition de modèle mathématique décrivant dans l'espace en trois dimensions l'impact d'un objet sur un obstacle. Ce modèle est donné dans le paragraphe C.2.1 suivant. Un modèle de trainée aérodynamique, notamment en couple pour le mouvement de rotation, est proposé dans le paragraphe C.2.3. Ce sont les modèles qui ont été codés dans le simulateur Simulink temps-réel précédent.

C.2.1 Modèle représentatif d'impact

L'impact d'un objet quelconque sur un obstacle est étudié en utilisant les théorèmes de la mécanique du solide, notamment le principe fondamental de la dynamique et la loi de Coulomb pour les forces de frottement (cf. [31], [41]). L'impact, correspondant à un contact de quelques dizaines de millisecondes avec une surface, est modélisé comme un événement discret qui modifie instantanément uniquement les valeurs des vitesses de translation et de rotation comme suit :

— Soit $\vec{e}_n$ le vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'objet, au point d'impact P_i comme illustré sur la figure C.3.

— On supposera que l'objet est parfaitement sphérique, avec son centre noté O

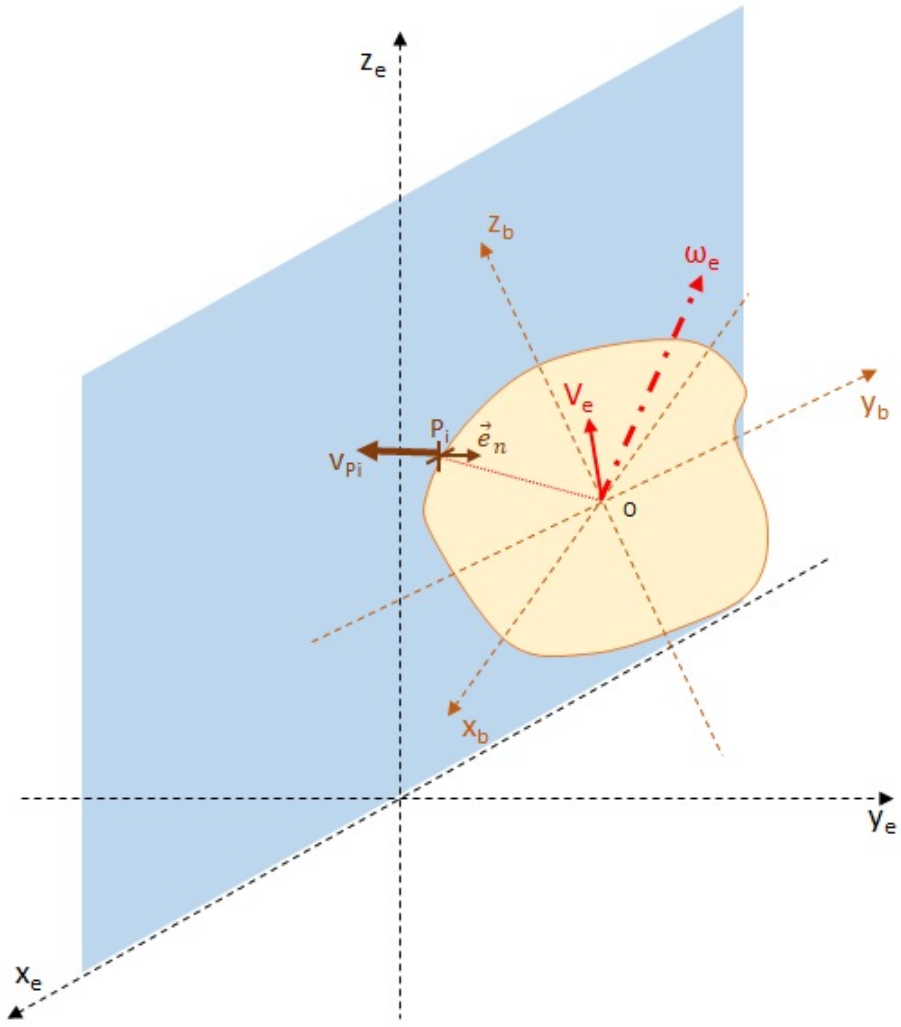

FIGURE C.3 – Objet impactant un mur.

qui est aussi son centre de gravité, et un rayon égal à R. Par conséquent, nous avons à l'instant même de l'impact :

$$\overrightarrow{OP}_i = -R\vec{e}_n$$

— L'impact est considéré comme instantané. Le modèle ne prend donc pas en compte le mouvement (qui doit être très petit) de l'objet pendant l'impact sur le mur : les deux points de la surface et de l'objet à l'impact sont considérés comme uniques et le même point P_i. On définit au point d'impact P_i pour l'objet :

— Les vitesses normales de translation et de rotation par rapport à la normale de la surface :

$$v_{e_N} = (v_e^\top \vec{e}_n)\vec{e}_n$$
$$\omega_{e_N} = (\omega_e^\top \vec{e}_n)\vec{e}_n$$

Définissons le vecteur de vitesse normale correspondant au point d'impact P_i :

$$V_{P_{i_N}} = \begin{pmatrix} v_{e_N} \\ R\omega_{e_N} \end{pmatrix}$$

— Les vitesses de translation et de rotation tangentes à la surface :

$$v_{e_T} = v_e - v_{e_N}$$

$$\omega_{e_T} = \omega_e - \omega_{e_N}$$

— La vitesse de translation tangente du point P_i de l'objet qui impacte la surface :

$$v_{P_{i_{e_T}}} = v_{e_T} + \omega_{e_T} \wedge \overrightarrow{OP}_{i_e} = v_{e_T} - \omega_{e_T} \wedge R\vec{e}_n = v_{e_T} + v_{\omega_{e_T}}$$

Avec $v_{\omega_{e_T}} = R\vec{e}_n \wedge \omega_{e_T}$ la composante de la vitesse tangente dans le référentiel terrestre au point P_i généré par la rotation ω_{e_T}.

Définissons le vecteur vitesse tangent correspondant au point d'impact P_i :

$$V_{P_{i_T}} = \begin{pmatrix} v_{e_T} \\ v_{\omega_{e_T}} \end{pmatrix}$$

Le comportement discret des vitesses de l'objet lors d'un impact est modélisé comme ci-dessous :

— Pour les composantes normales :

$$v_{e_N}^+ = -\alpha_N v_{e_N}$$
$$\omega_{e_N}^+ = \alpha_N \omega_{e_N}$$

$$V^{+}_{P_{i_N}} = \alpha_N \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_{P_{i_N}} \tag{C.1}$$

Avec $\alpha_N \in [0, 1]$, une constante correspondant au coefficient d'amortissement normal du rebond :

- $\alpha_N = 1$ est un rebond parfait : pas de perte d'énergie, la vitesse de translation normale après rebond est égale à l'opposé de la vitesse de translation normale avant ; la vitesse de rotation normale reste la même.
- $\alpha_N = 0$ est un arrêt de l'objet sur le mur sans rebond : toute l'énergie verticale est dissipée lors de l'impact, l'objet reste en contact avec le mur après l'impact, fixe, glissant ou roulant sur le mur.

Les hypothèses de modélisation sont ainsi simplifiées : entre autres, α_N devrait être fonction de la vitesse de l'impact. Par exemple, au-dessus d'une certaine valeur de la vitesse normale v_{e_N}, l'objet aura trop d'énergie pour se dissiper lors de l'impact sur le mur, et donc s'écrasera dessus. Nous supposerons que le domaine de vol reste dans un niveau d'énergie pour que α_N puisse être considéré comme une constante non nulle.

- Pour les composantes tangentes :

Nous modélisons les efforts tangents à l'impact comme une loi de frottement instantanée : à l'instant même de l'impact, une force tangente opposée et proportionnelle à la vitesse du point d'impact sur l'objet, est appliquée à l'objet. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'objet dans le référentiel terrestre donne :

- Pour les forces :

$$\frac{d(m.v_{e_T})}{dt} = F_{Contact_{eT}} = -f v_{P_{i_{eT}}} = -f(v_{e_T} + v_{\omega_{eT}})$$

En faisant l'approximation de la dérivation comme une variation sur un temps infinitésimal ΔT à l'instant de l'impact, avec l'hypothèse que la force de contact $F_{Contact_{eT}}$ est constante pendant l'impact, on a :

$$v^{+}_{e_T} - v_{e_T} = -\alpha_T(v_{e_T} + v_{\omega_{eT}})$$

Avec : $\alpha_T = \frac{f\Delta T}{m}$ correspondant à un coefficient de frottement scalaire normalisé, f étant le coefficient de frottement scalaire de la loi de friction.

Le modèle utilisé ici est une loi de frottement linéaire usuelle, opposée et proportionnelle à la vitesse du point de contact. D'autres modèles pourraient être utilisés : par exemple le coefficient f pourrait dépendre de la vitesse normale à l'impact v_{e_N} ; f pourrait également être une matrice 3 par 3 du fait que les états de surface du mur et de l'objet ne seraient pas

isotropes.

Cependant, pour la simulation ici, nous considérerons ce coefficient comme un scalaire positif constant.

— Pour les moments :

$$\frac{d(J_e\omega_{e_T})}{dt} = C_{Contact_{eT}} = \overrightarrow{OP}_{i_e} \wedge F_{Contact_{eT}} = \overrightarrow{OP}_{i_e} \wedge (-f v_{P_{i_{eT}}})$$

En utilisant l'égalité précédente pour les forces en remplaçant l'expression de $F_{Contact_{eT}}$ nous avons :

$$\frac{d(J_e\omega_{e_T})}{dt} = \overrightarrow{OP}_{i_e} \wedge \frac{d(mv_{e_T})}{dt}$$

En faisant les mêmes hypothèses que précédemment pour l'équation de translation, notamment que l'objet ne bouge pas pendant l'impact (J_e est ici constant), on obtient :

$$\tilde{J}_e(v^+_{\omega_{e_T}} - v_{\omega_{e_T}}) = v^+_{e_T} - v_{e_T}$$

Avec la matrice d'inertie normalisée : $\tilde{J}_e = \frac{1}{mR^2} J_e$ et $v_{\omega_{e_T}} = R\vec{e}_n \wedge \omega_{e_T}$ la vitesse du point de l'impact P_i généré par la rotation telle que définie précédemment.

Finalement, le comportement discret des composants tangents pendant l'impact de l'objet est modélisé comme suit :

$$\begin{aligned} v^+_{e_T} &= v_{e_T} - \alpha_T(v_{e_T} + v_{\omega_{e_T}}) \\ v^+_{\omega_{e_T}} &= v_{\omega_{e_T}} - \alpha_T \tilde{J_e}^{-1}(v_{e_T} + v_{\omega_{e_T}}) \end{aligned}$$

Ou de manière équivalente, pour revenir au vecteur vitesse de rotation :

$$\begin{aligned} v^+_{e_T} &= (1-\alpha_T)v_{e_T} - \alpha_T R\vec{e}_n \wedge \omega_{e_T} \\ \omega^+_{e_T} &= (I_3 - \alpha_T \tilde{J_e}^{-1})\omega_{e_T} + \alpha_T \tilde{J_e}^{-1}\vec{e}_n \wedge \frac{v_{e_T}}{R} \end{aligned}$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse tangent, cela équivaut à l'équation de saut pour les composantes des vitesses tangentes :

$$V^+_{P_{iT}} = \begin{pmatrix} (1-\alpha_T)I_3 & -\alpha_T I_3 \\ -\alpha_T \tilde{J_e}^{-1} & I_3 - \alpha_T \tilde{J_e}^{-1} \end{pmatrix} V_{P_{iT}} = (I_6 - \alpha_T \mathcal{J}) V_{P_{iT}} \qquad \text{(C.2)}$$

$$\text{Avec } \mathcal{J} = \begin{pmatrix} I_3 & I_3 \\ \tilde{J_e}^{-1} & \tilde{J_e}^{-1} \end{pmatrix}$$

Conservation de l'énergie : l'énergie cinétique tangente doit rester constante ou diminuer pendant l'impact :

$$\frac{1}{2}mv_{e_T}^{+\top}v_{e_T}^{+} + \frac{1}{2}\omega_{e_T}^{+\top}J_e\omega_{e_T}^{+} \leq \frac{1}{2}mv_{e_T}^{\top}v_{e_T} + \frac{1}{2}\omega_{e_T}^{\top}J_e\omega_{e_T}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} v_{e_T} \\ v_{\omega_{eT}} \end{pmatrix}^{+\top} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{e_T} \\ v_{\omega_{eT}} \end{pmatrix}^{+} \leq \begin{pmatrix} v_{e_T} \\ v_{\omega_{eT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{e_T} \\ v_{\omega_{eT}} \end{pmatrix}$$

$$(I_6 - \alpha_T\mathcal{J})^{\top} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} (I_6 - \alpha_T\mathcal{J}) - \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\alpha_T\mathcal{J}^{\top} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} \mathcal{J} \leq \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix} \mathcal{J} + \mathcal{J}^{\top} \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_e \end{pmatrix}$$

Ce qui conduit à la borne sur le scalaire positif α_T pour garantir la conservation de l'énergie :

$$0 \leq \alpha_T I_3 \leq 2(I + \tilde{J}_e^{-1})^{-1} \leq I_3$$

Interprétations de la loi d'impact tangent en fonction des valeurs de α_T :

— Si $\alpha_T = 0$, l'impact sur le mur n'a strictement aucun effet sur les vitesses de translation tangente et de rotation de l'objet, elles restent constantes pendant l'impact :

$$v_{e_T}^{+} = v_{e_T}$$
$$\omega_{e_T}^{+} = \omega_{e_T}$$

— Le cas extrême opposé serait celui où, après un rebond, le frottement sur le mur aurait pour effet d'aligner exactement la rotation et la translation : $v_{e_T}^{+} = -v_{\omega_{e_T}}^{+}$, comme si l'objet roulait exactement le long de la ligne de translation avec un contact parfait.

Ce cas se produit si après un rebond avec $v_{e_T} + v_{\omega_{e_T}} \neq 0$ nous avons :

$$v_e^{T+} = -v_{\omega_e}^{T+}$$
$$(I_3 - \alpha_T(I + \tilde{J}_e^{-1}))v_{e_T} = (\alpha_T(I + \tilde{J}_e^{-1}) - I_3)v_{\omega_{e_T}}$$

En d'autres termes si : $\alpha_T I_3 = (I + \tilde{J}_e^{-1})^{-1}$

Par conséquent, un rebond sur le mur peut conduire à un alignement parfait des vitesses de translation et de rotation si et seulement si la matrice d'inertie

$\tilde{J}_e$ est une matrice scalaire, autrement dit si et seulement si l'objet est à symétrie sphérique.

Pour notre étude, comme l'inertie normalisée respecte largement l'inégalité suivante : $0 \leq \max\lambda(\tilde{J}_e) \leq 1$, nous prendrons l'hypothèse avec beaucoup de marge que : $0 \leq \alpha_T \leq (1 + \max\lambda(\tilde{J}_e)^{-1})^{-1} \leq 0.5$.

Nous utilisons la valeur nominale de α_T comme étant $\alpha_T^* = 0.05$ dans la simulation.

Système hybride représentatif de l'impact :

Les modèles de sauts normaux et tangents donnés par les équations (C.1) et (C.2) décrivent le comportement discret des composantes normale et tangente des vitesses de translation et de rotation projetées sur la surface et sur sa normale au point d'impact. Cette loi de saut du système est notée :

$$x^+ = g(x, \vec{e}_n) \tag{C.3}$$

Avec $x = (X_e, q_{V_e}, V_e, \omega_e)$ l'état complet de l'objet décrivant sa position X_e et son attitude q_{V_e} dans l'espace dans le référentiel terrestre, ainsi que sa vitesse de translation V_e et de rotation ω_e.

La fonction g rassemble toute la modélisation de l'impact de la manière suivante :

$$x^+ = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \alpha_N \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -I_3 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{e_N} \\ \omega_{b_N} \end{pmatrix}$$
$$+ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_3 & 0 \\ 0 & I_3 \end{pmatrix} - \alpha_T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_3 & S(\vec{e}_n)Q_q(q_e)R \\ -\tilde{J_b}^{-1}Q_q(q_e)^{-1}S(\vec{e}_n)\frac{1}{R} & \tilde{J_b}^{-1} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_{e_T} \\ \omega_{b_T} \end{pmatrix}$$

Où $\begin{pmatrix} v_{e_N} \\ \omega_{b_N} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} v_{e_T} \\ \omega_{b_T} \end{pmatrix}$ sont les composantes normale et tangente des vitesses de translation et de rotation à la surface.

$\alpha_N \in [0; 1]$ et $\alpha_T \in [0; 0.5]$ les scalaires représentant respectivement les effets normal et tangentiel de l'impact.

$\tilde{J}_b = \frac{1}{mR^2} J_b$ correspondant à la matrice d'inertie normalisée dans le référentiel du corps rigide en mouvement.

C.2.2 Modèle conservatif d'impact

Le coefficient de frottement en 3 dimensions exact de la surface (en fonction de la nature de la surface de contact de l'objet et de la nature de la surface de la paroi impactée) peut être complètement incertain et variable en fonction de la vitesse de l'impact. De plus, la surface peut avoir n'importe quelle orientation inclinée, conduisant à une valeur de vecteur normal à la surface $\vec{e}_n$ inconnue, et donc à des rebonds complètement indéfinis.

Une manière globale de gérer toutes ces incertitudes de rebond peut être de modéliser le saut comme un opérateur global incertain qui change instantanément les vitesses de translation et de rotation du véhicule comme suit :

$$x^+ = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{vv} & \Delta_{v\omega} \\ 0 & 0 & \Delta_{\omega v} & \Delta_{\omega\omega} \end{pmatrix} x = \Delta_x x$$

Le saut ne se produisant que sur les vitesses de l'objet, on peut définir le sous-opérateur incertain :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{vv} & \Delta_{v\omega} \\ \Delta_{\omega v} & \Delta_{\omega\omega} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$$

qui doit satisfaire au principe de dissipation de l'énergie :

$$\begin{pmatrix} v_e^+ \\ \omega_b^+ \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & J_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e^+ \\ \omega_b^+ \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} v_e \\ \omega_b \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & J_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ \omega_b \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à la contrainte dissipative :

$$\begin{pmatrix} I_6 & \Delta^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_6 \\ \Delta \end{pmatrix} \preceq 0, \text{ avec} M = \begin{pmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & J_b \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la manière la plus globale et la plus conservative de modéliser un impact de l'objet. En effet, ce modèle génère beaucoup de cas qui ne seront pas réalisables, notamment des sauts qui ne respectent pas la contrainte physique de l'impact qui est de ne pas traverser le mur au point d'impact.

Par conséquent, comme la normale de la surface peut être spécifique pour chaque impact et inconnue, modéliser les impacts comme un opérateur incertain dissipatif

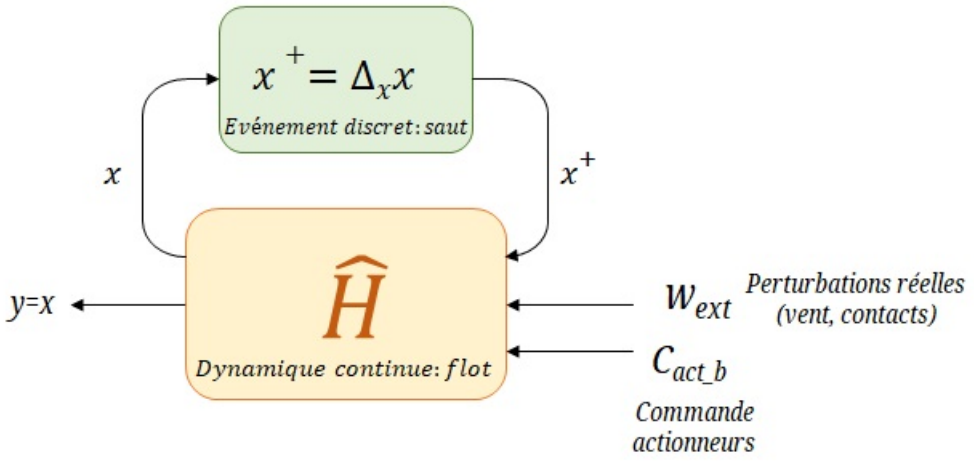

FIGURE C.4 – Représentation de l'impact comme un système interconnecté incertain hybride.

Δ est un moyen général simple d'obtenir un modèle conservatif pour tout type d'impact.

En fin de compte, un contrôleur robuste à cette modélisation de l'impact satisfera les exigences pour les impacts réels. Nous pouvons donc utiliser ce modèle hybride simplifié pour faire l'analyse de robustesse d'un contrôleur aux impacts.

C.2.3 Modèle représentatif aérodynamique

La force aérodynamique est généralement divisée en deux composantes : une composante opposée aux vecteurs de vitesse de l'air, appelée traînée ; le second perpendiculaire au vecteur vitesse de l'air appelé portance (cf. référence [29] pour la théorie détaillée de l'aérodynamique).

Ces réactions aérodynamiques sont fonction de la forme et de l'orientation de l'objet : elles peuvent être des fonctions mathématiques connues pour certaines formes, sur des plages d'orientation et de vitesse de l'air données, ou totalement inconnues, voire aléatoires (turbulence). C'est pourquoi nous considérons cette entrée comme une perturbation externe inconnue pour la synthèse et l'analyse du contrôle du mouvement d'objets dans l'air que nous réalisons dans cette thèse.

Pour la simulation, pour prendre en compte ces efforts aérodynamiques en leur donnant une direction et norme qui seraient représentative, nous utilisons les modèles simplifiés suivants dans le simulateur :

— $F_{AeroDrags_e}$ se réfère à la résultante des forces aérodynamiques appliquées par l'air sur l'objet dans le référentiel terrestre. Nous utiliserons ici le modèle sui-

vant :

$$\begin{aligned} F_{AeroDrags_e} =& \frac{1}{2}\rho S C_z(q_e)||v_e - v_{wind_e}||^2 \ \vec{n}_{(v_e - v_{wind_e})^\perp} \\ & - \frac{1}{2}\rho S C_x(q_e)||v_e - v_{wind_e}||(v_e - v_{wind_e}) \\ & + \frac{1}{2}\rho S C_{spin}(q_e)(R\omega_e \wedge (v_e - v_{wind_e})) \end{aligned}$$

- Le premier terme est la portance, c'est-à-dire la force appliquée à l'objet perpendiculairement à son vecteur vitesse : $\vec{n}_{(v_e - v_{wind_e})^\perp}$ est un vecteur unitaire normal au vecteur vitesse air,
- Le deuxième terme correspond à la traînée de translation, c'est-à-dire la force appliquée à l'objet opposé à sa vitesse air,
- Le troisième terme correspond à une force induite, perpendiculaire à la trajectoire, provoquée par la rotation de l'objet sur lui-même lors de la translation (extrapolation des résultats du cylindre rotatif réf [29] partie 2 chapitre 3).

— $C_{AeroDrags_e}$ se réfère à la résultante des couples aérodynamiques appliqués par l'air sur l'objet dans le référentiel terrestre (traînée "rotationnelle"). Nous utiliserons le modèle suivant pour la simulation :

$$C_{AeroDrags_e} = -\frac{1}{2}\rho R S C_\omega ||\omega_e||\omega_e$$

Encore une fois, ce modèle n'est pas précis et ne sera utilisé que pour la simulation pour injecter des perturbations dont l'intensité (normes) et direction pourraient être proches des réelles.

Bibliographie

[1] Hernan Abaunza and Pedro Castillo Garcia. Quadrotor aggressive deployment, using a quaternion-based spherical chattering-free sliding-mode controller. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 56(3) :1979–1991, 2020.

[2] Kasey A. Ackerman, Irene M. Gregory, and Naira Hovakimyan. Flight control methods for multirotor UAS. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 2019.

[3] C. M. Agulhari, A. Felipe, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Algorithm 998 : The Robust LMI Parser - A toolbox to construct LMI conditions for uncertain systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 45(3) :36 :1–36 :25, August 2019.

[4] Cristiano M. Agulhari, Germain Garcia, Sophie Tarbouriech, and Pedro L. D. Peres. A new methodology to compute stabilizing control laws for continuous-time LTV systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 28(13) :4045–4057, 2018.

[5] V. Alekseev, V. Alexéev, V. Tikhomirov, and Fomine. *Commande optimale*. Moscou : Mir, 1982.

[6] M. F. Anjos and J.-B. Lasserre. *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. Springer, 2012.

[7] Ali Bazaei and S.O. Reza Moheimani. Synthesis of modulated–demodulated control systems. *Automatica*, 50(7) :1816–1824, 2014.

[8] S. Bhat and D. Bernstein. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems and Control Letters*, 39(1) : 63-70, 2000.

[9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

[10] Michael S. Branicky. *Introduction to Hybrid Systems*. Birkhäuser Boston, 2005.

[11] N. Chaturvedi, A. Sanyal, and N. McClamroch. Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems*, 31(3) : 30-51, 2011.

[12] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. on Automat. Control*, 44(12) :2257–2270, December 1999.

[13] Mahmoud Chilali, Pascal Gahinet, and Carsten Scherer. Multi-objective output-feedback control via LMI optimization. *IFAC 13th Triennial World Congress, San Francisco, USA*, 1996.

[14] Thomas Conord and Dimitri Peaucelle. Continuous quaternion based almost global attitude tracking. *IEEE Conference on Control Technology and Applications, San Diego, USA*, 2021.

[15] Thomas Conord and Dimitri Peaucelle. Multi-performance state-feedback for time-varying linear systems. *Third IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems MICNON, Japan, Online*, 2021.

[16] Thomas Conord and Tarunraj Singh. Robust input shaper design using linear matrix inequalities. *2006 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1470–1475, 2006.

[17] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences, 2006.

[18] Gilles Duc and Stéphane Font. *Commande H_∞ et μ-analysis*. Hermes, 2000.

[19] Yoshio Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. *S-Variable Approach to LMI-Based Robust Control*. Springer, 2015.

[20] Denis Efimov, Johannes Schiffer, Nikita Barabanov, and Romeo Ortega. Relaxing the conditions of ISS for multistable periodic systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :7217 – 7222, 2017. 20th IFAC World Congress.

[21] Liming Fan, Hai Huang, Liang Sun, and Kaixing Zhou. Robust attitude control for a rigid-flexible-rigid microsatellite with multiple uncertainties and input saturations. *Aerospace Science and Technology*, 95 105443, 2019.

[22] T.R. Gonçalves, G.W. Gabriel, and J.C. Geromel. Differential linear matrix inequalities optimization. *IEEE Control Systems Letters*, 3(2) :380–385, April 2019.

[23] Yves Granjon. *Automatique*. Dunod, 2015.

[24] Wolfgang Hahn. *Stability of Motion*. Springer Verlag Berlin, 1967.

[25] Changran He and Jie Huang. Trajectory tracking and disturbance rejection for quadrotor helicopter by a novel method. *38th Chinese Control Conference*, 2019.

[26] B. Hu and P. Seiler. Exponential decay rate conditions for uncertain linear systems using Integral Quadratic Constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11) :3631–3637, 2016.

[27] Hyoun-Chul Choi, Hyungbo Shim, and Jin Heon Seo. An LMI approach to exponential stabilization of uncertain time-delay systems. *2008 International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 1850–1854, 2008.

[28] JoostVeenman, Carsten W.Scherer, and Hakan Köroğlu. Robust stability and performance analysis based on Integral Quadratic Constraints. *European Journal of Control*, 31, Pages 1-32, 2016.

[29] John D. Anderson JR. *Fundamentals of aerodynamics*. McGraw-Hill, 2010.

[30] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems Third Edition*. Prentice Hall, 2002.

[31] Frédéric Legrand. Cours de mécanique du solide. *Cours de sciences physiques de classe préparatoire aux grandes écoles scientifiques*, 2019.

[32] Hao Liu, Xiafu Wang, and Yisheng Zhong. Quaternion-based robust attitude control for uncertain robotic quadrotors. *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL INFORMATICS*, 11 No. 2, 2015.

[33] Jinhao Liu and Jianying Yang. Spacecraft high accuracy attitude control by quaternion-based nonlinear dynamic inversion. *38th Chinese Control Conference*, 2019.

[34] Johan Löfberg. Pre- and post-processing Sum-Of-Squares programs in practice. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5) :1007–1011, 2009.

[35] A. Loria, E. Panteley, D. Popovic, and A.R. Teel. A nested Matrosov theorem and persistency of excitation for uniform convergence in stable nonautonomous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :183–198, 2005.

[36] A. Lyapunov. *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la faculté de sciences de Toulouse 1907, 1892. traduit de l'ouvrage original.

[37] F. Landis Markley. Attitude error representations for Kalman filtering. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 26(2) :311–317, 2003.

[38] Christopher G. Mayhew, Ricardo G. Sanfelice, and Andrew R. Teel. Quaternion-based hybrid control for robust global attitude tracking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56 No. 11, 2011.

[39] A. Megretski. Positivity of trigonometric polynomials. *IEEE Conf. Decision and Control*, 2003.

[40] Dinu Mihailescu-Stoica, Raul Acuna, and Jürgen Adamy. High performance adaptative attitude control of a quadrotor. *18th European Control Conference*, 2019.

[41] Florian Monteghetti. Quaternions, orientation et mouvement. *Rapport de recherche ISAE-SUPAERO hal-01618257*, 2012.

[42] Pablo Monzon and Rafael Potrie. Local and global aspects of almost global stability. *45th IEEE Conference on Decision and Control Manchester Grand Hyatt Hotel San Diego, CA, USA, Minnesota, USA*, 2006.

[43] Richard M. Murray. Nonlinear control of mechanical systems : A Lagrangian perspective. *International Federation of Automatic Control*, 21, pp. 31-42, 1997.

[44] Brad Paden and Ravi Panja. Globally asymptotically stable 'PD+' controller for robot manipulators. *International Journal of Control*, 47 Issue 6, 1988.

[45] D. Peaucelle, S. Tarbouriech, M. Ganet-Schoeller, and S. Bennani. Evaluating regions of attraction of LTI systems with saturation in IQS framework. *IFAC Symposium on Robust Control Design*, June 2012. Paper in an invited session.

[46] Dimitri Peaucelle. Romuloc : Randomized and robust multi-objective control toolbox, 2014.

[47] S. Pettersson and B. Lennartson. An LMI approach for stability analysis of nonlinear systems. *1997 European Control Conference (ECC)*, pages 2317–2322, 1997.

[48] Anders Rantzer. On the Kalman-Yakubovitch-Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28 :7–10, 1996.

[49] Anders Rantzer. A dual to Lyapunov's stability theorem. *Systems and Control Letters*, 42(3) :161–168, 2001.

[50] Mokhtar Sha Sadeghi, Navid Vafamand, and Mohammad Hassan Khooban. LMI-based stability analysis and robust controller design for a class of nonlinear chaotic power systems. *Journal of the Franklin Institute*, 353(13) :2835–2858, 2016.

[51] M. Sakai, T. Asai, R. Ariizumi, and S. I. Azuma. An LMI-based stability analysis of periodic linear time-varying systems : For general cases involving higher harmonic frequencies. *2020 59th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, pages 1236–1240, 2020.

[52] C.W. Scherer. LMI relaxations in robust control. *European J. of Control*, 12 :3–29, 2006.

[53] C.W. Scherer and C.W.J. Hol. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *MathProg*, 107(1-2) :189–211, 2006.

[54] P. Seiler, R. Moore, C. Meissen, M. Arcak, and A.K. Packard. Finite horizon robustness analysis of LTV systems using Integral Quadratic Constraints. *Automatica*, 100(4) :135–143, 2019.

[55] Rune Shlanbusch, Antonio Loria, and Per Johan Nicklasson. On the stability and stabilization of quaternion equilibria of rigid bodies. *Automatica*, 48 (2012) 3135-3141, 2012.

[56] Jos F. Sturm. SeDuMi Semidefinite programming solver, 2003.

[57] K. C. Toh, R. H. Tütüncü, and M. J. Todd. SDPT3 Semidefinite-quadratic-linear programming, 2001.

[58] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38 :49–95, 1996.

[59] Dabo Xu, Jiafan He, Andong Sheng, Zhiyong Chen, and Dan Wang. Robust attitude tracking control of a rigid spacecraft based on nonlinearly controlled quaternions. *11th Asian Control Conference*, 2017.

[60] Tian Ye and Cai Yuanli. Quaternion based sliding mode attitude design for spacecraft. *IEEE 3rd ICCSSE*, 2017.

[61] Zhigang Yu and Guiying Li. Quaternion-based robust sliding mode control for spacecraft attitude tracking. *IEEE 31st Chinese Control and Decision Conference*, 2019.

[62] Bin Zhou. On asymptotic stability of Linear Time-Varying systems. *Automatica*, 68 :266–276, 2016.